#

# Однофакторный дисперсионный анализ

В общем виде эту задачу можно поставить следующим образом: пусть мы наблюдаем m независимых нормально распределенных случайных величин (1) предполагая, что все они имеют одинаковую дисперсию  (эту гипотезу можно проверить с помощью F-критерия). Средние значения случайных величин (2) вообще говоря, различны. Пусть в одинаковых экспериментальных условиях над каждой из переменных (1) производится некоторая серия наблюдений (для простоты ограничимся случаем равночисленных наблюдений, хотя это обстоятельство несущественно для теории). Данные k-й серии пусть будут  (k=1,2,…..,m) (3).

Опираясь на эти статистические данные, мы хотим проверить гипотезу, согласно которой средние значения (2) равны, т.е. a1=a2=…..=am(4)

Если проверяемая гипотеза, называемая нулевой гипотезой, верна. поставив средние в каждой серии, мы не должны получить ш расхождения между ними; если такое расхождение обнаружено то гипотезу (3) приходится отбросить.

Примером подобной ситуации может служить статистическое исследование урожайности сельскохозяйственной культуры в зависимости от 1 из m сортов почвы при некотором способе ее обработки. Истинное значение урожайности для каждого из m сортов почвы неизвестно, а экспериментально наблюдаемые урожайности (3) в каждом из n экспериментов на этих сортах почвы содержат ошибки, возникающие из-за тех или иных случайных причин. Будет ли одинаковой урожайность на всех сортах почвы, если предположить, что измерения (3) проводились с ‚одинаковой точностью и в одинаковых условиях? Иначе говоря, мы хотим проверить влияние одного фактора сорта почвы — на урожайность .сельскохозяйственной культуры. В другой постановке та же задача возникает, если мы хотим проверить, насколько влияют и влияют ли вообще на плодородие почвы источники загрязнения. В этом случае сорт почвы может меняться и давать разную урожайность в зависимости от удаленности обрабатываемого участка земли от источника загрязнения.

Таблица результатов измерений будет иметь следующий вид (табл. 1):

Результаты измерений урожайности

|  |  |
| --- | --- |
| Номер сорта почвы | Номер эксперимента |
| 1 | 2 | 3 | … | n |
| 1 | x11 | X12 | X13 | … | X1n |
| 2 | X21 | X22 | X23 | … | X2n |
| 3 | X31 | X32 | X33 | … | X3n |
| … | … | … | … | … | … |
| m | Xm1 | Xm2 | Xm3 | … | xnm |

Обозначим через  среднее арифметическое из n наблюдаемых урожайностей на почве первого сорта, через  — среднее из урожайностей в почве второго сорта и т. д., так, что

, …,

Систематические ошибки наблюдений урожайностей на разных почвах неодинаковы, то мы должны ожидать повышенного рассеивания выборочных средних.

Обозначим через общее среднее арифметическое всех n m измерений так, что .(5)

Суммирование по k при постоянном i дает сумму по всем наблюдениям i-той серии (т.е. по i-му сорту почвы). Дальнейшее суммирование по i дает итог по всем сортам почвы. Так как

, то .

В то же время



,(6)

причем

.

Но , так как представляет собой сумму отклонений наблюдений i-й серии от средней этой же серии и потому S=0. (7)

По этому приняв во внимание, что

,(8)

мы можем основное тождество (6) записать в следующем виде

, (9) или в сокращенном виде ,(10)

 где , , 

Таким образом, общая сумма квадратов ‚ распадается на две составные части, первая из которых связана с оценкой дисперсии урожайности между сортами почвы, а вторая — с оценкой дисперсии внутри всех сор почвы.

Предположим теперь, что гипотеза (4) верна, и потому нормальные распределения всех величин  (урожайностей) тождественны. имеют одинаковые среднее значение и дисперсию  .Тогда же nm наблюдений можно рассматривать как выборку из одной и той же нормальной совокупности .

Можно показать, что при этой гипотезе статистики ,  и  распределены по закону  соответственно с ,,  степенями свободы, а по тому Q, Q1, Q2 могут быть использованы в этом случае для оценки . Эта оценка может быть поведена с помощью несокращенных характеристик

, , .

При более детальном изучение показывает, что Q1 и Q2 при нашей гипотезе независимы друг от друга. Заметим, этот вывод справедлив при любых предположениях относительно ai.

Из сказанного вытекает, что критерий

 (11) в гипотезе (4) будет следовать F-распределению с  и  степенями свободы. Выбирая q%-й уровень значимости при известных , , найдем по таблице 20 в приложение соответствующий q% предел  так, что *P(F>Fq)*.

Пусть с другой стороны наша гипотеза неверна и средние значения (2) не равны друг другу, но параметр  во всехm совокупностях один и тот же, когда сумма Q2, не изменяющаяся при замене  на , имеет, как можно доказать. По-прежнему распределение  и  степенями свободы, .

 По-прежнему является несмещенной оценкой для . В то же время числитель F в (7,14) учитывает систематические расхождения между средними значениями ai, и имеет тенденцию расти и становится тем больше, чем больше отклонения от предполагаемого равенства значений ai. Поэтому правила проверки гипотезы дается в следующем виде: a1=a2=…..=am принимается, если ; в этом случае  и  несмещенными оценками параметров a и  нормально распределенных случайных величин (1).

Если ,то нулевая гипотеза отклоняется, и следует считать, что среди значений  имеются хотя бы два не равных друг другу.

Схема однофакторного дисперсионного анализа

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Компонента дисперсии | Сумма квадратов | Число степеней свободы | Выборочная дисперсия |
| Между сортами почвы |  |  |  |
| Внутри сортов почвы |  |  |  |
| Полная (общая) |  |  |  |

Сравнивая дисперсию между сортами почвы с дисперсией «внутри» почвы, по величине их отношения (11) судят, насколько рельефно проявляется влияние такого фактора, как сорт почвы; в этом сравнении как раз и заключается основная идея дисперсионного анализа. Схему однофакторного дисперсионного анализа можно представить в , табл. 2.

В качестве числового примера рассмотрим данные пятикратного (n=5) измерения урожайности на трех (т =3) сортах почвы. В таблице приведены данные не фактического, а условного эксперимента;

Результаты измерения урожайности в относительных единицах

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| НомерСорта почвы | Номер эксперимента | Выборочное среднее |
| 1 | 2 | 3 | 4 | N=5 |
| i |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 12 | 15 | 17 | 13 | 16 | 14.6 |
| 2 | 20 | 17 | 16 | 25 | 14 | 18.4 |
| m=3 | 10 | 12 | 11 | 13 | 8 | 10.8 |

Из таблицы имеем:

;

; 

; ; ; .

Для нашего примера таблица однофакторного анализа будет иметь следующий вид

дисперсионный анализ урожайности на различных сортах почвы

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Компонента дисперсии | Сумма квадратов | Число степеней свободы | Выборочная дисперсия |
| Между сортамипочвы | Q1=137 | 2 |  |
| Внутри сортов почвы | Q2=102.2 | 12 |  |
| Полная (общая) | Q3=239.2 | 14 |  |

Произведя теперь проверку нулевой гипотезы (4) с помощью  распределения, находим 

При двух степенях свободы большей дисперсии (k1 = 2) и 12 е свободы меньшей дисперсии (k2 = 12) по табл. в приложении II находим критические границы для F, равные при 5%-м уровне pзначимости и 3.88 и 1%-м уровне — 6.93. Полученное нами из наблюдений значение  превышает указанные границы, и потому нулевая гипотеза должна быть отвергнута, т.е. урожайность на рассматриваемых сортах почвы неодинакова.