***Пошукова робота на тему:***

*Поняття множини. Змінні та постійні величини. Функція, область визначення. Лінії та поверхні рівня. Способи задання. Графіки, їх перетворення. Основні елементарні функції та їх графіки. Поняття неявної, складної та оберненої функції.*

**План**

* Поняття множини.
* Множина дійсних чисел.
* Змінні та постійні величини.
* Функція однієї  та декількох змінних   , область визначення.
* Способи задання.
* Основні елементарні функції та їх графіки.
* Поняття неявної, складної та оберненої функцій

**ВСТУП ДО АНАЛІЗУ**

**1. Поняття  множин**

Множина – одне з найпростіших (первісних) математичних понять, яке не можна означити через інші, ще простіші поняття. Його можна пояснити тільки за допомогою рівнозначних понять або на окремих прикладах.

Під множиною розуміють сукупність об’єктів об’єднаних в цю сукупність за певними ознаками. Наприклад, можна говорити про множину студентів даного курсу, множину чисел у натуральному ряді, множину сторінок у книжці тощо.

Множини позначають великими буквами латинського і грецького алфавітів. Об’єкти, що входять до складу множини, називають її елементами і позначають малими буквами алфавіту. Задати множину – це означає задати характеристику її елементів, за допомогою якої про будь-який об’єкт можна встановити, належить він цій множині чи ні. Так множину студентів даного курсу задають списком. Множина парних чисел характеризується тим, що кожний її елемент ділиться на число 2.

Якщо - множина, - її елемент, то це символічно записують:  і читають: “належить ”.

Символічний запис  означає, що не належить

Якщо через  позначено будь-який елемент множини, то записують:

                                          .

Нехай маємо дві множини і . Якщо кожний елемент множини належить і множині , то називається підмножиною множини Цей факт записують так:

                             ,  або

 і читають: “міститься в ”, або “містить в собі ”. Наприклад, кожний елемент множини, елементами якої є парні додатні числа, належить також і множині натуральних чисел.

        Якщо кожний елемент множини належить і множині і , навпаки, кожний елемент множини належить множині то множини та називаються рівними :

Якщо множина містить безліч елементів, то її називають нескінченною, у противному разі – скінченою.

Якщо у множині немає жодного елемента , то її називають порожньою і позначають символом .

Для множини введемо такі операції.

Об’єднання множин. Нехай маємо дві множини і . Тоді множинуяка містить у собі всі елементи множин та  і не містить ніяких інших елементів, називають об’єднанням (сумою) множин та і записують:

Якщо задано множини , де може пробігати  як  скінчену, так і нескінченну множину значень, то об’єднання позначають так:

Переріз множин.Нехай маємо дві множини і   Тоді  множину , яка містить всі спільні елементи множин  і і не містить ніяких інших елементів, називають перерізом /добутком/ множин та і записують:

       Якщо ми маємо деякі множини , то переріз цих множин позначають так:

.

Різниця множин. Нехай маємо дві множини і . Тоді множину , що містить у собі всі ті елементи множини , які не належать множині , і не містить ніяких інших елементів , називаються різницею  множин та і записують :

**2.  Множина дійсних чисел**

Множина дійсних чисел складається з раціональних та ірраціональних чисел.

Цілі та дробові числа як додатні, так і від’ємні, а також число нуль називаються раціональними числами. Кожне раціональне число можна зобразити у вигляді нескоротного дробу (- будь-які

натуральні числа, Числа, виражені нескінченними

неперіодичними десятковими дробами, називаються  ірраціональними: сукупність раціональних та ірраціональних чисел – множиною дійсних чисел.

Основні властивості множини дійсних чисел відомі із шкільного курсу математики. Зупинимось докладніше на понятті абсолютної величини (модуля) дійсного числа.

Означення.Модулем дійсного числа називається число, якщо і протилежне йому число якщо

  Модуль числа позначається символом  і за означенням

З геометричної точки зору модуль числа означає відстань від точки числової осі з абсцисою  до точки відліку 0. На основі геометричного змісту модуля дійсного числа можна довести такі властивості:

1)

2)  якщо то

3) якщо то або або

Сформулюємо ряд теорем, що виражають властивості модуля дійсного числа.

Теорема 1. Модуль суми скінченого числа дійсних чисел  не перевищує суми модулів цих чисел:

Теорема 2.Модуль різниці не менший за різницю модулів зменшуваного і від’ємника, тобто

Теорема  3.Модуль добутку скінченого числа співмножників дорівнює добутку модулів цих співмножників:



Теорема 4.Модуль частки дорівнює частці від ділення модуля діленого на модуль дільника:

 якщо

**3.  Найпростіші множини дійсних чисел**

Дамо означення найпростіших числових множин.

Між множиною дійсних чисел і множиною точок числової осі існує взаємно однозначна  відповідність. Тому в математичному аналізі часто користуються множинами точок, розміщених на числовій осі.

10. Множина всіх дійсних чисел (всіх точок числової осі), які задовольняють нерівності



де і - довільні точки числової осі. Таку множину називають відрізком, або сегментом, і позначають символом

Часто замість нерівностей пишуть  і читають :

 “належить відрізку ”. Точку при цьому називають лівим, а точку - правим кінцем відрізка

20. Множина всіх дійсних чисел (всіх точок числової осі), які задовольняють нерівності



Таку множину називають проміжком, або інтервалом, і позначають символом Точки і при цьому називають відповідно лівим і правим кінцем інтервалу. Замість нерівностей пишуть і читають :”належить інтервалу ”.

Інтервал відрізняється від відрізка тим, що кінці інтервалу не належать. Число називається довжиною як відрізкатак і інтервалу

            30. Множина точок числової осі, які задовольняють нерівності:



Такі множини точок називаються відповідно півінтервалом і піввідрізком і позначають

Зауважимо, що інтервали, півінтервали і піввідрізки можуть

бути й нескінченними і означати:

а) нескінченний інтервал - множину всіх значень  що задовольняють нерівності

б) піввідрізки  - множини всіх значень що задовольняють нерівності



Нехай - довільне дійсне число. Тоді інтервал де - будь-яке дійсне число, називається - *околом* точки. Точка, що лежить всередині цього інтервалу, називається центром околу, а число - радіусом околу, тобто - окіл числа - це множина всіх дійсних чисел які задовольняють нерівності , або



**5.2. Функції**

**5.2.1.Функція. Область визначення і множина значень функції**

            У природі та різних науках про природу зустрічаються величини, які при даних умовах або навіть за будь-яких умов: мають одне й те саме значення. Такі величини називають сталими. Якщо значення величини змінюється, то таку величину називають змінною.

            Означення. Змінна величина     називається *функцією* незалежних змінних якщо кожній сукупності значень змінних  із деякої області відповідає одне певне значення величини із множини .

            Область називається *областю визначення*, або областю існування функції , а множина  всіх числових значень, прийнятих в області визначення, називається областю значень, або областю зміни функції .

            У загальному випадку для позначення функціональної залежності вживається символ  або

            Нехай  Сукупність чисел  будемо тлумачити як координати точки тобто

При зміні значень  точка буде переміщуватися в області існування причому кожному її положенню відповідає певне числове значення функції Ось чому функцію  ще називають функцією точки і позначають таким самим символом,

            В дальшому будемо детально вивчати лише випадки і Цього достатньо, щоб розглянути, що є спільного між функціями  і  та що нового виникає при переході від функції однієї змінної до функцій багатьох змінних.

            Функцію можна задавати різними способами, і ніяких обмежень на форму не накладається. Ми лише назвемо ці способи: аналітичний, словесний, графічний, табличний і програмний.

            Зауваження 1. В означенні поняття функції кожному значенню відповідає одне значення У цьому випадку функцію називають однозначною (на відміну від багатозначної функції, для якої відповідає не одна, а кілька, навіть нескінченна множина значень ). Надалі, якщо не буде оговорено окремо, під функцією розумітимемо однозначну функцію.

            Зауваження 2.Областю в - мірному просторі називається множина точок цього простору, яка має такі дві властивості: кожна точка  що належить   є  внутрішньою  точкою (тобто входить в разом із деяким своїм околом); будь-які дві точки і  що належить можна з’єднати неперервною лінією, що належить

            Назвемо точку граничною для області якщо в будь-якому околі цієї точки містяться точки, які належать і не належать

            Сукупність всіх граничних точок називається границею області Якщо додати до області її границю, одержимо замкнену область

            Назвемо діаметром область /відкритої чи замкненої/ точно верхню границю взаємних віддалей будь-яких пар точок, що належать області.

            Приклади  .

            1. Множина точок  координати яких незалежно одна від другої задовольняють нерівності



називається (- мірним) „прямокутним паралелепіпедом”.

            Зокрема,

            1) при  така множина точок  є  відрізок ;

            2) при така множина точок

є  прямокутник ;

            3) при така множина точок

є  паралелепіпед;

            Якщо у наведених співвідношеннях виключити рівність

то цим означається відкритий „прямокутний паралелепіпед”

            Околом точки  називається будь-який відкритий „паралелепіпед”

 з центром у точці .

            2. Розглянемо множину точок , означену нерівністю

            (або ),

якщо  є стала „точка”, а - стале додатне число. Така множина утворює замкнену (або відкриту) - вимірну сферу радіуса  із центром у точці . Зокрема,

1)      при  множина точок  є відрізок;

2)      при  множина точок  є круг;

3)      при  множина точок  є сфера.

Відкриту сферу будь-якого радіуса  , із центром у точці також розглядаємо як окіл цієї точки.

**Геометричне тлумачення функції.**

            1. Графік функції . Нехай в деякому проміжку   задана функція . Розглянемо пару відповідних значень  і , де , а ; образом цієї пари на площині  є точка  . Коли  змінюється, точка описує деяку криву, яка є геометричним образом функції. За цих умов рівняння  називають рівнянням кривої.

            Означення.  Графіком функції  називається множина точок координатної площини, абсцисами яких є допустимі значення аргументу, а ординатами – відповідні їм значення функції.

            2. Геометричне зображення функції . Нехай дана функція, означена у деякій області площини (рис.5.1). Тоді кожній парі  відповідає за формулою  деяке значення . Інакше, кожній точці  ставиться у відповідність точка , що є кінцем перпендикуляра до площини .

           Якщо точка  займе всі можливі положення в області , то пов’язана з нею точка у загальному випадку опише в просторі деяку поверхню . Отже, геометричним зображенням (графіком) функції двох змінних  є, в загальному випадку, поверхня в просторі

            Геометричне зображення функції трьох і більшого числа  змінних не має простого геометричного змісту. В окремих випадках можна отримати наочне геометричне представлення про характер зміни функції, розглядаючи її лінії рівня (або поверхні рівня), тобто лінії (або поверхні), де дана функція зберігає стале значення.

            Означення. Лінією рівня функції

називається множина всіх точок площини , для яких дана функція має одне і те саме значення (і зокрема). Отже, рівняння лінії рівня є рівняння        , де - довільна стала.

                          Рис.5.1                            Рис.5.2

            Приклад.        На рис.5.2 зображені лінії рівня функції . Надаючи невід’ємні значення   (не може бути від’ємним), одержимо відповідно лінії рівня функції: - точка - коло радіуса  з центром

- коло радіуса   з центром  тощо.

            Означення.  Поверхнею рівня функції             називається множина всіх точок простору  для яких ця функція має одне і те саме значення (ізоповерхні).

            Лінії і поверхні рівня постійно зустрічаються на практиці. Наприклад, з’єднавши на карті поверхні Землі точки з однаковою середньою температурою або з однаковим середньодобовим тиском, матимемо відповідно ізотерми та ізобари.

**5.2.2. Елементарні функції та їх класифікація**

            **Показникова функція** (рис.5.3).

Функція означена в інтервалі   і неперервна в кожній точці цього інтервалу.         При функція зростає; при - спадає. Областю зміни показникової функції є інтервал .

            **Логарифмічна функція**    (рис.5.4).

Функція означена в інтервалі  і неперервна в кожній точці цього інтервалу. При функція зростає; при - спадає.

Область зміни логарифмічної функції складає множина всіх дійсних чисел.

            **Степенева функція**   (рис.5.5, 5.6).

Якщо відносно  відомо лише, що це деяке дійсне число, то можна говорити про значення  тільки для . Тому в загальному випадку областю означення степеневої функції вважають інтервал . Якщото    означена і в точці  , де приймає значення . При зростанні степенева функція  зростає, якщо і спадає, якщо .  Значення у степеневої функції заповнюють інтервал .           Якщо число  - ціле або дробове з непарним знаменником, то степенева функція  при  означена для всіх , а при - для всіх , крім .

            **Тригонометричні функції** (рис.5.7, 5.8, 5.9, 5.10).

Функції   і   мають областю визначення всі

значення змінної . Множиною значень кожної з цих функцій є

відрізок .

            Функція  означена для всіх значень , крім  . Множина значень: .

            Функція  означена для всіх значень , крім  . Множина значень: .

            **Обернені тригонометричні функції**  (рис.5.11, 5.12, 5.13, 5.14).

- нескінченнозначна функція, обернена для функції . Область означення:  ; область зміни . Якщо кожному значенню   покласти у відповідність значення  нескінченнозначної функції ,  що задовольняє умовам , одержимо однозначну функцію, яку будемо позначати  і називати головним значенням функції .

            Функція - нескінченнозначна, обернена для функції . Область означення: ; область зміни: .            Якщо кожному значенню ,  покласти у відповідність значення нескінченнозначної функції , що задовольняє умовам , одержимо однозначно функцію, яку будемо позначати  і називати головним значенням функції .

Функції  і - нескінченнозначні, обернені відповідно для функцій  і . Області означення: ; області  зміни: , крім відповідно

  і   .

                       Рис.5.3                                             Рис.5.4

                     Рис.5.5                                     Рис.5.6

     Рис.5.7                                     Рис.5.8

              Рис.5.9                             Рис.5.10

                Рис.5.11                           Рис.5.12

            Рис.5.13                     Рис.5.14

Якщо кожному значенню , , поставити у відповідність значення  функції , що задовольняють нерівностям   , то одержимо функцію, яку назвемо головним значенням багатозначної функції   і  будемо позначати .

**Окремі класи функцій.**

            Нехай функцію задано на деякому проміжку

*Монотонні функції.* Якщо для кожної пари точок при виконується нерівності:

1) то функція називається зростаючою на проміжку

2) то функція  називається неспадною на проміжку

3) то функція називається спадною на проміжку

4) то функція називається не зростаючою на проміжку

Зростаючі, неспадні, спадні та незростаючі функції називаються монотонними.

Приклад.

1.

Якщо то тому функція є зростаючою в інтервалі

2.  . Якщо  то  Тому функція  є спадна в інтервалі .

*Парні та непарні функції.*    Нехай функція  задана на проміжку , який є симетричним відносно початку координат. Це може бути:

Функція  на проміжку  називається:

1) парною, якщо  справджується рівність

2) непарною, якщо  справджується рівність

Зауваження.   Графік парної функції  симетричний відносно осі ординат, а графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

*Періодичні функції.*  Функція ,

називається періодичною, якщо існує число , таке, що   справджується рівність

.

Число  при цьому називається періодом функції .

**5.3. Поняття неявної, складної та оберненої функції**

**5.3.1. Неявна функція**

            Функція  від аргументу  називається *неявною,* якщо вона задана рівнянням

                                                                              (5.1)

Можливі випадки:

1)      рівняння (5.1) не задовольняється жодною парою чисел

, тому вона не задає ніякої функції;

2) рівняння (5.1) задовольняється лише однією парою чисел

(), тому воно не задає ніякої залежності;

3) рівняння (5.1)  задовольняється різними парами чисел

, тому воно задає змінну  як функцію від : .

Множина значень , для кожного з яких , є областю визначення неявної функції . Наприклад,  рівняння задає двозначну функцію :

;  .

            Нехай тепер маємо рівняння

                                  ,                              (5.2)

що зв’язує значення трьох змінних. Розглянемо множину тих пар чисел , для яких існує значення , що разом з  і рівняння (5.2) перетворює на тотожність.

            Якщо кожній парі чисел  із вказаної множини поставити у відповідність значення , одержимо однозначну або багатозначну функцію двох змінних: , яку будемо називати неявно заданою рівнянням (5.2) або неявною функцією.

Розглянемо рівняння , яке зв’язує значення  змінних, за аналогією із викладеним, можна ввести

поняття неявної функції від  змінної.

5.3.2. **Складна функція**

            Розглянемо спочатку функції однієї змінної.

            Нехай задані дві функції   і  , при цьому множина значень першої функції входить в область означення другої. Тоді кожному значенню  із області визначення функції  відповідає певне значення змінної , а значенню  функція  ставить у відповідність певне значення змінної , тобто змінна є функцією :   .

            Одержана функція від функції називається *складною* функцією змінної . Функція - внутрішня, а функція - зовнішня.  Наприклад:

            Розглянемо функції багатьох змінних. Тут ми маємо два напрямки.

1. Нехай - функція багатьох змінних , кожна з яких є функцією незалежної змінної : . Тоді функція

складна функція незалежної змінної .

            Наприклад:

є складна функція незалежної змінної .

2. Нехай - функція багатьох змінних , аргументи якої, в свою чергу, залежать від двох або більшого числа змінних:

            .

Тоді функція

буде складною функцією незалежних змінних .

Наприклад: .

5.3.3. **Поняття оберненої функції**

Нехай функція  визначена в деякій області . Візьмемо будь-яке значення

            Нехай функція  визначена в деякій області . Візьмемо будь-яке значення  із множини значень цієї функції . В області означення функції знайдеться одне або декілька значень аргументу  таких, що . Поставимо у відповідність  всі ці значення . При цьому кожному значенню змінної  ставиться у відповідність одне або декілька значень . А це означає, що на множині   задається однозначна або багатозначна функція . Вона називається оберненою до функції . Областю. визначення оберненої функції є область зміни даної функції.

            Приклади.

                        1.

            Функція  є однозначною оберненою функцією для функції  (рис.5.15).

            :

            2. :

 таких, що . Тому функція :

обернена для функції , буде двозначною (рис.5.16).

                  Рис.5.15                                       Рис.5.16

            Розглянемо питання про графік оберненої функції. Функція  та її обернена функція  виражають один і той самий зв’язок між змінними  і , лише у першому випадку розглядаємо як аргумент, - як функцію, а в другому випадку – навпаки. Тому графік оберненої функції  співпадає з графіком функції  (рис.5.17).

            Якщо в оберненої функції, як і в заданій, аргумент позначити через , а значення функції - через , то вона запишеться так: .

                Рис.5.17                                    Рис.5.18

            Функції ,   різняться лише позначенням змінних. Тому, щоб з графіка функції  або, що те саме, функції  одержати графік функції , достатньо поміняти ролями всі  і  , тобто повернути площину рисунка навколо бісектриси першого координатного кута на 1800. Звідси графік   відносно бісектриси першого координатного кута (рис.5.18).

