**Про графічний спосіб розв’язання математичних задач**

Нова програма з математики орієнтує вчителя на необхідність формування в учнів умінь розв’язувати задачу різними способами. Учитель прагне до того, щоб учні усвідомлювали можливість різних способів розв’язання деяких задач і свідомо вибирали найбільш раціональний з відомих їм способів.

Для відшукання різних способів розв’язання задачі необхідно розкрити залежності між величинами і знайти різні шляхи вираження цих залежностей.

Показати роль графічної моделі як важливого засобу виявлення різних схованих залежностей між величинами задачі, розв'язуваної різними способами.

Перш ніж графічна модель почне виконувати ту функцію, про яку говорилося вище, необхідно навчити дітей будувати графічну модель задачі, вирішувати відповідні задачі одним способом. Робота з розв’язання задач різними способами в I класі починалася з більш легших. Так, уже при розв’язанні складених задач, що включають прості задачі на збільшення і зменшення числа на кілька одиниць, використовували графічну модель.

Наведемо графічні моделі і різні способи розв’язання деяких задач цього виду.

1. Першокласники принесли кулі. Червоних куль було 20, блакитних на 6 більше, ніж червоних, а жовтих на 4 більше, ніж блакитних. Скільки жовтих куль принесли першокласники?

 ч

 б

 ж

**I спосіб**

(20+6)+4=30 (куля.)

Відповідь: 30 куль.

Більш глибокий аналіз задачі, якому в значній мірі сприяє графічна модель, дозволяє розв’язати задачу ще одним способом.

**II спосіб**

20+(6+4) =30 (куля.)

Відповідь: 30 куль.

2. У словнику Оля записала 30 слів. Іра на 5 слів менше, ніж Оля, а Володя на 3 слова менше, ніж Іра. Скільки слів записав Володя?

**I спосіб**

(30—5)—3=22 (сл.)

Відповідь: 22 слова.

**II спосіб**

30—(5+3) =22 (сл.)

Відповідь: 22 слова.

В II класі продовжувалася робота з розв’язання задач цього ж виду різними способами, однак задачі бралися більш складні і вимагали для розв’язання глибокого аналізу залежностей.

Наведемо приклад.

1. На збір картоплі приїхали робітники в трьох автобусах: у першому 35 чоловік, у другому на 5 чоловік менше, ніж у першому, а в третьому на 8 чоловік більше, ніж у другому. Скільки робітників приїхало в третьому автобусі?

**I спосіб**

(35 — 5) + 8 = 38 (ч.)

Відповідь: 38 чоловік.

Другий спосіб розв’язання задачі заснований на поглибленому аналізі залежностей за допомогою графічної моделі:

35+(8—5) =38 (ч.)

Відповідь: 38 чоловік.

Щоб прищепити учням інтерес до розв’язання задач нестандартним способом, бажано пропонувати задачі з таким формулюванням запитання, що допускала вибір більш раціонального способу розв’язання переконала в тому, що графічна модель дозволяє знайти більш раціональний спосіб розв’язання задачі.

Для зразка продовжимо розгляд складених задач .

2. На нижній полиці 25 книг, на середній на 2 книги більше, ніж на нижній, а на верхній на 9 книг більше, ніж на середній. На скільки більше книг на верхній полиці, ніж на нижній?

(25 + 2) +9 — 25 = 11 (кн.)

Відповідь: на верхній полиці більше, ніж на нижньої, на 11 книг.

Можна розв’язати задачу іншим способом: 9+2=11 (кн.). Він створений на виявленні схованих залежностей між величинами задачі. Неважко переконатися, що виявленню схованих залежностей у значній мірі сприяє графічна модель задачі.

Вище розглянули розв’язання різними способами складених задач, що включають прості задачі на збільшення і зменшення числа на кілька одиниць.

Даний інтерес представляє розв’язання різними способами складених задач, що включають прості задачі на збільшення і зменшення числа в кілька разів.

Приведемо кілька прикладів.

1. В один магазин привезли 35 дитячих велосипедів, в іншій у 3 рази більше, ніж у перший, а в третій у 2 рази більше, ніж у другий. Скільки велосипедів привезли в третій магазин?

## І спосіб

(35 3) 2 = 210 (вел.)

Відповідь: 210 велосипедів.

На основі графічного аналізу задачі одержуємо, що, для того щоб розв’язати задачу іншим способом, спочатку треба довідатися, у скільки разів більше велосипедів привезли в третій магазин, ніж у перший (3 x 2). Подальше розв’язання стає зрозумілим: 35 x (3 x 2) = 210 (вел.)

2. Я бачив у зоопарку крокодилів, ведмедів і мавп. Крокодилів було 17, ведмедів у 3 рази більше, ніж крокодилів, і в 2 рази менше, ніж мавп. Що можна довідатися, використовуючи ці дані?

Сформулюємо деякі з можливих питань і приведемо відповідні розв’язання:

а) Скільки мавп було в зоопарку?

**I спосіб**

(17 x 3) x 2 = 102 (про.)

Відповідь: 102 мавпи.

**II спосіб**

17 (3 x 2) = 102 (мав.)

Відповідь: 102 мавпи.

б) Скільки усього звірів було в зоопарку?

**I спосіб**

1) 17 x 3 = 51 (м.)

2) 51 • 2 = 102 (мав.)

3) 17 + 51 + 102 = 170 (зв.)

**II спосіб**

Провівши графічний аналіз умови, учні з'ясовують, що загальне число рівних відрізків, буде 1 + 3 + 6 = 10. Тому що кожний з рівних відрізків зображує число 17, маємо: 17- 10 = 170 (зв.).

в) На скільки більше мавп у зоопарку, ніж ведмедів?

1) 17 x 3 = 51 (мед.)

2) 51 x 2 = 102 (мав.)

3) 102—51 = 51 (зв.)

Відповісти на всі можливі питання до умови однієї і тієї ж задачі на одному уроці неможливо. Роботу розподіляли на кілька уроків, причому деяка частина її пропонувалася для самостійної домашньої роботи.

При розв’язанні задач різними способами враховують, коли доцільно розглянути розв’язання тим чи іншим способом, на якій стадії розв’язання тієї чи іншої задачі має сенс познайомити учнів з іншим способом розв’язання. Візьмемо для прикладу складену задачу, що включає в себе дві прості: одну на збільшення (зменшення) числа на кілька одиниць, іншу на знаходження суми. З розв’язанням таких задач учні зустрічаються як у I, так і в II і III класах.

Розглянемо, яким способом розв’язували задачі цього виду в I і II класах.

Задача. На будівництві вдома працювали 24 муляра, а малярів на 4 чоловік менше, ніж мулярів. Скільки усього мулярів і малярів працювало на будівництві будинку?

Розв’язання:

24 + (24 — 4) = 44 (чол.)

Відповідь: 44 чоловік.

У III класі після вивчення закону зміни суми з зміною одного з доданків розглянуту задачу бажано розв’язати її іншим способом.

Наведемо приклад розв’язання задачі іншим способом: «Збільшимо число малярів на 4 чоловіки, тоді загальне число людей, що працюють на будівництві будинку, буде: 24+24 (чол.). Ця сума більше шуканої суми на 4, тому що ми збільшили другий доданок на 4. Виходить, шукана сума повинна бути не 24 + 24, а на 4 менше (24 + 24)—4».

Наведемо ще кілька задач, що розв’язується різними способами.

1. На одній поличці 5 книг, а на іншій у 2 рази більше. Скільки книг на двох поличках?

**I спосіб**

5 + 5 2 = 15 (кн.)

Відповідь: 15 книг.

Міркування при розв’язанні задачі другим способом: «На другій поличці книг у 2 рази більше, ніж на першій. Виходить, на ній два рази по 5 книг, а на двох поличках 3 рази по 5 книг: 5 x 3 = 15 (кн.)».

2. На складі було 706 мішків борошна. Потім привезли ще 138 мішків, а 604 мішка відправили в пекарню. Скільки мішків борошна залишилося на складі?

 Залишилось –Х м. Відправили 604 м.



 Було 706 м. Привезли – 138 м.

Правильно побудована графічна модель дозволяє до розв’язання задачі прикинути, у яких межах буде знаходитися відповідь (у складі залишиться більше ніж 200 мішків борошна, але менше ніж 250).

Тепер розглянемо можливі способи розв’язання задачі.

**I спосіб**

(706 + 138) — 604 = 240 (міш.)

Відповідь: залишилося 240 мішків борошна.

На основі графічного аналізу задачі одержуємо й інший спосіб розв’язання задачі: 706—(604—138) = = 706 — 466 = 240 (міш.)

Відповідь: залишилося 240 мішків борошна.

Постійно зростає роль графічної моделі як важливого резерву знаходження різних схованих залежностей при розв’язанні задач. На практиці навчання велику увагу приділяють розв’язанні таких задач різними способами і виявленню найбільш раціонального.

Наведемо кілька прикладів.

1. На змаганнях один хлопчик пробіг 320 *м,* інший на 130 *м* більше першого, а третій на180 *м* менше ніж пробігли перший і другий разом. Скільки метрів пробіг третій хлопчик?

Це, по суті справи, геометрична задача, як і попередня, хоча за формою являє собою арифметичну.

**I спосіб**

1) 320 + 130 = 450 *(м)*

2) 450 + 320 = 770 *(м)*

3) 770 — 180 = 590 *(м)*

Відповідь: 590 *м.*

**II спосіб**

1) 320 + 130 = 450 (л)

2) 450 — 180 = 270 *(м)*

3) 320 + 270 = 590 *(м)*

Відповідь: 590 *м.*

**III спосіб**

1) 180 — 130 = 50 *(м)*

2) 320 — 50 = 270 *(м)*

3) 320 + 270 = 590 *(м)*

Відповідь: 590 *м.*

**IV спосіб**

1) 320 + 320 = 640 *(м)*

2) 180 — 30 = 50 *(м)*

3) 640 — 50 = 590 *(м)*

Відповідь: 590 *м.*

Четвертий спосіб розв’язання є різновидом третього.

Щоб прищепити дітям інтерес до розв’язання задач нестандартним способом, корисно використовувати прийом варіювання питання задачі. Сформулюємо питання до розглянутої вище задачі так: «На скількох метрів більше пробіг третій хлопчик, ніж другий?»

**І спосіб**

1) 320 + 130 = 450 *(м)*

2) 450 + 320 = 770 *(м)*

*3)* 770 — 180 = 590 *(м)*

4) 590 — 450 = 140 *(м)*

Відповідь: 140 *м.*

На основі виявлення схованих залежностей за допомогою графічної моделі приходимо до більш раціонального способу розв’язання: 320 — 180 = 140 *(м).* Розв’зуючи задачу іншим способом, замість чотирьох дій виконуємо тільки одну.

Ми розглянули різні способи розв’язання задач.

Наприклад:

1. Обчислити площу прямокутника *АСЕК,* за даними, нанесеним на креслення.

**I спосіб**

1) 12 — 5 = 7 *(см)*

1. 7 • 3 = 21 *(кв. см)*

Відповідь: 21 *кв. см.*

**II спосіб**

1) 12 • 3 = 36 *(кв. см)*

2) 5 • 3 = 15 (кв. *см)*

3) 36—15=21 *(кв. см)*

Відповідь: 21 *кв. см.*

*2.* Знайти площа прямокутника *BCFK* по наступним даним:

площа *AMND=48 кв. см*

площа *ACFD=29 кв. см*

площа *BMNR—25 кв. см*

**I спосіб**

1) 48 — 29 = 19 *(кв. см*) — площа *CMNF*

*2)* 25 — 19 = 6 *(кв. см )—* площа *BCFK.*

**II спосіб**

1) 48 — 25 = 23 *(кв. см*) — площа *ABKD*

2) 29 — 23 = 6 *(кв. см*) — площа *BCFK*

**III спосіб**

1) 29 + 25 = 54 *(кв. см) —* сума площ *ACFD* і *BMNK*

*2)* 54 — 48 = 6 *(кв. см) —* площа *BCFK*

# Графічне розв’язання задач

**ІІ клас**

Розв’язати задачу — значить визначити значення невідомої величини, що задовольняє даній умові. Розрізняють два способи розв’язання задач — обчислювальний і графічний. У результаті застосування обчислювального методу шукані значення величин застосовуються у вигляді чисел. У результаті ж застосування графічного методу шукані значення величин застосовуються у вигляді геометричних образів: відрізків прямої, прямокутників, квадратів і т.д.

У методичній літературі розмежовують дві основні функції, що може виконувати креслення при розв’язанні арифметичних задач: застосування креслень як зорового матеріалу для полегшення логічних міркувань, проведених при рішенні задач звичайними методами; застосування креслень як особливого методу розв’язання.

Однак дотепер питання про графічний метод розв’язання арифметичних задач не знайшов належного застосування в шкільній практиці.

Ндалі ми намагатимемося розглянути другу функцію креслення, функцію креслення як особливого методу розв’язання задач, показати можливості розв’язання задач графічним способом у II класі і розкрити практичне значення графічного способу розв’язання задач. Якщо основна цінність першої функції креслення полягає в тому, що графічний запис умови задач є одним з ефективних методичних прийомів вироблення наочного представлення про математичну структуру задачі, те графічний метод розв’язання задачі — важливий засіб, за допомогою якого учні можуть не тільки уявити собі наочна умова задачі, але і її розв’язання.

Графічний метод дає можливість більш тісно встановити зв'язок між арифметичним і геометричним матеріалами, розвити функціональне мислення дітей.

Варто помітити, що завдяки застосуванню графічного методу в початковій школі можна скоротити час, протягом якого учень навчиться розв’язувати різні практичні задачі. У той же час уміння графічно розв’язувати задачу — це важливе політехнічне уміння — ще не виховується в учнів.

Основою для графічного розв’язання арифметичних задач є те, що «на безлічі відрізків прямої, як і на безлічі прямокутників з рівними сторонами, визначені операції додавання і множення на невід’ємне число, тобто операції, подібні з арифметичними діями додавання і множення невід’мних чисел».

До графічного розв’язання задач учні приходять не відразу. У I класі діти учаться графічно за допомогою прямокутних смужок і відрізків зображувати числа, їхню суму і різницю, умову задачі.

Деякі з таких вправ описані в ряді статей, опублікованих у журналі «Початкова школа». Множення в II класі, є власне кажучи окремий випадок суми декількох додатків що складаються, тільки доданки в цьому випадку однакові. Зміст множення тому близько підходить до змісту додавання. При підготовці до вивчення множення учням для виконання пропонувалися вправи, де поряд з розташуванням суми неоднакових доданків давалися і завдання на розташування суми рівних доданків.

Зазначалося, що при додаванні рівних чисел смужки, що зображують геометричні образи доданків, зручніше зображувати не в один ряд, а стовпчиком.

Так, поряд з такою формою зображення пропонувалася й інша. З'ясовувалося, що множене вказує на число кліток у горизонтальному ряді, а множник — число таких рядів.

Набуті в такий спосіб уміння використовувалися при розв’язанні перших задач на множення — задач на розкриття конкретного змісту множення. Розглядалася, наприклад, задача: «Хлопчик обвів 3 ряди кліток, по 4 клітки в кожнім ряді. Скільки усього кліток обвів хлопчик?» Аналізуючи умову задачі, учні одержували таке креслення.

Для розкриття конкретного змісту ділення розглядалися, наприклад, такі задачі:

1. Задача на ділення числа на рівні частини: «Учню треба обвести 6 клітинок у двох рівних рядах. По скільки клітинок треба обвести у кожному ряді?» Міркування. Обведемо по одній клітинці у кожному ряді, всього 2 клітинки, потім ще по одній клітинці у кожному ряді, всього 4 клітинки, і, нарешті, ще по одній клітинці в кожному ряді, всього 6 клітинок. У результаті виходить креслення, на якому показується ділене, дільник, частка.

2. Задача на ділення на вміщення числа по змісту: «Учню треба обвести 6 клітинок, по 2 клітинки в кожнім ряді. Скільки вийде рядів?» Міркування. Обведемо 2 клітинки, у першому ряді всього 2 клітинки; обведемо ще 2 клітинки, всього 4 клітинки в двох рядах; обведемо ще 2 клітинки, всього 6 клітинок у трьох рядах. У результаті виходить креслення.

За допомогою графічного зображення умов розглянутих вище задач легко показати зв'язок двох видів ділення одного на інший і зв'язок їх із множенням. Оскільки узагальнення двох видів задач на ділення у підручнику розглядається тоді, коли учні вже знайомі із знаходженням невідомого множника, то записувати розв’язання задач обох видів корисно у виді виразів із змінною. Так, розв’язання розглянутих вище задач на розкриття конкретного змісту важливо записати:

1) *х –* 2 = 6 2) 2 – *х* = 6

 *х =*3 *х =* 3

Після того як учні навчаться графічно зображувати суму, різницю, добуток і частку двох чисел, можна приступити до графічного розв’язання окремих видів задач, занесених до програми II класу.

Задачі в дві дії виду: *а x b ± с, а ± b x с, (а + b) x с, (а ± b) : с.*

Задачі розглянутого виду містять у собі просту задачу на дії першого ступеня і просту задачу на множення і ділення.

Розглянемо, наприклад, задачу (виду *а x b + с):* «У школу для ремонту першого дня привезли колоди на трьох машинах, по 10 колод у кожній машині. В другий день привезли 18 колод. Скільки колод привезли за два дні?»

Якщо зобразити колоди у виді клітинки учнівського зошита, то кількість колод, що привезли першого дня на одній машині, зобразиться у виді прямокутної смужки, що містить 10 клітинок, а на трьох машинах — у виді прямокутника, що складає з трьох рівних прямокутних смужок. Кількість колод, привезених другого дня, можна зобразити у виді прямокутної смужки, що містить 18 клітинок.

Одержуємо практичну задачу на підрахунок загального числа клітинок геометричної фігури. При цьому фігура, розділена на рівні квадрати, дозволяє не тільки тренувати учнів у використанні таблиць множення, але й у складанні арифметичних дій з наступним обчисленням їхнього значення, як вказував А.М. Пишкало.

Переконливо і наочно можна перевірити правильність графічного розв’язання розглянутої задачі способом складання і графічного розв’язання обернених задач.

Перша обернена задача (виду *a — b x c*): «Для ремонту школи за два дні було привезено 48 колод. Першого дня на трьох машинах привезли по 10 колод у кожній. Другого дня привезли ще кілька колод. Скільки колод привезли другого дня?» Загальна кількість колод (48), привезених за два дні, можна зобразити за допомогою геометричної фігури. Тоді кількість колод, привезених першого дня, зобразиться у виді прямокутника, що містить 10 *x* 3=30 (клітинок). Очевидно, що число клітинок, що залишилося, (у результаті підрахунку знаходимо, що залишилося 18 клітинок) буде відповідати числу колод, привезених другого дня. Порівнюючи розв’язання прямої і оберненої задач, переконуємося, що пряма задача вирішена правильно.

Розглянемо графічне розв’язання ще однієї оберненої задачі стосовно розглянутого вище прямого задачі (виду *(а* x *b):с):* «Для ремонту школи за два дні було привезено 48 колод. Першого дня на декількох машинах привезли по 10 колод на кожній. Другого дня привезли 18 колод. На скількох машинах привезли колоди першого дня?»

Будемо так само, як і в попередніх задачах, зображувати колода у виді клітинки учнівського зошита.

Представимо число 48 у виді добутку двох співмножників. Способи представлення числа 48 у виді добутку двох співмножників можуть бути різними: 6 *x* 8; 12 *x* 4 і т.д. Графічне розв’язання задачі не буде залежати від способів представлення числа 48 у виді добутку двох співмножників. Нехай, наприклад, число 48 представлене у виді добутку чисел 6 і 8. Графічно цей добуток можна зобразити за допомогою прямокутника, що містить визначене число клітинок: множник 6 указує на число клітинок в одній прямокутній смужці, а множник 8 — на число таких смужок.

З цією метою в прямокутнику відрахуємо 18 клітинок, почавши відлік з нижньої прямокутної смужки, з першої клітинки (тому що в одній смужці 6 клітинок, то відрахуємо три смужки). Число клітинок, що залишилося, покаже кількість колод, що привезли першогодня. Тому що першого дня на кожній машині привозили по 10 колод, то, щоб довідатися, на скількох машинах привезли колоди, можна міркувати приблизно в такий спосіб: «Відрахуємо, почавши з верхньої смужки, з першої клітинки ліворуч, 10 клітинок, одержимо кількість колод, що привезли на одній машині; відрахувавши ще десять клітинок, одержимо кількість колод, що привезли на другій машині, і, нарешті, відрахувавши ще 10 клітинок, одержимо кількість колод, що привезли на третій машині».

## Задачі на знаходження суми і різниці двох добутків

Розглянемо задачу: «Учні II класу в кожнім з чотирьох рядів викопали по 6 ям для дерев, а учні 1 класу в кожнім рядів викопали по 7 ям. Скільки усього ям для дерев викопали учні I і II класів?»

Зобразимо яму у виді клітинки учнівського зошита. У процесі аналізу задачі виконуються у відповідних кресленнях.

— Про що говориться в задачі? (Учні I і II класів викопали ями для дерев).

— Що відомо в задачі? (Учні II класу в кожнім з чотирьох рядів викопали по 6 ям для дерев).

— Зобразите це графічно.

— Що ще відомо в задачі? (Учні I класу в кожнім із трьох рядів вирили по 7 ям для дерев).

— Зобразите це графічно.

— Що запитується в задачі? (Скільки усього ям для дерев вирили учні I і II класів.)

Подальша робота складається з підрахунку загального числа клітинок геометричної фігури.

У залежності від того, на які частини ми розіб'ємо розглянуту фігуру, одержимо і різні вирази для підрахунку загального числа клітинок.

Розглянемо тепер таку задачу:«У магазин привезли 12 ящиків з яблуками, по 8 *кг у* кожнім. До обідньої перерви було продано 9 ящиків. Скільки кілограмів яблук залишилося продати після обідньої перерви?»

— Про що говориться в задачі? (У магазин привезли ящиківи з яблуками.)

— Що відомо в задачі? (У магазин привезли 12 ящиків з яблуками, по 8 кг у кожнім).

Якщо домовимося, що одному кілограму яблук відповідає клітинка учнівського зошита, то як графічно зобразити ящики з яблуками? (У виді прямокутної смужки, що містить 8 клітинок).

— А як зобразити графічно 12 ящиків з яблуками? (У виді прямокутника, що складає з 12 рівних прямокутних смужок, кожна з який містить 8 клітинок).

— Зобразіть це. Що ще відомо в задачі? (До обідньої перерви було продано 9 ящиків).

— Зобразимо це графічно. (Учні відраховують у прямокутнику, 9 прямокутних смужок, починаючи з першої зверху смужки).

— Про що запитується в задачі? (Скільки кілограмів яблук залишилося продати після обідньої перерви.)

Для того щоб відповісти на запитання задачі, підраховують число ящиків, що залишилося - їх 3. Тому що в кожній ящиківі по 8 *кг* яблук, то, отже, залишилося продати 8 • 3=24 *(кг).*

Розглянемо графічне розв’язання оберненої задачі відповідно розглянутої вище: «У магазин привезли 12 ящиків з яблуками, по 8 кг у кожнім. До обідньої перерви було продано кілька ящиків. Після обідньої перерви залишилося продати 24 *кг* яблук. Скільки ящиків з яблуками було продано до обідньої перерви?»

Запис розв’язання задачі по «сходинках»:

1) 8 *x* 12 *(кг) х=* (8 *x* 12 - 24) : 8

2) 8 *x* 12 — 24 *(кг) х* = (96 — 24) : 8

3) (8 *x* 12 — 24) : 8 (ящ.) *х* = 9

Графічне розв’язання задачі. Користаючись тими ж умовними позначками, що і при графічному розв’язанні прямої задачі, і аналізуючи умову, одержимо креслення.

У задачі потрібно довідатися, скільки ящиків з яблуками було продано до обідньої перерви. Тому що на малюнку 19 ящиківа зображена у виді прямокутної смужки, що містить 8 кліток, те очевидно, що до обідньої перерви було продано 9 ящиків з яблуками.

Після розв’язання задачі дітям корисно задати питання:

— Якби після обідньої перерви було продано не 24 *кг* яблук, а більше (менше), то що можна сказати про кількість яблук, проданих до обідньої перерви: більше чи менше.

Такі додаткові питання будуть сприяти виявленню функціональної, залежності між величинами.

**Задачі на знаходження частки двох добутків**

Розглянемо задачу: «Юра обвів чотири ряди клітинок, по 6 клітинок у кожнім ряді, а Сергій обвів два ряди клітинок, по 3 клітинки в кожнім ряді. В скількох разів більше обвів клітинок Юра, ніж Сергій?»

Розв’язуючи задачу шляхом складання формули, учень у зошиті робить наступні записи:

Юра — 4 ряди по 6 клітинок

Сергій — 2 ряди по 3 клітинки

1) 6 *x* 4 (клітинок) *х* = (6 *x* 4) : (3 *x* 2)

2) 3 *x* 2 (клітинок) *х =* 24:6

3) (6 *x* 4) : (3 *x* 2) *х* = 4

Відповідь: у 4 рази.

Розглянемо тепер графічне розв’язання задачі.

— Про що говориться в задачі? (Про те, що Юра і Сергій обводили клітинки в зошитах.)

— Що відомо в задачі (Юра обвів чотири ряди клітинок, по 6 клітинок у кожнім ряді.)

— Зобразите це графічно. Що ще відомо в задачі? (Сергій обвів два ряди клітинок, по 3 клітинки в кожнім ряді.)

— Зобразіть це графічно.

Про що запитується в задачі? (У скількох разів більше обвів клітинок Юра, чим Сергій.)

Щоб відповісти на запитання задачі, треба знайти, скільки разів прямокутник, зображений на малюнку

Відповідь: 4 рази.

Розглянемо графічне розв’язання задачі, оберненої відповідно розглянутої вище прямої задачі: «Юра обвів кілька рядів клітинок, по 6 клітинок у кожнім ряді. Сергій обвів два ряди клітинок, по 3 клітинки в кожнім ряді. Юра обвів клітинок у 4 рази більше, ніж Сергій. Скільки рядів клітинок обвів Юра?»

 **Моделювання як важливий засіб навчання розв’язування задачі**

Діюча програма початкової школи вимагає розвитку самостійності в дітей у розв’язанні текстових задач. Кожен учень повинний уміти коротко записати умову задачі, ілюструючи його за допомогою малюнка, чи схеми креслення, обґрунтувати кожен крок в аналізі задачі й у її розв’язанні, перевірити правильність розв’язання. Однак на практиці ці вимоги виконуються далеко не цілком, що приводить до серйозних прогалин у знаннях і навичках учнів.

Задача (II клас): «Для ремонту школи першого дня привезли 28 колод, а другого дня привезли на 4 машинах по 10 колод. Скільки усього колод привезли за два дні?»

**Правильні** розв’язання:

28 + 10 *x* 4 = 68 (б.) чи: 1) 10 *x* 4 = 40 (б.)

2) 28 + 40 = 68 (б.)

**Помилкові** розв’язання:

I *варіант*

1) 4+10=14 (б.)

2) 28+14=42 (б.)

II *варіант*

1) 28:4=7 (б.)

2) 7+10=17 (б.)

III *варіант*

1) 28:4=7 (б.)

2) 7 *x* 10=70 (б.)

Чимало помилок допущено другокласниками й у такій задачі: «У радгоспі працюють 37 трактористів, шоферів на 8 більше, ніж трактористів, а комбайнерів на 5 менше, ніж шоферів. Скільки комбайнерів працює в радгоспі?»

**Правильні** розв’язання:

(37+8)—5=40 (к.) чи: 1) 37+8=45 (ш.)

2) 45—5=40 (к.)

**Помилкові** розв’язання:

I *варіант*

1) 37—8=29 (т.)

2) 29+5=34 (к.)

II *варіант*

1) 37+8=45 (т.)

2) 45:5=9 (к.)

Найбільше число помилок допустили другокласники в розв’язанні задачі на пропорційні величини: «У трьох однакових ящиківах 21 кг апельсинів. Скільки кілограмів апельсинів у 8 таких ящиківах?»

**Правильні** розв’язання:

(21:3) *x* 8=56 (кг) чи: 1) 21:3=7 (кг)

1. 7 x8=56 (кг)

**Помилкові** розв’язання:

I *варіант*

21—8=13 (кг)

II *варіант*

1) 21:3=7 (кг)

2) 7+8=15 (кг)

III *варіант* 21 + 8=29 (кг)

IV *варіант*

1) 21—3=18 (кг)

2) 18+8=26 (кг)

Учні III класу погано справилися з наступною задачею: «У майстерні було 240 м ситцю. Коли зшили кілька платтів, витрачаючи на кожне по 3 м, в майстерні залишилося 90 м ситцю. Скільки платтів зшили?»

**Правильні** розв’язання:

(240—90):3=50 (пл.) чи:

1) 240—90=150 (м)

2) 150:3 =50 (пл.)

**Помилкові** розв’язання:

I *варіант*

1) 240 *x* 3=720 (м)

2) 720:90=8 (пл.)

II *варіант*

1. 240:3=80 (м)
2. 90—80=10 (пл.)

III *варіант*

1) 240:3=80 (пл.)

2) 90:3=30 (пл.)

3) 80+30=110 (пл.)

Розглянуті помилки свідчать про те, що учні, що не справилися з розв’язанням задач, не змогли уявити собі життєвої ситуації, про яку йдеться в задачі, не усвідомили зв’язок між величинами в ній, залежності між даними і шуканим, а тому просто механічно маніпулювали числами.

Чому ж учні допустили так багато помилок навіть при повторному розв’язанні знайомих задач? Аналіз результатів проведеної роботи, бесіди з вчителями й учнями дозволяють зробити висновок про те, що одна з основних причин помилок, що допускаються дітьми, у розв’язанні текстових задач — неправильна організація первинного сприйняття учнями умови задачі і її аналізу, що проводяться без належної опори на життєву ситуацію, відбиту в задачі, без її предметного чи графічного моделювання. Як правило, у процесі аналізу використовуються лише різні види короткого запису умови чи задачі готові схеми, а створення моделі на очах у чи дітей самими дітьми в процесі розбору задачі застосовується вкрай рідко. До того ж при фронтальному аналізі і розв’язанні задачі вчителі нерідко обмежуються правильними відповідями двох-трьох учнів, а інші записують за ними готові розв’язання без глибокого їхнього розуміння.

Для усунення відзначених недоліків необхідно насамперед рішуче поліпшити методику організації первинного сприйняття й аналізу задачі, щоб забезпечити усвідомлений і доказовий вибір арифметичної дії всіма учнями. Головне для кожного учня на цьому етапі — зрозуміти задачу, тобто усвідомити, про що ця задача, що в ній відомо, що потрібно довідатися, як зв'язані між собою дані, які відносини між даними і шуканими і т.п. Для цього необхідно з I класу учити дітей розбивати текст задачі на частини і моделювати ситуації, відбиті в задачі.

Що ж розуміється під моделюванням умови задачі?

Моделювання в широкому змісті слова — це заміна дій з реальними предметами діями з їхніми зменшеними зразками, моделями, муляжами, макетами, а також з їхніми графічними замінниками: малюнками, кресленнями, схемами і т.п. При цьому малюнки можуть зображувати реальні предмети (людей, тварин, рослини, машини і т.п.) чи ж бути умовними, схематичними, тобто зображувати реальні предмети умовно, у виді різних фігур: квадратів, кружків, прямокутників і т.п.

Креслення являє собою також умовне зображення предметів, взаємозв'язків між ними і взаємини величин за допомогою відрізків і з дотриманням визначеного масштабу.

Креслення, на якому взаємозв'язки і взаємини передаються приблизно, без точного дотримання масштабу, називається схематичним *кресленням,* чи *схемою.*

Предметне і графічне моделювання математичної ситуації при розв’язанні текстових задач давно застосовується в шкільній практиці, але без належної системи і послідовності, що під неправильним розумінням ролі наочності в навчанні і розвитку учнів. Дотепер багато вчителів неправильно думають, що наочність обов'язково повинна бути тільки на початковому етапі навчання, а з розвитком абстрактного мислення в дітей вона своє значення втрачає. Звідси в II—III класах основним засобом наочності при аналізі задач стає короткий запис умови задачі і лише зрідка застосовуються готові схеми і таблиці. А тим часом наочність, особливо графічна, потрібна на всьому протязі навчання як важливий засіб розвитку більш складних форм конкретного мислення і формування математичних понять. Як відзначає Л. Ш. Левенберг, «малюнки, схеми і креслення не тільки допомагають учнем у свідомому виявленні схованих залежностей між величинами, але і спонукують активно мислити, шукати найбільш раціональні шляхи розв’язання задач, допомагають не тільки засвоювати знання, але й опановувати умінням застосовувати їхній» .

Так, у II класі, вперше аналізуючи задачу, помилкові розв’язання якої ми розглянули: «У перший день для ремонту школи привезли 28 колод, а в другий день привезли на 4 машинах по 10 колод. Скільки усього колод привезли за ці два дні?», звичайно записують її коротко в такому виді:

I д. - 28 к.

 ?

 II д. - на 4 маш. по 10 к.

Така модель не відбиває життєвої ситуації з достатньою наочністю, що і приводить до помилок у розв’язанні задачі. Тому необхідно змоделювати її умова у виді схематичного малюнка:

І д. - 28 к.

?

ІІд. – 10 к. 10 к. 10 к. 10 к.

Така модель відбиває математичну ситуацію більш наочно. По такій моделі навіть слабкий учень зможе записати розв’язання, якщо не так:

28+10 x4=68 (к.), те хоча б так:

1) 10+10+10+10=40 (к.)

2) 28+40=68 (к.)

і викликатиме менше труднощів при повторному розв’язанні цієї чи подібної задач.

Розглянемо другу задачу: «У радгоспі працюють 37 трактористів, шоферів на 8 більше, ніж трактористів, а комбайнерів на 5 менше, ніж шоферів. Скільки комбайнерів працює в радгоспі?» Звичайний короткий запис цієї задачі виглядає так:

Т.—\_37 ч.

Ш.— на 8 більше, ніж трактористів

К.— ? — на 5 менше, ніж шоферів

Такий запис при первинному аналізі цієї задачі нераціональний, тому що не розкриває наочно взаємини величин і не допомагає у виборі дій.

Така модель дає наочне представлення про зв’язок між даними і шуканим у задачі. Аналізуючи задачу, діти з'ясовують, що шоферів на 8 більше, ніж трактористів, тобто їх стільки ж так ще 8. Тому відрізок на схемі, що зображує чисельність шоферів, вони накреслять більшої довжини, чим відрізок, що зображує чисельність трактористів. А тому що чисельність комбайнерів на 5 менше, ніж шоферів, тобто їх стільки ж, але без 5, те і відрізок, що показує чисельність комбайнерів, повинний бути менше відрізка, що показує чисельність шоферів. При такім моделюванні вибір дій буде зрозумілий і обґрунтований, учні не будуть діяти навмання, механічно маніпулюючи числами.

Розглянемо задачу з пропорційними величинами, що викликала великі труднощі в другокласників: «У трьох однакових ящиківах 21 кг апельсинів. Скільки кілограмів апельсинів у 8 таких ящиківах?» Звичайна умова цієї задачі відразу записують у таблицю:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Маса одного ящика | Кількість ящиків | Загальнамаса |
| Однакова | 3 | 21 |
| 8 | ? |

Таблиця — це теж модель задачі, але більш абстрактна, ніж схематичний малюнок чи креслення. Вона допомагає учням краще усвідомити знання взаємозалежностей пропорційних величин, тому що сама таблиця цих взаємозалежностей не показує. Тому при початковому ознайомленні з такою задачею таблиця мало допомагає уявити математичну ситуацію і вибрати потрібну дію. При початковому знайомстві з цією задачею доцільніше змоделювати її умова по-іншому, у виді схематичного малюнка чи креслення.

 21 кг

?

По такій моделі шлях розв’язання задачі став би більш зрозумілим для всіх учнів: щоб довідатися, скільки кілограмів апельсинів у 8 ящиках, потрібно знати, скільки кілограмів апельсинів в одному ящику.

Коли зшили кілька платтів, витрачаючи на кожне по 3 м, в майстерні залишилося 90 м ситцю. Скільки платтів зшили?» Очевидно при первинному аналізі цієї задачі не використовувалося графічне моделювання, що могло б являти собою, наприклад, таку схему.

Така схема зробила би вибір дії більш зрозумілим для кожного учня.

Особливо велику роль відіграє моделювання при розв’язанні задач на рух. При цьому модель повинні створювати самі учні під керівництвом учителя.

Задача: «Із двох міст, що знаходяться на відстані 520 км, одночасно вийшли назустріч один одному два потяги, що зустрілися через 4 год. Один потяг рухався зі швидкістю 60 км/год. З якою швидкістю рухався другий потяг?» Вчитель у розмові з учнями з'ясовує, про який рух говориться в задачі, що про цей рух відомо, і пропонує накреслити схему руху. Викликаний учень, повторюючи зміст задачі, моделює описану в ній життєву ситуацію. Відстань між містами він зображує у виді відрізка. Напрямок зустрічного руху показує стрілками, а місце зустрічі позначає прапорцем. На питання вчителя, як позначити на схемі, що потяги зустрілися через 4 год, учень відзначає число годин руху кожного потяга вертикальними штрихами на схемі, а також позначає цифрами відстань між містами і швидкість руху першого потяга. Схема здобуває вид.

Розв’язання задачі дітям було запропоновано записати самостійно чи виразом по діях і пояснити вибір дії. Усі справилися з розв’язанням задачі самостійно. Учні розв’язали задачу двома способами і записали такі вирази: (520—60 *🞌* 4):4, 520:4—60.

Таке моделювання, коли модель виникає на очах у дітей, має явну перевагу перед застосуванням готових малюнків і схем.

На графічне моделювання не слід шкодувати часу на уроці. Це з лишком окупиться в процесі розв’язання задачі. І навпаки, відсутність графічної моделі може привести до неправильного розв’язання задачі. Так, в одному класі розглядалася задача: «З пачки взяли 18 зошитів, після чого в пачці залишилося в 2 рази менше зошитів, ніж було. Скільки зошитів було в пачці спочатку?» Вчитель обмежився коротким записом задачі:

Узяли — 18 з.

Залишилося — у 2 рази менше

Було — ?

Потім пішло колективне розв’язання: 18:2+18=27 (з.), що невірно.

Вчитель і учні не звернули уваги на те, що в пачці залишилося в 2 рази менше, ніж було, а не чим узяли. А якби при аналізі задачі була зроблена графічна модель, те помилки не відбулося б, тому що на схемі було б видно, що залишилася половина того, що було. Виходить, у пачці було 18 *x* 2=36 (з.)

Взяли 18 з. Залишилосяв 2 рази менше,

 ніж було

було

Таким чином, щоб діти краще уявляли собі життєву ситуацію, розкриту в задачі, легше встановлювати залежності між величинами, а вибір дії ставав для них усвідомленим, необхідно систематично навчати дітей моделюванню, починаючи з повного предметного зображення числового взаємини величин з демонстрацією самої дії задачі. Потім варто переходити до більш узагальненого умовно-предметного і графічного моделювання, до короткого запису задачі з використанням створюваного на очах у дітей і самих дітей креслення, схеми, після чого можна переходити до більш високого ступеня абстракції з застосуванням готових узагальнених опорних схем і таблиць.

Систематичне використання предметного і графічного моделювання забезпечить більш якісний аналіз задачі, усвідомлений і обґрунтований вибір необхідної арифметичної дії і попередить багато помилок у рішенні задач учнями.