**Кремер Н.Ш.**

***Теория вероятностей***

***Примеры решений типовых задач***

***и задания для студентов*1 ГЛАВА**

**Основные понятия и теоремы теории вероятностей**

В главе рассматриваются:

* классификация событий;
* классическое, статистическое и геометрическое определения вероятности;
* непосредственное вычисление вероятностей;
* действия над событиями;
* теоремы сложения и умножения вероятностей;
* формула Байеса.

**Типовые задачи**

**Пример 1.1**

Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. Найти вероятность того, что студентом будут сданы:

а) только 2-й экзамен;

б) только один экзамен;

в) три экзамена;

г) по крайней мере два экзамена;

д) хотя бы один экзамен.

**Решение**

а) Обозначим события: *Ai –* студент сдаст *i*-йэкзамен (*i* = 1, 2, 3);

 *В* – студент сдаст только 2-й экзамен из трех.

Очевидно, что *В = ,* т.е. совместное осуществление трех событий, состоящих в том, что студент сдаст 2-й экзамен и не сдаст 1-й и 3-й экзамены. Учитывая, что события *A1, А2, А3* независимы, получим

б) Пусть событие *С* – студент сдаст один экзамен из трех. Очевидно, событие *С* произойдет, если студент сдаст только 1-й экзамен из трех, или только 2-й, или только 3-й, т.е.

в) Пусть событие *D* – студент сдаст все три экзамена, т.е. *D = A1A2A3*. Тогда

**

г) Пусть событие *Е –* студент сдаст по крайней мере два экзамена (иначе: «хотя бы два» экзамена или «не менее двух» экзаменов). Очевидно, что событие *Е* означает сдачу любых двух экзаменов из трех либо всех трех экзаменов, т.е.

и

**

д) Пусть событие *F –* студент сдал хотя бы один экзамен (иначе: «не менее одного» экзамена). Очевидно, событие *F* представляет сумму событий *С* (включающего три варианта) и *Е* (четыре варианта), т.е. *F = А1 + А2 + А3 = С + Е* (семь вариантов). Однако проще найти вероятность события *F,* если перейти к противоположному событию, включающему всего один вариант – *F =* **, т.е. применить формулу (1.27).

Итак,

**

т.е. сдача хотя бы одного экзамена из трех является событием практически достоверным.

**Пример 1.2**

Причиной разрыва электрической цепи служит выход из строя элемента *К1* или одновременный выход из строя двух элементов – *К2* и *К3.* Элементы могут выйти из строя независимо друг от друга с вероятностями, равными соответственно 0,1; 0,2; 0,3. Какова вероятность разрыва электрической цепи?

**Решение**

Обозначим события: *Ai -* выход из строя элемента *Ki (i -* 1, 2, 3…);

 *B* – разрыв электрической цепи.

Очевидно, по условию событие *B* произойдет, если произой­дет либо событие *А1,* либо A2A3,т.е. B *= А1 + А2А3.* Теперь, по формуле (1.25)





(при использовании теоремы умножения учли независимость событий *A1, A2* и А3).

**Пример 1.3**

Производительности трех станков, обрабатывающих одинаковые детали, относятся как 1:3:6. Из нерассортированной партии обработанных деталей взяты наудачу две. Какова вероятность того, что: а) одна из них обработана на 3-м станке;

 б) обе обработаны на одном станке?

**Решение**

а) Обозначим события: *Ai –* деталь обработана на *i*-мстанке (*i* = 1, 2, 3);

 *В* – одна из двух взятых деталей обработана на 3-м станке.

По условию *,* , .

Очевидно, что *B=A1A3+A2A3+A3A1+A3A2* (при этом надо учесть, что либо первая деталь обработана на 3-м станке, либо вторая). По теоремам сложения и умножения (для независимых событий)



б) Пусть событие *С* – обе отобранные детали обработаны на одном станке. Тогда

*C=A1A1+A2A2+A3A3* и P(C) = 0,1\*0,1 + 0,3\*0,3 + 0,6\*0,6 = 0,46.

**Пример 1.4**

Экзаменационный билет для письменного экзамена состоит из 10 вопросов – по 2 вопроса из 20 по каждой из пяти тем, представленных в билете. По каждой теме студент подготовил лишь половину всех вопросов. Какова вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить хотя бы на один вопрос по каждой из пяти тем в билете?

**Решение**

Обозначим события: *А1, А2 –* студент подготовил 1-й, 2-й вопросы билета по каждой теме;

*Bi* – студент подготовил хотя бы один вопрос билета из двух по *i*-й теме (*i* = 1, 2, ..., 5);

*С* – студент сдал экзамен.

В силу условия *С = В1В2В3В4B5.* Полагая ответы студента по разным темам независимыми, по теореме умножения вероятностей (1.24)

**

Так как вероятности *Р(Вi)* (*i*=1,2,..., 5) равны, то P(C)= *(Р(Вi))5.* Вероятность *Р(Вi)* можно найти по формуле (1.27) (или (1.25)):

**

Теперь P(C) = 0,7635 = 0,259

**Пример 1.5**

При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что:

а) двигатель начнет работать при третьем включении зажигания;

б) для запуска двигателя придется включать зажигание не более трех раз.

**Решение**

а) Обозначим события: *А* – двигатель начнет работать при каждом включении зажи­гания;

 *В* – то же при третьем включении зажигания.

Очевидно, что *В=* и *Р(В) = * = 0,4\*0,4\*0,6 = 0,096.

б) Пусть событие *С* – для запуска двигателя придется вклю­чать зажигание не более трех раз. Очевидно, событие *С* наступит, если двигатель начнет работать при 1-м включении, или при 2-м, или при 3-м включении, т.е. *С* = *А + АА + А АА.* Следовательно,

**

**Пример 1.6**

Среди билетов денежно-вещевой лотереи половина выигрышных. Сколько лотерейных билетов нужно купить, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,999, быть уверенным в выигрыше хотя бы по одному билету?

**Решение**

Пусть вероятность события A*i* – выигрыша по *i*-мy билету равна *р,* т.е. *P(Ai)* = *р.* Тогда вероятность выигрыша хотя бы по одному из *п* приобретенных билетов, т.е. вероят­ность суммы независимых событий *A1,A2,...,Ai,...,An* определится по формуле (1.29):

P(A1+A2+…+An) = 1-(1-p)n

По условию 1-(1-p)n ≥ R , где R = 0,999, откуда

(1 - p)n  ≤ 1 – R

Логарифмируя обе части неравенства, имеем

*n*lg(1 - p) ≤ lg(1 - R)

Учитывая, что lg(1 - p) – величина отрицательная, получим

 (1.30)

По условию р = 0,5, R = 0,999. По формуле (1.30)

,

т.е. n ≥ 10 и необходимо купить не менее 10 лотерейных билетов.

(Задачу можно решить, не прибегая к логарифмированию, путем подбора целого числа n, при котором выполняется неравенство (1 - p)n  ≤ 1 – R , т.е. в данном случае ; так, еще при n = 9 =, а уже при n = 10 =, т.е. n ≥ 10).

**Пример 1.7**

Два игрока поочередно бросают игральную кость. Выигрывает тот, у которого первым выпадет «6 очков». Какова вероятность выигрыша для игрока, бросающего игральную кость первым? Вторым?

**Решение**

Обозначим события: *Ai –* выпадение 6 очков при *i-*мбросании игральной кости (*i*=1,2,...);

*В –* выигрыш игры игроком, бросающим игральную кость первым.

Имеем P(Ai) = , при любом i.

Событие *В* можно представить в виде суммы вариантов:



Поэтому



По формуле суммы геометрического ряда с первым членом *a =*  и знаменателем q = 

Вероятность выигрыша игры игроком, бросающим игральную кость вторым, равна

,

т.е. существенно меньше, чем игроком, бросающим игральную кость первым.

**Пример 1.8**

Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле для 1-го стрелка равна 0,7, а для 2-го – 0,8. Оба они делают по одному выстрелу по мишени, а затем каждый из стрелков стреляет еще раз, если при первом сделанном им выстреле он промахнулся. Найти вероятность того, что в мишени ровно 2 пробоины.

**Решение**

Пусть события: *Ai, Bi* – попадание в цель соответственно 1-м 2-м стрелком при *i*-м выстреле (*i*=1,2);

*С* – в мишени ровно 2 пробоины.

Событие С произойдет, если:

1. у каждого стрелка по одному попаданию с первого раза;
2. у 1-го стрелка – попадание (при одном выстреле), у 2-го стрелка промах и попадание;
3. у 1-го стрелка – промах и попадание, у 2-го стрелка – попадание (при одном выстреле);
4. у каждого стрелка – промах и попадание после двух вы­стрелов.

Итак



Используя теоремы сложения для несовместных и умножения для независимых событий, получим





Задания

1. Слово составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Карточки смешивают и вынимают без возврата по одной. Найти вероятность того, что карточки с буквами вынимаются в порядке следования букв заданного слова:

а) «событие»;

б) «статистика».

1. Пятитомное собрание сочинений расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что книги стоят слева направо в порядке нумерации томов (от 1 до 5)?
2. Среди 25 студентов, из которых 15 девушек, разыгрываются четыре билета, причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билета окажутся:

а) четыре девушки;

б) четыре юноши;

в) три юноши и одна девушка?

1. Из 20 сбербанков 10 расположены за чертой города. Для обследования случайным образом отобрано 5 сбербанков. Какова вероятность того, что среди отобранных окажется в черте города:

а) 3 сбербанка;

б) хотя бы один?

1. Из ящика, содержащего 5 пар обуви, из которых три пары мужской, а две пары женской обуви, перекладывают наудачу 2 пары обуви в другой ящик, содержащий одинаковое количество пар женской и мужской обуви. Какова вероятность того, что во втором ящике после этого окажется одинаковое количество пар мужской и женской обуви?
2. В магазине имеются 30 телевизоров, причем 20 из них импортных. Найти вероятность того, что среди 5 проданных в течение дня телевизоров окажется не менее 3 импортных телевизоров, предполагая, что вероятности покупки телевизоров разных марок одинаковы.
3. Наудачу взятый телефонный номер состоит из 5 цифр. Какова вероятность того, что в нем все цифры:

а) различные;

б) одинаковые;

в) нечетные?

Известно, что номер телефона не начинается с цифры ноль.

1. Для проведения соревнования 16 волейбольных команд разбиты по жребию на две подгруппы (по восемь команд в каждой). Найти вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся:

а) в разных подгруппах;

б) в одной подгруппе.

1. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Зачет считается сданным, если студент ответит не менее чем на 3 из 4 поставленных в билете вопросов. Взглянув на первый вопрос билета, студент обнаружил, что он его знает. Какова вероятность того, что студент:

а) сдаст зачет;

б) не сдаст зачет?

1. У сборщика имеются 10 деталей, мало отличающихся друг от друга, из них четыре – первого, по две – второго, третьего и четвертого видов. Какова вероятность того, что среди шести взятых одновременно деталей три окажутся первого вида, два – второго и одна – третьего?
2. Найти вероятность того, что из 10 книг, расположенных в случайном порядке, 3 определенные книги окажутся рядом.
3. В старинной игре в кости необходимо было для выигрыша получить при бросании трех игральных костей сумму очков, превосходящую 10. Найти вероятности:

а) выпадения 11 очков;

б) выигрыша.

1. На фирме работают 8 аудиторов, из которых 3 – высокой квалификации, и 5 программистов, из которых 2 – высокой квалификации. В командировку надо отправить группу из 3 аудиторов и 2 программистов. Какова вероятность того, что в этой группе окажется по крайней мере 1 аудитор высокой квалификации и хотя бы 1 программист высокой квалификации, если каждый специалист имеет равные возможности поехать в командировку?
2. Два лица условились встретиться в определенном месте между 18 и 19 ч и договорились, что пришедший первым ждет другого в течение 15 мин., после чего уходит. Найти вероятность их встречи, если приход каждого в течение указанного часа может произойти в любое время и моменты прихода независимы.
3. Какова вероятность того, что наудачу брошенная в круг точка окажется внутри вписанного в него квадрата?
4. При приеме партии изделий подвергается проверке половина изделий. Условие приемки – наличие брака в выборке менее 2%. Вычислить вероятность того, что партия из 100 изделий, содержащая 5% брака, будет принята.
5. По результатам проверки контрольных работ оказалось, что в первой группе получили положительную оценку 20 студентов из 30, а во второй – 15 из 25. Найти вероятность того, что наудачу выбранная работа, имеющая положительную оценку, написана студентом первой группы.
6. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе отделение – 0,9 и в третье – 0,8. Найти вероятность следующих событий:

а) только одно отделение получит газеты вовремя;

б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

1. Прибор, работающий в течение времени *t,* состоит из трех узлов, каждый из которых независимо от других может за это время выйти из строя. Неисправность хотя бы одного узла выводит прибор из строя целиком. Вероятность безотказной работы в течение времени t первого узла равна 0,9, второго – 0,95, третьего – 0,8. Найти вероятность того, что в течение времени *t* прибор выйдет из строя.
2. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула содержится в первом, втором и третьем справочниках, равна соответственно 0,6, 0,7 и 0,8. Найти вероятность того, что эта формула содержится не менее, чем в двух справочниках.
3. Произведено три выстрела по цели из орудия. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,75; при втором – 0,8; при третьем – 0,9. Определить вероятность того, что будет:

а) три попадания;

б) хотя бы одно попадание.

1. Вероятность своевременного выполнения студентом контрольной работы по каждой из трех дисциплин равна соответственно 0,6, 0,5 и 0,8. Найти вероятность своевременного выполнения контрольной работы студентом:

а) по двум дисциплинам;

б) хотя бы по двум дисциплинам.

1. Мастер обслуживает 4 станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок в течение смены потребует внимания рабочего, равна 0,3, второй – 0,6, третий – 0,4 и четвертый – 0,25. Найти вероятность того, что в течение смены хотя бы один станок не потребует внимания мастера.
2. Контролер ОТК, проверив качество сшитых 20 пальто, установил, что 16 из них первого сорта, а остальные – второго. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу из этой партии трех пальто одно будет второго сорта.
3. Среди 20 поступающих в ремонт часов 8 нуждаются в общей чистке механизма. Какова вероятность того, что среди взятых одновременно наудачу 3 часов по крайней мере двое нуждаются в общей чистке механизма?
4. Среди 15 лампочек 4 стандартные. Одновременно берут наудачу 2 лампочки. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них нестандартная.
5. В коробке смешаны электролампы одинакового размера и формы: по 100 Вт – 7 штук, по 75 Вт – 13 штук. Вынуты наудачу 3 лампы. Какова вероятность того, что:

а) они одинаковой мощности;

б) хотя бы две из них по 100 Вт?

1. В коробке 10 красных, 3 синих и 7 желтых карандашей. Наудачу вынимают 3 карандаша. Какова вероятность того, что они все:

а) разных цветов;

б) одного цвета?

1. Брак в продукции завода вследствие дефекта *А* составляет 4%, а вследствие дефекта *В –* 3,5%. Годная продукция завода составляет 95%. Найти вероятность того что:

а) среди продукции, не обладающей дефектом *А,* встретится дефект *В;*

б) среди забракованной по признаку *А* продукции встретится дефект *В.*

1. Пакеты акций, имеющихся на рынке ценных бумаг, могут дать доход владельцу с вероятностью 0,5 (для каждого пакета). Сколько пакетов акций различных фирм нужно приобрести, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,96875, можно было ожидать доход хотя бы по одному пакету акций?
2. Сколько раз нужно провести испытание, чтобы с вероятностью, не меньшей *Р,* можно было утверждать, что по крайней мере один раз произойдет событие, вероятность которого в каждом испытании равна *P?* Дать ответ при *P* = 0,4 и *Р* = 0,8704.
3. На полке стоят 10 книг, среди которых 3 книги по теории вероятностей. Наудачу берутся три книги. Какова вероятность, что среди отобранных хотя бы одна книга по теории вероятностей?
4. На связке 5 ключей. К замку подходит только один ключ. Найти вероятность того, что потребуется не более двух попыток открыть замок, если опробованный ключ в дальнейших испытаниях не участвует.
5. В магазине продаются 10 телевизоров, 3 из них имеют дефекты. Какова вероятность того, что посетитель купит телевизор, если для выбора телевизора без дефектов понадобится не более трех попыток?
6. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2, второй – 0,3, третий – 0,4. События, состоящие в том, что данный вызов будет услышан, независимы. Найти вероятность того, что корреспондент услышит вызов радиста.
7. Страховая компания разделяет застрахованных по классам риска: I класс – малый риск, II класс – средний, III класс – большой риск. Среди этих клиентов 50% – первого класса риска, 30% – второго и 20% – третьего. Вероятность необходимости выплачивать страховое вознаграждение для первого класса риска равна 0,01, второго – 0,03, третьего – 0,08. Какова вероятность того, что:

а) застрахованный получит денежное вознаграждение за период страхования;

б) получивший денежное вознаграждение застрахованный относится к группе малого риска?

1. В данный район изделия поставляются тремя фирмами в соотношении 5:8:7. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 90%, второй – 85%, третьей – 75%. Найти вероятность того, что:

а) приобретенное изделие окажется нестандартным;

б) приобретенное изделие оказалось стандартным.

Какова вероятность того, что оно изготовлено третьей фирмой?

1. Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6, а для второго – 0,3. В мишени оказалась одна пробоина. Найти вероятность того, что она принадлежит первому стрелку.
2. Вся продукция цеха проверяется двумя контролерами, причем первый контролер проверяет 55% изделий, а второй – остальные. Вероятность того, что первый контролер пропустит нестандартное изделие, равна 0,01, второй – 0,02. Взятое наудачу изделие, маркированное как стандартное, оказалось нестандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверялось вторым контролером.
3. Вероятность изготовления изделия с браком на данном предприятии равна 0,04. Перед выпуском изделие подвергается упрощенной проверке, которая в случае бездефектного изделия пропускает его с вероятностью 0,96, а в случае изделия с дефектом – с вероятностью 0,05. Определить:

а) какая часть изготовленных изделий выходит с предприятия;

б) какова вероятность того, что изделие, выдержавшее упрощенную проверку, бракованное?

1. В одной урне 5 белых и 6 черных шаров, а в другой – 4 белых и 8 черных шаров. Из первой урны случайным образом вынимают 3 шара и опускают во вторую урну. После этого из второй урны также случайно вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что все шары, вынутые из второй урны, белые.
2. Из *п* экзаменационных билетов студент *А* подготовил только *т (т<п).* В каком случае вероятность вытащить на экзамене «хороший» для него билет выше: когда он берет наудачу билет первым, или вторым,..., или *k*-тым *(к<п)* по счету среди сдающих экзамен?
3. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут:

а) на четвертом этаже;

б) на одном и том же этаже;

в) на разных этажах.

1. Батарея, состоящая из 3 орудий, ведет огонь по группе, состоящей из 5 самолетов. Каждое орудие выбирает себе цель случайно и независимо от других. Найти вероятность того, что все орудия будут стрелять:

а) по одной и той же цели;

б) по разным целям.

1. 20 человек случайным порядком рассаживаются за столом. Найти вероятность того, что два фиксированных лица *А и В* окажутся рядом, если:

а) стол круглый;

б) стол прямоугольный, а 20 человек рассаживаются случайно вдоль одной из его сторон.

1. Имеется коробка с девятью новыми теннисными мячами. Для игры берут три мяча; после игры их кладут обратно. При выборе мячей игранные от неигранных не отличаются. Какова вероятность того, что после трех игр в коробке не останется неигранных мячей?
2. Завод выпускает определенного типа изделия; каждое изделие имеет дефект с вероятностью 0,7. После изготовления изделие осматривается последовательно тремя контролерами, каждый из которых обнаруживает дефект с вероятностями 0,8; 0,85; 0,9 соответственно. В случае обнаружения дефекта изделие бракуется. Определить вероятность того, что изделие:

1) будет забраковано;

2) будет забраковано:

а) вторым контролером;

б) всеми контролерами.

1. Из полной колоды карт (52 карты) выбирают шесть карт; одну из них смотрят; она оказывается тузом, после чего ее смешивают с остальными выбранными картами. Найти вероятность того, что при втором извлечении карты из этих шести мы снова получим туз.
2. В урне два белых и три черных шара. Два игрока поочередно вынимают из урны по шару, не вкладывая их обратно. Выигрывает тот, кто раньше получит белый шар. Найти вероятность того, что выиграет первый игрок.
3. Производятся испытания прибора. При каждом испытании прибор выходит из строя с вероятностью 0,8. После первого выхода из строя прибор ремонтируется; после второго признается негодным. Найти вероятность того, что прибор окончательно выйдет из строя в точности при четвертом испытании.
4. Имеется 50 экзаменационных билетов, каждый из которых содержит два вопроса. Экзаменующийся знает ответ не на все 100 вопросов, а только на 60. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на оба вопроса из своего билета, или на один вопрос из своего билета, или на один (по выбору преподавателя) вопрос из дополнительного билета.
5. Прибор состоит из двух узлов: работа каждого узла безусловно необходима для работы прибора в целом. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени t) первого узла равна 0,8, второго – 0,9. Прибор испытывался в течение времени *t,* в результате чего обнаружено, что он вышел из строя (отказал). Найти вероятность того, что отказал только первый узел, а второй исправен.
6. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлено отлично, 4 – хорошо, 2 – посредственно и 1 – плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный – на 16, посредственно – на 10, плохо – на 5. Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что студент подготовлен:

а) отлично;

б) плохо.

**2 ГЛАВА**

**Повторные независимые испытания**

В главе рассматриваются:

* формула Бернулли;
* формула Пуассона;
* локальная и интегральная формулы Муавра-Лапласа.

**Типовые задачи**

**Пример 2.1**

В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене:

1) не будут проданы 5 пакетов;

2) будет продано:

а) менее 2 пакетов;

б) не более 2;

в) хотя бы 2 пакета;

г) наивероятнейшее число пакетов.

**Решение**

1) Вероятность того, что пакет акций не будет продан по первоначально заявленной цене, *р* = 1-0,2 = 0,8.

По формуле Бернулли (2.1)

2.а) По условию p = 0,2

2.б) 

2.в)

Указанную вероятность можно найти проще, если перейти к противоположному событию, т.е.

 (см.п.2а).

2.г) Наивероятнейшее число проданных акций по первоначально заявленной цене определится из условий (2.4), т.е.

9\*0,2-0,8 ≤ m0 ≤ 9\*0,2+0,2 или 1≤ m0 ≤ 2,

т.е. наивероятнейших чисел два: m0 = 1 и  = 2.

Поэтому вероятность



**Пример 2.2**

Завод отправил на базу 10000 стандартных изделий. Среднее число изделий, повреждаемых при транспортировке, составляет 0,02%. Найти вероятность того, что из 10000 изделий:

1) будет повреждено:

а) 3;

б) по крайней мере 3;

2) не будет повреждено:

а) 9997;

б) хотя бы 9997.

**Решение**

1.а) Вероятность того, что изделие будет повреждено при транспортировке, равна *р* = 0,0002. Так как *р* – мала, *n* = 10000 – велико и λ = n\*p = 10000\*0,0002 = 2≤10, следует применить формулу Пуассона (2.6):

.

Это значение проще найти, используя табл. III приложений:

P3,10000 = P3(2) = 0,1804

1.б) Вероятность P10000(m ≥ 3) может быть вычислена как сумма большого количества слагаемых:

P10000(m ≥ 3) = P3,10000+ P4,10000+…+ P10000,10000.

Но, разумеется, проще ее найти, перейдя к противоположному событию:

P10000(m ≥ 3) = 1 - P10000(m < 3) = 1 - (P0,10000+P1,10000+ P2,10000) = 1-(0,1353+0,2707+0,2707) = 0,3233.

Следует отметить, что для вычисления вероятности P10000(m ≥ 3) = P10000(3 ≤ m ≤ 10000) нельзя применить интегральную формулу Муавра-Лапласа, так как не выполнено условие ее применимости, ибо npq ≈ 2 < 20.

2.а) В данном случае p = 1-0,0002 = 0,9998 и надо найти P9997,10000, для непосредственного вычисления которой нельзя применить ни формулу Пуассона (р велика), ни локальную формулу Муавра-Лапласа (npq ≈ 2 < 20). Однако событие «не будет повреждено 9997 из 10000», вероятность которого, равна 0,1804, получена в 1.а).

2.б) Событие «не будет повреждено хотя бы 9997 из 10000» равносильно событию «будет повреждено не более 3 из 10000», для которого p = 0,0002 и

P10000(m ≤ 3) = P0,10000+ P1,10000+ P2,10000+ P3,10000 = 0,1353+0,2707+0,2707+0,1805 = 0,8572.

**Пример 2.3**

По результатам проверок налоговыми инспекциями установлено, что в среднем каждое второе малое предприятие региона имеет нарушение финансовой дисциплины. Найти вероятность того, что из 1000 зарегистрированных в регионе малых предприятий имеют нарушения финансовой дисциплины:

а) 480 предприятий;

б) наивероятнейшее число предприятий;

в) не менее 480;

г) от 480 до 520

**Решение**

а) По условию р = 0,5. Так n = 1000 достаточно велико (условие npq = 10000\*0,5\*(1-0,5) = 250 ≥ 20 выполнено), то применяем локальную формулу Муавра-Лапласа. Вначале по (2.9) определим

,

затем по формуле (2.7)



б) По формуле (2.6) наивероятнейшее число 1000\*0,5-0,5 ≤ m0 ≤ 1000\*0,5+0,5, т.е. 499,5≤m0≤500,5 и целое m0 = 500.

Теперь по (2.9) определим

 и 

в) Необходимо найти

*P1000(m≥480) = P1000(480 ≤ m ≤ 1000)*. Применяем интегральную формулу Муавра-Лапласа (2.10), предварительно найдя по формуле (2.12)

, 

Теперь

*P1000*(480≤*m*≤1000) ≈ [Ф(31,6) – Ф(-1,265)] = [Ф(31,6) + Ф(1,265)] ≈ \*(1+0,7941) ≈ 0,897.

г) Вероятность Р1000(480 ≤ *m* ≤520) можно было найти по той же интегральной формуле Муавра–Лапласа (2.10). Но проще это сделать, используя следствие (2.13), заметив, что границы интервала 480 и 520 симметричны относительно значения *пр =* 1000\*0,5 = 500:



**Пример 2.4**

В страховой компании 10 тыс. клиентов. Страховой взнос каждого клиента составляет 500 руб. При наступлении страхового случая, вероятность которого по имеющимся данным и оценкам экспертов можно считать равной *р* = 0,005, страховая компания обязана выплатить клиенту страховую сумму размером 50 тыс. руб. На какую прибыль может рассчитывать страховая компания с надежностью 0,95?

**Решение**

Размер прибыли компании составляет разность между суммарным взносом всех клиентов и суммарной страховой суммой, выплаченной n0клиентам при наступлении страхового случая, т.е.

*П* = 500\*10-50n0 = 50(100-n0) тыс.руб.

Для определения n0применим интегральную формулу Муавра-Лапласа (требование *npq =* 10000\*0,005\*0,995 = 49,75 > 20 выполнено).

По условию задачи

, (2.17)

где *т* – число клиентов, которым будет выплачена страховая сумма;

, 

откуда



Из соотношения (2.17)

Ф(х2) = 1,9 + Ф(х1) = 1,9 + Ф(-7,09) ≈ 1,9+(-1) = 0,9

По табл. II приложений Ф(х2) = 0,9 при х2 = 1,645

Теперь  и ,

т.е. с надежностью 0,95 ожидаемая прибыль составит 1,92 млн.руб.

Задания

1. Вероятность малому предприятию быть банкротом за время *t* равна 0,2. Найти вероятность того, что из шести малых предприятий за время *t* сохранятся:

а) два;

б) более двух.

1. В среднем пятая часть поступающих в продажу автомобилей некомплектны. Найти вероятность того, что среди десяти автомобилей имеют некомплектность:

а) три автомобиля;

б) менее трех.

1. Производится залп из шести орудий по некоторому объекту. Вероятность попадания в объект из каждого орудия равна 0,6. Найти вероятность ликвидации объекта, если для этого необходимо не менее четырех попаданий.
2. В среднем по 15% договоров страховая компания выплачивает страховую сумму. Найти вероятность того, что из десяти договоров с наступлением страхового случая будет связано с выплатой страховой суммы:

а) три договора;

б) менее двух договоров.

1. Предполагается, что 10% открывающихся новых малых предприятий прекращают свою деятельность в течение года. Какова вероятность того, что из шести малых предприятий не более двух в течение года прекратят свою деятельность?
2. В семье десять детей. Считая вероятности рождения мальчика и девочки равными между собой, определить вероятность того, что в данной семье:

а) не менее трех мальчиков;

б) не более трех мальчиков.

1. Два равносильных противника играют в шахматы. Что более вероятно:

а) выиграть 2 партии из 4 или 3 партии из 6;

б) не менее 2 партий из 6 или не менее 3 партий из 6?

(Ничьи в расчет не принимаются.)

1. В банк отправлено 4000 пакетов денежных знаков. Вероятность того, что пакет содержит недостаточное или избыточное число денежных знаков, равна 0,0001. Найти вероятность того, что при проверке будет обнаружено:

а) три ошибочно укомплектованных пакета;

б) не более трех пакетов.

1. Строительная фирма, занимающаяся установкой летних коттеджей, раскладывает рекламные листки по почтовым ящикам. Прежний опыт работы компании показывает, что примерно в одном случае из двух тысяч следует заказ. Найти вероятность того, что при размещении 100 тыс. листков число заказов будет:

а) равно 48;

б) находиться в границах от 45 до 55.

1. В вузе обучаются 3650 студентов. Вероятность того, что день рождения студента приходится на определенный день года, равна 1/365. Найти: а) наиболее вероятное число студентов, родившихся 1 мая, и вероятность такого события; б) вероятность того, что по крайней мере 3 студента имеют один и тот же день рождения.
2. Учебник издан тиражом 10 000 экземпляров. Вероятность того, что экземпляр учебника сброшюрован не правильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что:

а) тираж содержит 5 бракованных книг;

б) по крайней мере 9998 книг сброшюрованы правильно.

1. Баскетболиста делают по 3 броска мячом в корзину. Вероятности попадания мяча в корзину при каждом броске равны соответственно 0,6 и 0,7. Найти вероятность того, что:

а) у обоих будет одинаковое количество попаданий;

б) у первого баскетболиста будет больше попаданий, чем у второго.

1. Известно, что в среднем 60% всего числа изготовляемых заводом телефонных аппаратов является продукцией первого сорта. Чему равна вероятность того, что в изготовленной партии окажется:

а) 6 аппаратов первого сорта, если партия содержит 10 аппаратов;

б) 120 аппаратов первого сорта, если партия содержит 200 аппаратов?

1. Вероятность того, что перфокарта набита оператором неверно, равна 0,1. Найти вероятность того, что:

а) из 200 перфокарт правильно набитых будет не меньше 180;

б) у того же оператора из десяти перфокарт будет неверно набитых не более двух.

1. Аудиторную работу по теории вероятностей с первого раза успешно выполняют 50% студентов. Найти вероятность того, что из 400 студентов работу успешно выполнят:

а) 180 студентов;

б) не менее 180 студентов.

1. При обследовании уставных фондов банков установлено, что пятая часть банков имеют уставный фонд свыше 100 млн. руб. Найти вероятность того, что среди 1800 банков имеют уставный фонд свыше 100 млн. руб.:

а) не менее 300;

б) от 300 до 400 включительно.

1. Сколько нужно взять деталей, чтобы наивероятнейшее число годных деталей было равно 50, если вероятность того, что наудачу взятая деталь будет бракованной, равна 0,1?
2. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,01. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 800 пассажиров и вероятность такого числа опоздавших.
3. Вероятность того, что деталь стандартна, равна *р =* 0,9. Найти:

а) с вероятностью 0,9545 границы (симметричные относительно *р),* в которых заключена доля стандартных среди проверенных 900 деталей;

б) вероятность того, что доля нестандартных деталей среди них заключена в пределах от 0,08 до 0,11.

1. В результате проверки качества приготовленных для посева семян гороха установлено, что в среднем 90% всхожи. Сколько нужно посеять семян, чтобы с вероятностью 0,991 можно было ожидать, что доля взошедших семян отклонится от вероятности взойти каждому семени не более, чем на 0,03 (по абсолютной величине)?
2. Вероятность того, что дилер, торгующий ценными бумагами, продаст их, равна 0,7. Сколько должно быть ценных бумаг, чтобы можно было утверждать с вероятностью 0,996, что доля проданных среди них отклонится от 0,7 не более, чем на 0,04 (по абсолютной величине)?
3. У страховой компании имеются 10 000 клиентов. Каждый из них, страхуясь от несчастного случая, вносит 500 руб. Вероятность несчастного случая 0,0055, а страховая сумма, выплачиваемая пострадавшему, составляет 50 000 руб. Какова вероятность того, что:

а) страховая компания потерпит убыток;

б) на выплат страховых сумм уйдет более половины всех средств поступивших от клиентов?

1. Первый прибор состоит из 10 узлов, второй из 8 узлов. За время tкаждый из узлов первого прибора выхода из строя, независимо от других, с вероятностью 0,1, второго – с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что за время t в первом приборе выйдет из строя хотябы один узел, а во втором – по крайней мере два узла.
2. Студент рассматриваемого вуза по уровню подготовленности с вероятностью 0,3 является «слабым», с вероятностью 0,5 – «средним», с вероятностью 0,2 – «сильным». Какова вероятность того, что из наудачу выбранных 6 студентов вуза:

а) число «слабых», «средних» и «сильных» окажется одинаковым;

б) число «слабых» и «сильных» окажется одинаковым?

**3 ГЛАВА**

**Случайные величины**

В главе рассматриваются:

* понятие случайной величины, непрерывной случайной величины;
* закон распределения дискретной случайной величины;
* математическое ожидание дискретной случайной величины;
* дисперсия дискретной случайной величины;
* функция распределения случайной величины;
* плотность вероятности;
* мода, медиана, квантили и моменты случайных величин.

**Типовые задачи**

**Пример 3.1**

По многолетним статистическим данным известно, что вероятность рождения мальчика равна 0,515. Составить закон распределения случайной величины *X* – числа мальчиков в семье из 4 детей. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

**Решение**

Число мальчиков в семье из *п* = 4 представляет случайную величину *Х* смножеством значений *X= т =* 0, 1, 2, 3, 4, вероятности которых определяются по формуле Бернулли:

, где q = 1-p

В нашем случае n = 4, p = 0,515, q = 1-p = 0,485

Вычислим

;

;

;

;

.

(Здесь учтено, что  = 1,  = 4, , ,  = 1)

Ряд распределения имеет вид

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X = m* | *xi* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *pi* | 0,055 | 0,235 | 0,375 | 0,265 | 0,070 |

Убеждаемся, что 

Математическое ожидание *М{Х)* и дисперсию D(X)можно найти, как обычно, по формулам (3.3) и (3.11). Но в данном случае, учитывая, что закон распределения случайной величины X биномиальный, можно воспользоваться простыми формулами (4.2) и (4.3):

M(X) = np = 4\*0,515 = 2,06,

D(X) = npq = 4\*0,515\*0,485 = 0,999.

**Пример 3.2**

Радист вызывает корреспондента, причем каждый последующий вызов производится лишь в том случае, если предыдущий вызов не принят. Вероятность того, что корреспондент примет вызов, равна 0,4. Составить закон распределения числа вызовов, если:

а) число вызовов не более 5;

б) число вызовов не ограничено.

Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

**Решение:**

а) Случайная величина *X –* число вызовов корреспондента – может принимать значения 1, 2, 3, 4, 5. Обозначим событие *Ai – i*-й вызов принят (*i* = 1, 2, 3, 4, 5). Тогда вероятность того, что первый вызов принят, *P(X=1)=P(A1)=0,4.*

Второй вызов состоится лишь при условии, что первый вызов не принят, т.е.



Аналогично





Пятый вызов при любом исходе (будет принят, не принят) I последний. Поэтому



(Вероятность *Р(Х=5)* можно найти и иначе, учитывая, что последний вызов будет или принят, или нет, т.е.

)

Ряд распределения случайной величины X имеет вид

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X:* | *xi* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *pi* | 0,4 | 0,24 | 0,144 | 0,0864 | 0,1296 |

Проверяем, что 

По формуле (3.3) вычислим математическое ожидание:



Так как M(X) – нецелое число, то находить дисперсию D(X) проще не по основной формуле (3.11), а по формуле (3.16), т.е. D(X) = M(X2) – а2.

Вычислим



Теперь D(X) = 7,2784 – 2,30562 = 1,9626

б) Так как число вызовов не ограничено, то ряд распределения случайной величины Х примет вид

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X:* | *xi* | 1 | 2 | 3 | 4 | … | n | … |
| *pi* | 0,4 | 0,24 | 0,144 | 0,0864 | … | 0,6n-1\*0,4 | … |

Проверяем, что



(использовали формулу суммы сходящегося (│q│< 1) геометрического ряда:  при a = 1, q= 0,6)

По формуле (3.4) вычислим математическое ожидание





Для вычисления суммы полученного ряда воспользуемся формулой:



(т.е. сумма данного ряда является производной сходящегося геометрического ряда при│q│=│x│<1). При х = 0,6.

, т.е. *M(X)* = 0,4\*6,25 = 2,5

По формуле (3.12) вычислим дисперсию: D(X) = *M(X2) – a2.*

Вначале найдем





Для вычисления суммы полученного ряда рассмотрим сумму ряда

S1(x) при │х│< 1:





S1(x) при х = 0,6:

, т.е. M(X2) = 0,4\*25=10

Теперь D(X) = 10-2,52 = 3,75.

**Пример 3.3**

Среди 10 изготовленных приборов 3 неточных. Составить закон распределения числа неточных приборов среди взятых наудачу четырех приборов. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

**Решение**

Случайная величина *X* – число неточных приборов среди четырех отобранных – может принимать значения i - 0, 1, 2, 3.

Общее число способов выбора 4 приборов из 10 определяется числом сочетаний . Число способов выбора четырех приборов, среди которых *i* неточных приборов и 4-*i* точных (*i* = 0, 1, 2, 3), по правилу произведения определится произведением числа способов выбора *i* неточных приборов из 3 неточных  на число способов выбора 4-*i* точных приборов из 7 точных , т.е. \*. Согласно классическому определению вероятности

 (i = 0, 1, 2, 3).

Учитывая, что  = 1,  = 3,  =  = 3,  = 1,

, , ,

.

Вычислим



т.е. ряд распределения будет такой:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X:* | *xi* | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *pi* | 1/6 | 1/2 | 3/10 | 1/30 |

Убеждаемся в том, что 

Математическое ожидание *M(X)* и дисперсию *D(X)* вычисляем по формулам (3.3) и (3.16):

,

 и

.

**Пример 3.4**

Ряд распределения дискретной случайной величины состоит из двух неизвестных значений. Вероятность того, что случайная величина примет одно из этих значений, равна 0,8. Найти функцию распределения случайной величины, если ее математическое ожидание равно 3,2, а дисперсия 0,16.

**Решение**

Ряд распределения имеет вид

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X:* | *xi* | x1 | x2 |
| *pi* | 0,8 | 0,2 |

,

где *pi* = 0,8, а *p2* = 1-p1 = 1-0,8 = 0,2.

По условию



или



Решая полученную систему, находим два решения:

 и 

Записываем выражение функции распределения:

 или 

**Пример 3.5**

Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, для первого станка равна 0,9, для второго – 0,8, для третьего -0,75 и для четвертого – 0,7. Составить закон распределения случайной величины *X –* числа станков, которые не потребуют внимания рабочего в течение часа.

**Решение**

Задача может быть решена несколькими способами.

Первый способ: Пусть  *–* событие, состоящее в том, что *k*-й станок не потребует (потребует) внимания рабочего в течении часа. Тогда, очевидно:

;



.

Аналогично находим

;



,

т.е. закон (ряд) распределения случайной величины Х имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X:* | *xi* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *pi* | 0,0015 | 0,0275 | 0,1685 | 0,4245 | 0,378 |

 (3.38)

Второй способ состоит в том, что заданы законы (ряды) распределения альтернативных случайных величин *X*k *(k*=1,2,3,4), выражающих число станков, не потребующих внимания рабочего в течение часа (это число для каждого станка равно 1, если этот станок не потребует внимания рабочего, и равно 0, если потребует):

X1: X2: X3: X4:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 0 | 1 |  | *xi* | 0 | 1 |  | *xi* | 0 | 1 |  | *xi* | 0 | 1 |
| *pi1* | 0,1 | 0,9 | *pi2* | 0,2 | 0,8 | *pi3* | 0,25 | 0,75 | *pi4* | 0,3 | 0,7 |

Необходимо найти закон распределения суммы этих случайных величин, т.е. Х = Х1 + Х2 + Х3 + Х4. Суммируя последовательно Х1 + Х2 = Z, Х1 + Х2 + Х3 = Z + X3 = U, Х1 + Х2 + Х3 + Х4 = U + X4 = X, получим

Z = Х1 + Х2:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *zi* | 0 | 1 | 2 |
| *pi* | 0,02 | 0,26 | 0,2 |

U = Z + X3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *um* | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *pm* | 0,005 | 0,08 | 0,375 | 0,54 |

и, наконец, распределение X = U + X4, т.е. получили (3.38).

Третий способ: Распределение Х можно получить чисто механически, перемножив биномы (двучлены):

, (3.39)

причем каждый из пяти полученных коэффициентов при *zk* (*k* = 0, 1, 2, 3, 4) в функции *φ4(z)* будет выражать соответствующие вероятности *P(X = k).* Действительно, преобразовав (3.39), получим

,

где коэффициенты – это вероятности значений случайной величины Х (3.38).

**Пример 3.6**

В 1-й урне содержится 6 белых и 4 черных шара, а во 2-й –3 белых и 7 черных шаров. Из 1-й урны берут на удачу два шара и перекладывают во 2-ю урну, а затем из 2-й урны берут наудачу один шар и перекладывают в 1-ю урну. Составить законы распределения числа белых шаров в 1-й и 2-й урнах.

**Решение**

Найдем закон распределения случайной величины *X* – числа белых шаров в 1-й урне.

Пусть *Ai(**) –* событие, состоящее в извлечении из первой урны *i*-го белого (черного) шара (*i* = 1, 2), а *В(**) -* извлечение из 2-й урны белого (черного) шара после того, как в нее из 1-й урны переложили два извлеченных шара. В соответствии с условием число *X* белых шаров в 1-й урне может быть равным 4, 5, 6 или 7. Вероятность того, что в 1-й урне останется 4 белых шара, будет равна вероятности совместного осуществления трех событий: из 1-й урны извлечены первый шар -белый, второй шар – белый, из 2-й урны извлечен черный шар (после того как в нее переложили два белых шара), т.е.



Рассуждая аналогично, получим

;

;

.

Итак, закон распределения

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X:* | *xi* | 4 | 5 | 6 | 7 |
| *pi* | 7/36 | 89/180 | 5/18 | 1/30 |

Убеждаемся в том, что



Распределение числа *Y* белых шаров во 2-й урне можно найти аналогично, но проще это сделать, если учесть, что *X+Y=9* (при любых значениях *xi* и *yj*)*.* Поэтому закон распределения случайной величины *Y = 9-X* есть

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Y:* | *yj* | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *pj* | 1/30 | 5/18 | 89/180 | 7/36 |

**Пример 3.7**

Дана функция распределения случайной величины *X:*



1. найти плотность вероятности *φ*(*х*);
2. построить графики *φ*(*х*) и *F*(*x*);
3. убедится в том, что *Х* – непрерывная случайная величина;
4. найти вероятности *P*(*X* = 1), *P*(*X* < 1), *P*(1 ≤ *X* < 2) (две последние вероятности показать на графиках *φ*(*х*) и *F*(*x*));
5. вычислить математическое ожидание *М*(*Х*), дисперсию D(X), моду *M0*(*X*) и медиану *Me*(*X*).

**Решение**

а) Плотность вероятности



б) Графики *φ*(*x*) и *F(x)* изображены на рис.3.20 a и б*.*

в) Случайная величина *X –* непрерывная, так как функция распределения *F*(*x*) непрерывна, а ее производная – плотность вероятности *φ*(*x*)– непрерывна во всех точках, кроме одной *(х = 2).*

г) *Р*(*Х =* 1) = 0 как вероятность отдельно взятого значения непрерывной случайной величины.

*Р*(*Х <* 1) можно найти либо по определению функции распределения, либо по формуле (3.21) через плотность вероятности *φ*(*x*):

 (ордината графика *F*(*1*) – см. рис. 3.20б)

или



(площадь под кривой распределения *φ*(*x*) на отрезке [0,1] – см.рис.3.20а).

*Р(*1*≤ X ≤* 2) можно найти либо как приращение функции распределения по формуле (3.20), либо по формуле (3.22) через



(приращение ординаты графика *F*(*x*) на отрезке [1,2] – рис.3.20б) – или



(площадь под кривой распределения *φ*(*x*) на отрезке [1,2] – рис. 3.20а)

д) По формуле (3.25) математическое ожидание



плотность вероятности *φ*(*x*).

Если представить распределение случайной величины *Х в* виде единичной массы, распределенной по треугольнику (рис. 3.20а), то значение *М*(*Х*)*=*4/3означает абсциссу центра массы треугольника.

По формуле (3.27) дисперсия D(*X*) *= M*(*X2*) – *a2.*



Теперь



Плотность вероятности *φ*(*x*) максимальна при х = 2 (см. рис. 3.20а), следовательно, М0(Х) = 2.

Медиану Ме(Х) = b найдем из условия *F*(*b*) = , т.е. , откуда *b* = *Me*(*X*) = , или через плотность вероятности

, т.е. , откуда *b* = *Me*(*X*) = 

Задания

1. Вероятность поражения вирусным заболеванием куста земляники равна 0,2. Составить закон распределения числа кустов земляники, зараженных вирусом, из четырех посаженных кустов.
2. Стрелок ведет стрельбу по цели с вероятностью попадания при каждом выстреле 0,2. За каждое попадание он получает 5 очков, а в случае промаха очков ему не начисляют. Составить закон распределения числа очков, полученных стрелком за 3 выстрела, и вычислить математическое ожидание этой случайной величины.
3. В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером 1 тыс. руб. Составить закон распределения случайной величины – размера выигрыша при пяти сделанных покупках. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
4. Клиенты банка, не связанные друг с другом, не возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,1. Составить закон распределения числа возвращенных в срок кредитов из 5 выданных. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.
5. Контрольная работа состоит из трех вопросов. На каждый вопрос приведено 4 ответа, один из которых правильный. Составить закон распределения числа правильных ответов при простом угадывании. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
6. В среднем по 10% договоров страховая компания выплачивает страховые суммы в связи с наступлением страхового случая. Составить закон распределения числа таких договоров среди наудачу выбранных четырех. Вычислить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
7. В билете три задачи. Вероятность правильного решения первой задачи равна 0,9, второй – 0,8, третьей – 0,7. Составить закон распределения числа правильно решенных задач в билете и вычислить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
8. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8 и уменьшается с каждым выстрелом на 0,1. Составить закон распределения числа попаданий в цель, если сделано три выстрела. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.
9. Произведено два выстрела в мишень. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,8, вторым – 0,7, Составить закон распределения числа попаданий в мишень. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию распределения этой случайной величины и построить ее график. (Каждый стрелок делает по одному выстрелу.)
10. Найти закон распределения числа пакетов трех акций, по которым владельцем будет получен доход, если вероятность получения дохода по каждому из них равна соответственно 0,5, 0,6, 0,7. Найти математическое ожидание и дисперсию данной случайной величины, построить функцию распределения.
11. Дан ряд распределения случайной величины:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X: | *xi* | 2 | 4 |
| *pi* | p1 | p2 |

Найти функцию распределения этой случайной величины, если ее математическое ожидание равно 3,4, а дисперсия равна 0,84.

1. Из пяти гвоздик две белые. Составить закон распределения и найти функцию распределения случайной величины, выражающей число белых гвоздик среди двух одновременно взятых.
2. Из 10 телевизоров на выставке 4 оказались фирмы «Сони». Наудачу для осмотра выбрано 3. Составить закон распределения числа телевизоров фирмы «Сони» среди 3 отобранных.
3. Среди 15 собранных агрегатов 6 нуждаются в дополнительной смазке. Составить закон распределения числа агрегатов, нуждающихся в дополнительной смазке, среди пяти наудачу отобранных из общего числа.
4. В магазине продаются 5 отечественных и 3 импортных телевизора. Составить закон распределения случайной величины – числа импортных из четырех наудачу выбранных телевизоров. Найти функцию распределения этой случайной величины и построить ее график.
5. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. Составить закон распределения числа библиотек, которые посетит студент, если в городе 4 библиотеки. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
6. Экзаменатор задает студенту вопросы, пока тот правильно отвечает. Как только число правильных ответов достигнет четырех либо студент ответит неправильно, экзаменатор прекращает задавать вопросы. Вероятность правильного ответа на один вопрос равна 2/3. Составить закон распределения числа заданных студенту вопросов.
7. Торговый агент имеет 5 телефонных номеров потенциальных покупателей и звонит им до тех пор, пока не получит заказ на покупку товара. Вероятность того, что потенциальный покупатель сделает заказ, равна 0,4. Составить закон распределения числа телефонных разговоров, которые предстоит провести агенту. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
8. Каждый поступающий в институт должен сдать 3 экзамена. Вероятность успешной сдачи первого экзамена 0,9, второго – 0,8, третьего – 0,7. Следующий экзамен поступающий сдает только в случае успешной сдачи предыдущего. Составить закон распределения числа экзаменов, сдававшихся поступающим в институт. Найти математическое ожидание этой случайной величины.
9. Охотник, имеющий 4 патрона, стреляет по дичи до первого попадания или до израсходования всех патронов. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,6, при каждом последующем – уменьшается на 0,1. Необходимо:

а) составить закон распределения числа патронов, израсходованных охотником;

б) найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

1. Из поступивших в ремонт 10 часов 7 нуждаются в общей чистке механизма. Часы не рассортированы по виду ремонта. Мастер, желая найти часы, нуждающиеся в чистке, рассматривает их поочередно и, найдя такие часы, прекращает дальнейший просмотр. Составить закон распределения числа просмотренных часов. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
2. Имеются 4 ключа, из которых только один подходит к замку. Составить закон распределения числа попыток открывания замка, если испробованный ключ в последующих попытках не участвует. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.
3. Абонент забыл последнюю цифру нужного ему номера телефона, однако помнит, что она нечетная. Составить закон распределения числа сделанных им наборов номера телефона до попадания на нужный номер, если последнюю цифру он набирает наудачу, а набранную цифру в дальнейшем не набирает. Найти математическое ожидание и функцию распределения этой случайной величины.
4. Дана функция распределения случайной величины *X*

**

Найти:

а) ряд распределения;

б) *М(Х)* и D(X);

в) построить многоугольник распределения и график *F(x)*.

1. Даны законы распределения двух независимых случайных величин

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X: | *xi* | 0 | 1 | 3 |
| *pi* | 0,2 | 0,5 | ? |

и

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Y: | *xi* | 2 | 3 |
| *pi* | 0,4 | ? |

Найти вероятности, с которыми случайные величины принимают значение 3, а затем составить закон распределения случайной величины *ЗХ– 2Y* и проверить выполнение свойств математических ожиданий и дисперсий: M*(ЗХ-* 2Y) = 3*М(Х) - 2M(Y),D(ЗХ- 2Y)* = 9D(X) + 4D(Y)*.*

1. На двух автоматических станках производятся одинаковые изделия. Даны законы распределения числа бракованных изделий, производимых в течение смены на каждом из них:

а) для первого

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X: | *xi* | 0 | 1 | 2 |
| *pi* | 0,1 | 0,6 | 0,3 |

б) для второго

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Y: | *xj* | 0 | 2 |
| *pj* | 0,5 | 0,3 |

Необходимо:

а) составить закон распределения числа производимых в течение смены бракованных изделий обоими станками;

б) проверить свойство математического ожидания суммы случайных величин.

1. Одна из случайных величин задана законом распределения

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *xi* | -1 | 0 | 1 |
| *pi* | 0,1 | 0,8 | 0,1 |

а другая имеет биномиальное распределение с параметрами *п = 2, р* = 0,6. Составить закон распределения их суммы и найти математическое ожидание этой случайной величины.

1. Случайные величины *X* и *Y* независимы и имеют один и тот же закон распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Значение | 1 | 2 | 4 |
| Вероятность | 0,2 | 0,3 | 0,5 |

Составить закон распределения случайных величин *2X* и *X+Y.* Убедиться в том, что *2X ≠X+Y,* но *М(2Х) = M(X+Y).*

1. По данным примера 3.52 убедиться в том, что *X2 ≠* *XY .* Проверить равенство *M*(*XY*) *=*[*М*(*Х*)]*2.*
2. Два стрелка сделали по два выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6, для второго – 0,7. Необходимо:

а) составить закон распределения общего числа попаданий;

б) найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

1. Пусть *X, Y, Z –* случайные величины: *X –* выручкафирмы, Y – ее затраты, *Z = Х - Y* – прибыль. Найти распределение прибыли Z, если затраты и выручка независимы и заданы распределениями:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X:* | *xi* | 3 | 4 | 5 |
| *pi* | 1/3 | 1/3 | 1/3 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Y:* | *yj* | 1 | 2 |
| *pj* | 1/2 | 1/2 |

1. Пусть *X* – выручка фирмы в долларах. Найти распределение выручки в рублях *Z=X\*Y* в пересчете по курсу доллара *Y,* если выручка *X* не зависит от курса *Y, а* распределения X и Y имеют вид

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X:* | *xi* | 1000 | 2000 |
| *pi* | 0,7 | 0,3 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Y:* | *yj* | 25 | 27 |
| *pj* | 0,4 | 0,6 |

1. Сделано два высокорисковых вклада: 10 тыс. руб. в компанию *А* и 15 тыс. руб. – в компанию *В.* Компания *А* обещает 50% годовых, но может «лопнуть» с вероятностью 0,2. Компания *В* обещает 40% годовых, но может «лопнуть» с вероятностью 0,15. Составить закон распределения случайной величины – общей суммы прибыли (убытка), полученной от двух компаний через год, и найти ее математическое ожидание.
2. Дискретная случайная величина *X* задана рядом распределения

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X:* | *xi* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *pi* | 0,2 | 0,3 | 0,3 | 0,1 | 0,1 |

Найти условную вероятность события X<5 при условии, что *Х>2.*

1. Случайные величины *Х1, Х2* независимы и имеют одинаковое распределение

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *pi* | 1/4 | 1/4 | 1/4 | 1/4 |

а) Найти вероятность события *X1+X2> 2.*

б) Найти условную вероятность PX1=1[(X*1* *+X2*) *> 2*]*.*

1. Распределение дискретной случайной величины *X* задано формулой *р(Х = к) = Ск2,* где *к =* 1, 2, 3, 4, 5. Найти:

а) константу С;

б) вероятность события |*Х–* 2|<1.

**4 ГЛАВА**

**Основные законы распределения**

В главе рассматриваются:

* биноминальный, равномерный, показательный и нормальный законы распределения;
* закон распределения Пуассона;
* геометрическое и гипергеометрическое распределения;
* логарифмически-нормальное распределение.

**Типовые задачи**

**Пример 4.1**

В магазин поступила обувь с двух фабрик в соотношении 2:3. Куплено 4 пары обуви. Найти закон распределения числа купленных пар обуви, изготовленной первой фабрикой. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

**Решение**

Вероятность того, что случайно выбранная пара обуви изготовлена первой фабрикой, равна

p=2/(2+3)=0,4.

Случайная величина *X* – число пар обуви среди четырех, изготовленных первой фабрикой, имеет биномиальный закон распределения с параметрами *п =* 4, *р =* 0,4. Ряд распределения *X* имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *pi* | 0,1296 | 0,3456 | 0,3456 | 0,1536 | 0,0256 |

(Значения *рi – Р(Х = т),* (m = 0,1,2,3,4) вычислены по формуле

 (4.1)

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины X по формулам:

, 

**Замечание**

Нетрудно заметить, что полученное распределение двумодальное (имеющее две моды): *Мо(Х)*1=1 и *Мо(Х)2=2,* так как эти значения имеют наибольшие (и равные между собой) вероятности. Моду *Мо(Х) –* число целое – можно найти из неравенства:

4\*0,4 - 0,6 ≤ *Мо(Х)* ≤ 4\*0,4 + 0,4

или

1 ≤ *Мо(Х)* ≤ 2, т.е. *Мо(Х)1 =* 1и *Мо(Х)2 =* 2*.*

**Пример 4.2**

По данным примера 4.1 найти математическое ожидание и дисперсию частости (доли) пар обуви, изготовленных первой фабрикой, среди 4 купленных.

**Решение**

Имеем n = 4, *р = 0,4.* Найдем математическое ожидание и дисперсию:

, 

**Пример 4.3**

Доказать, что сумма двух независимых случайных величин, распределенных по закону Пуассона с параметрами λ1и λ2*,* также распределена по закону Пуассона с параметром λ = λ1 *+* λ2*.*

**Решение**

Пусть случайные величины *Х = т* и *Y = n* имеют законы распределения Пуассона соответственно с параметрами λ1и λ2*.* В силу независимости случайных величин *X* и *Y* их сумма *Z = X + Y* принимает значение *Z = s* с вероятностью





Полагая, что λ = λ1 *+* λ2, и учитывая, что

,

получим

,

т.е. случайная величина *Z = X + Y* распределена по закону Пуассона с параметромλ = λ1 *+* λ2

**Пример 4.4**

Проводится проверка большой партии деталей до обнаружения бракованной (без ограничения числа проверенных деталей). Составить закон распределения числа проверенных деталей. Найти его математическое ожидание и дисперсию, если известно, что вероятность брака для каждой детали равна 0,1.

**Решение**

Случайная величина *X* – число проверенных деталей до обнаружения бракованной – имеет геометрическое распределение (4.11) с параметром *р* =0,1. Поэтому ряд распределения имеет вид

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X = m:* | *xi* | 1 | 2 | 3 | 4 | … | *m* | … |
| *pi* | 0,1 | 0,09 | 0,081 | 0,0729 | … | 0,9*m*\*0,1 | … |

По формулам:

, 

**Пример 4.5**

В лотерее «Спортлото 6 из 45» денежные призы получают участники, угадавшие 3, 4, 5 и 6 видов спорта из отобранных случайно 6 видов из 45 (размер приза увеличивается с увеличением числа угаданных видов спорта). Найти закон распределения случайной величины *X* – числа угаданных видов спорта среди случайно отобранных шести. Какова вероятность получения денежного приза? Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины *X.*

**Решение**

Число угаданных видов спорта в лотерее «6 из 45» есть случайная величина, имеющая гипергеометрическое распределение с параметрами *п* = 6, *М =* 6, *N =* 45. Ряд ее распределения, рассчитанный по формуле (4.14), имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X:* | *xi* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| *pi* | 0,40056 | 0,42413 | 0,15147 | 0,02244 | 0,00137 | 0,00003 | 0,0000001 |

Вероятность получения денежного приза



По формулам

, 

Таким образом, среднее число угаданных видов спорта из 6 всего 0,8, а вероятность выигрыша только 0,024.

**Пример 4.6**

Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше полминуты. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X* – времени ожидания поезда.

**Решение**

Случайная величина *X* – время ожидания поезда на временном (в минутах) отрезке [0;2] имеет равномерный закон распределения *φ*(*x*)=1/2.

Поэтому вероятность того, что пассажиру придется ждать не более полминуты, равна 1/4 от равной единице площади прямоугольника (рис. 4.3), т.е.



По формулам

 мин, ,  мин.

**Пример 4.7**

Доказать, что если промежуток времени *Т,* распределенный по показательному закону, уже длился некоторое время т, то это никак не влияет на закон распределения оставшейся части *Т1= Т – х* промежутка, т.е. закон распределения *Т1* остается таким же, как и всего промежутка *Т.*

**Решение**

Пусть функция распределения промежутка *Т* определяется по формуле (4.22), т.е. F(*t)* = 1–*e-λt, а* функция распределения оставшейся части *T1* = *Т–* τ при условии, что событие *Т >* τпроизошло, есть условная вероятность события *Т1< t* относительно события *Т >* τ *,* т.е. *F1*(*t*) = *РT>х* (*T1*<*t*).

Так как условная вероятность любого события *B* относительно события *А*

*PA*(*B*) = *P*(*AB*) / *P*(*A*),

то, полагая *А* = (*Т* > τ), *B* = (*T1*< *t*), получим

 (4.25)

Произведение событий (*Т* > τ) и *T1* = *Т–* τ < *t* равносильно событию τ < *Т* < *t* + τ, вероятность которого

P(τ *< Т* < *t* + τ) = *F*(*t* + τ) – *F*(τ).

Так как P(*Т* > τ) = 1 – P(*Т* ≤ τ) = 1 – *F*(τ), то выражение (4.25) можно представить в виде:



Учитывая (4.22). получим



**Пример 4.8**

Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина *X,* распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не менее 20 дней, если среднее время ремонта телевизоров составляет 15 дней. Найти плотность вероятности, функцию распределения и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X.*

**Решение**

По условию математическое ожидание *М(х)=*1/λ= 15, откуда параметр λ *-* 1/15 и по формулам (4.21) и (4.22) плотность вероятности и функция распределения имеют вид:

, , (*х* ≥ 0).

Искомую вероятность *Р*(*Х* ≥ 20) можно было найти по формуле (3.22), интегрируя плотность вероятности, т.е.

,

но проще это сделать, используя функцию распределения:



Осталось найти среднее квадратическое отклонение *σх* = *М*(*Х*) = 15 дней.

**Пример 4.9**

Полагая, что рост мужчин определенной возрастной группы есть нормально распределенная случайная величинах X cпараметрами *а* = 173 и λ*2* = 36, найти:

1. а) выражение плотности вероятности и функции распределения случайной величины *X;*

б) доли костюмов 4-го роста (176 – 182 см) и 3-го роста (170 – 176 см), которые нужно предусмотреть в общем объеме производства для данной возрастной группы;

в) квантиль x0,7и 10%-ную точку случайной величины *X.*

*2.* Сформулировать «правило трех сигм» для случайной величины *X.*

**Решение**

1. а) По формулам (4.26) и (4.30) запишем

, 

б) Доля костюмов 4-го роста (176 – 182 см.) в общем объеме производства определится по формуле (4.32) как вероятность



(рис. 4.13), так как по (4.33)

, 

Долю костюмов 3-го роста (170–176 см) можно было определить аналогично по формуле (4.32), но проще это сделать по формуле (4.34), если учесть, что данный интервал симметричен относительно математического ожидания *а* = *М(Х)* =173, т.е. не равенство

170 < *X <* 176 равносильно неравенству |*Х* - 173| ≤ *3*:

,

(рис. 4.13).

в) Квантиль X0,7 случайной величины *X* найдем из уравнения (3.29) с учетом (4.30):

,

откуда

.

По табл. II приложений находим t = 0,524 и

Х0,7 = 6\*t + 173 = 6\*0,524 + 173 ≈ 176 (см).

Это означает, что 70% мужчин данной возрастной группы имеют рост до 176 см.

10%-ная точка – это квантиль X0,9 = 181 см (находится аналогично), т.е. 10% мужчин имеют рост не менее 181 см.

2. Практически достоверно, что рост мужчин данной возрастной группы заключен в границах от a-3σ = 173-3\*6 = 155 до a + 3σ = 173 + 3\*6 = 191 (см), т.е. 155 ≤ Х ≤ 191 (см).

Задания

1. Вероятность выигрыша по облигации займа за все время его действия равна 0,1. Составить закон распределения числа выигравших облигаций среди приобретенных 19. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и моду этой случайной величины.
2. По данным примера 4.11 найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение доли (частости) выигравших облигаций среди приобретенных. Составить функцию распределения случайной величины, имеющей биномиальный закон распределения с параметрами n и *р.*
3. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени *t* равна 0,002. Необходимо:

а) составить закон распределения отказавших за время *t* элементов;

б) найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины;

в) определить вероятность того, что за время t откажет хотя бы один элемент.

1. Вероятность поражения цели равна 0,05. Производится стрельба по цели до первого попадания. Необходимо:

а) составить закон распределения числа сделанных выстрелов;

б) найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины;

в) определить вероятность того, что для поражения цели потребуется не менее 5 выстрелов.

1. В магазине имеются 20 телевизоров, из них 7 имеют дефекты. Необходимо:

а) составить закон распределения числа телевизоров с дефектами среди выбранных наудачу пяти;

б) найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины;

в) определить вероятность того, что среди выбранных нет телевизоров с дефектами.

1. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого числа. Полагая, что при отсчете ошибка округления распределена по равномерному закону, найти:

1) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины;

2) вероятность того, что ошибка округления:

а) меньше 0,04;

б) больше 0,05.

1. Среднее время безотказной работы прибора равно 80 ч. Полагая, что время безотказной работы прибора имеет показательный закон распределения, найти:

а) выражение его плотности вероятности и функции распределения;

б) вероятность того, что в течение 100 ч прибор не выйдет из строя.

1. Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед.

1. Найти вероятность того, что цена акции:

а) не выше 15,3 ден. ед.;

б) не ниже 15,4 ден. ед.;

в) от 14,9 до 15,3 ден. ед.

2. С помощью правила трех сигм найти границы, в которых будет находиться текущая цена акции.

1. Цена некой ценной бумаги нормально распределена. В течение последнего года 20% рабочих дней она была ниже 88 ден. ед., а 75% – выше 90 ден. ед. Найти:

а) математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение цены ценной бумаги;

б) вероятность того, что в день покупки цена будет заключена в пределах от 83 до 96 ден. ед.;

в) с надежностью 0,95 определить максимальное отклонение цены ценной бумаги от среднего (прогнозного) значения (по абсолютной величине).

1. Коробки с конфетами упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 540 г. Известно, что масса коробок с конфетами имеет нормальное распределение, а 5% коробок имеют массу, меньшую 500 г. Каков процент коробок, масса которых:

а) менее 470 г;

б) от 500 до 550 г;

в) более 550 г;

г) отличается от средней не более, чем на 30 г (по абсолютной величине)?

1. Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с математическим ожиданием *а* = 25. Вероятность попадания *Хв* интервал (10; 15) равна 0,09. Чему равна вероятность попадания *X* в интервал:

а) (35;40);

б) (30;35)?

1. Нормально распределенная случайная величина имеет следующую функцию распределения: *F*(*x*) = 0,5 + 0,5*Ф*(*x*-1). Из какого интервала (1;2) или (2;6) она примет значение с большей вероятностью?
2. Квантиль уровня 0,15 нормально распределенной случайной величины *X* равен 12, а квантиль уровня 0,6 равен 16. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины.
3. 20%-ная точка нормально распределенной случайной величины равна 50, а 40%-ная точка равна 35. Найти вероятность того, что случайная величина примет значение в интервале (25;45).
4. Месячный доход семей можно рассматривать как случайную величину, распределенную по логнормальному закону. Полагая, что математическое ожидание этой случайной величины равно 1000 ден. ед., а среднее квадратическое отклонение 800 ден. ед., найти долю семей, имеющих доход:

а) не менее 1000 ден. ед.;

б) менее 500 ден. ед.

1. Известно, что нормально распределенная случайная величина принимает значение:

а) меньшее 248 с вероятностью 0,975;

б) большее 279 с вероятностью 0,005.

Найти функцию распределения случайной величины *X.*

1. Случайная величина *X* распределена по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием. Вероятность попадания этой случайной величины на отрезок от –1 до +1 равна 0,5. Найти выражения плотности вероятности и функции распределения случайной величины *X.*
2. Имеется случайная величина *X,* распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием *а* и дисперсией σ2. Требуется приближенно заменить нормальный закон распределения равномерным законом в интервале (а; р); границы а, р подобрать так, чтобы сохранить неизменными математическое ожидание и дисперсию случайной величины *X.*
3. Случайная величина *X* распределена по нормальному закону с математическим ожиданием *а* = 0. При каком значении среднего квадратического отклонения *о* вероятность попадания случайной величины *X* в интервал (1;2) достигает максимума?
4. Время ремонта телевизора распределено по показательному закону с математическим ожиданием, равным 0,5 ч. Некто сдает в ремонт два телевизора, которые одновременно начинают ремонтировать, и ждет, когда будет отремонтирован один из них. После этого с готовым телевизором он уходит. Найти закон распределения времени:

а) потраченного клиентом;

б) которое должен потратить клиент, если он хочет забрать сразу два телевизора.

**5 ГЛАВА**

**Многомерные случайные величины**

В главе рассматриваются:

* понятие многомерной случайной величины и ее закон распределения;
* функция распределения многомерной случайной величины;
* плотность вероятности двумерной случайной величины;
* ковариация и коэффициент корреляции.

**Типовые задачи**

**Пример 5.1**

Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (Х, Y) задан в табл. 5.2.

Таблица 5.2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yi**xi* | -1 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 0,10 | 0,25 | 0,30 | 0,15 |
| 2 | 0,10 | 0,05 | 0,00 | 0,05 |

Найти:

а) законы распределения одномерных случайных величин *X* и *Y;*

б) условные законы распределения случайной величины *X* при условии Y = 2 и случайной величины *Y* при условии *X* = 1;

в) вычислить *P(Y< X).*

**Решение**

а) Случайная величина *X* может принимать значения:

*Х =* 1 с вероятностью *P1* = 0,10 + 0,25 + 0,30 + 0,15 = 0,8;

*X = 2* с вероятностью *P2 = 0,*10 + 0,05 + 0,00 + 0,05 = 0,2,

т.е. ее закон распределения

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X:* | *xi* | 1 | 2 |
| *pi* | 0,8 | 0,2 |

Аналогично закон распределения

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Y:* | *yj* | -1 | 0 | 1 | 2 |
| *pj* | 0,2 | 0,3 | 0,3 | 0,2 |

б) Условный закон распределения *Х* при условии, что *Y* = 2. получим, если вероятность *pij* , стоящие в последнем столбце табл.5.2, разделим на их сумму, т.е. *p*(*Y* = 2) = 0,2. Получим

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *ХY=2:* | *хi* | 1 | 2 |
| *pj*(*хi*) | 0,75 | 0,25 |

Аналогично для получения условного закона распределения *Y* при условии *Х* = 1 вероятности *pij*, стоящие в первой строке табл. 5.2, делим на их сумму, т.е. на *p*(*X* = 1) = 0,8. Получим

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *YХ=1:* | *yj* | -1 | 0 | 1 | 2 |
| *pi*(*yj*) | 0,125 | 0,3125 | 0,375 | 0,1875 |

в) Для нахождения вероятностей *Р*(*Y < Х*) складываем вероятности событий *pij* из табл. 5.2, для которых *yj < хi*.

Получим

*Р*(*Y < Х*) = 0,10 + 0,25 + 0,10 + 0,05 + 0,00 = 0,5

**Пример 5.2**

Двумерная случайная величина распределена равномерно в круге радиуса R *=* 1 (рис. 5.5). Определить:

а) выражение совместной плотности и функции распределения двумерной случайной величины *(X, У);*

б) плотности вероятности и функции распределения одномерных составляющих *X* и *Y;*

в) вероятность того, что расстояние от точки *(X, Y)* до начала координат будет меньше 1/3.

**Решение**

а) По условию



Постоянную *С* можно найти из соотношения (5.18):



Проще это сделать, исходя из геометрического смысла соотношения (5.18), означающего, что объем тела, ограниченного поверхностью распределения *φ*(*х*,*у*) и плоскостью *Оху,* равен 1.

В данном случае, это объем цилиндра с площадью основания πR2 = π\*12 = π и высотой *С* (рис. 5.6), равный *п\*С =* 1, откуда *С* = 1/π. Следовательно,



Найдем функцию распределения *F*(*x*,*y*) по формуле (5.17):

 (5.21)

Очевидно, что этот интеграл с точностью до множителя 1/π совпадает с площадью области *D* – области пересечения круга  с бесконечным квадрантом левее и ниже точки *M*(*x*,*y*) (рис.5.7).

Опустим расчеты интеграла (5.21) для различных *х* и *у*,но отметим очевидное, что

при x ≤ -1, -∞ < y < ∞ или при -∞ < *х* < ∞, *у < -* 1 *F(x,y) = 0*,

так как в этом случае область *D –* пустая, а при x >1, *у >*1 *F (х,у)* = 1, так как при этом область *D* полностью совпадает с кругом *х2* + *у2 < 1*, на котором совместная плотность *φ(х,у)* отлична от нуля.

б) Найдем функции распределения одномерных составляющих *X* и *Y.* По формуле (5.19) при -1< *х <* 1





Итак,



Аналогично



Найдем плотности вероятности одномерных составляющих *Х* и *Y*. По формуле:



График плотности *φ1*(*х*) показан на рис. 5.8.

Аналогично



в) Искомую вероятность , т.е. вероятность того. Что случайная точка (X,Y) будет находится в круге радиуса R1 = 1/3 (см. рис. 5.5), можно было найти по формуле:

,

но проще это сделать, используя понятие «геометрической вероятности», т.е.



**Пример 5.3**

По данным примера 5.3 определить:

а) условные плотности случайных величин *X* и У;

б) зависимы или независимы случайные величины *X* и *Y;*

в) условные математические ожидания и условные дисперсии.

**Решение**

а) Найдем условную плотность *φy*(*x*) по формуле (5.22), учитывая, что *φ2*(*y*) ≠ 0.



График *φy*(*x*) при *y =* 1/2 показан на рис. 5.11.

Аналогично



б) *X* и *Y –* независимые случайные величины, так как *φ*(*x*,*y*) ≠ *φ1*(*x*)*φ2*(*y*) или *φy*(*x*) ≠ *φ1*(*x*), *φх*(*y*) ≠ *φ2*(*y*).

в) Найдем условное математическое ожидание *Mx*(*Y*), учитывая, что .



Аналогично



Этот результат очевиден в силу того, что круг x2 + y2 ≤ 1 (рис.5.5) симметричен относительно координатных осей. Таким образом, линия регрессии *Y* по *X* совпадает с осью Ох (*Мх*(*Y*) = 0), а линия регрессии *X* по *Y* – с осью Оу (*Му*(*Х*) = 0).

Найдем условную дисперсию *Dx*(*Y*):





(Тот же результат можно получить проще – по формуле дисперсии равномерного закона распределения:

)

Аналогично



Таким образом, по мере удаления от начала координат дисперсия условных распределений уменьшается от 1/3 до 0.

**Пример 5.4**

По данным примера 5.2 определить ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин *Х и Y.*

**Решение**

В примере 5.2 были получены следующие законы распределения одномерных случайных величин:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X:* | *xi* | 1 | 2 |
| *pi* | 0,8 | 0,2 |

и

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Y:* | *yj* | -1 | 0 | 1 | 2 |
| *pj* | 0,2 | 0,3 | 0,3 | 0,2 |

Найдем математические ожидания и средние квадратические отклонения этих случайных величин:





, 





, 

Для нахождения математического ожидания *M(XY)* произведения случайных величин *X* и *Y* можно было составить закон распределения произведения двух дискретных случайных величин (с вероятностями его значений из табл. 5.2), а затем по нему найти *M(XY)*

Закон распределения *(XY)* имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| (*хy*)*k* | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 4 |
| *pk* | 0,1 | 0,1 | 0,3 | 0,3 | 0,15 | 0,05 |

Но делать это вовсе не обязательно. *M(XY)* Можно найти непосредственно по табл. 5.2 распределения двумерной случайной величины *(X,Y)* по формуле:

,

где двойная сумма означает суммирование по всем nm клеткам таблицы (n – число строк, m – число столбцов):



Вычислим ковариацию*Kxy*по формуле:

*Kxy* =  – *axay* = 0,5-1,2\*0,5 = -0,1.

Вычислим коэффициент корреляции ρ по формуле:



т.е. между случайными величинами *X* и *Y* существует отрицательная линейная зависимость; следовательно, при увеличении (уменьшении) одной из случайных величин другая имеет некоторую тенденцию уменьшаться (увеличиваться).

**Пример 5.5**

По данным примера 5.3 определить:

а) ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин *X* и *Y;*

б) коррелированы или некоррелированы эти случайные величины.

**Решение**

а) Вначале найдем математические ожидания *ах= М{Х)* и *ay= M(Y)* по формулам:



Аналогично *ау* = 0 (то, что *ах* = *ау =* 0, очевидно из соображения симметрии распределения в круге, из которой следует, что центр его массы лежит в начале координат).

По формуле (5.34) ковариация:





Соответственно коэффициент корреляции .

б) Так как р = 0, то случайные величины *X и Y* некоррелированы. Убеждаемся в том, что из некоррелированности величин еще не вытекает их независимость.

**Пример 5.6**

Найти плотность вероятности случайной величины *Y* = 1-*X*3, где случайная величина *X* распределена по закону Коши с плотностью вероятности

.

**Решение**

По условию *y* = *f*(*x*) = 1-*x*3, откуда . Производная (по абсолютной величине):

.

Плотность вероятности:



**Пример 5.7**

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины *Y* = 2-3*sinX*, если плотность вероятности случайной величины *X* есть *φ*(*х*) = *cosX* на отрезке [-π/2, π/2].

**Решение**

По формуле (5.57)





Дисперсия D(Y) = M(Y2) – :

.

**Пример 5.8**

Найти закон распределения суммы двух случайных величин, распределенных равномерно на отрезке [0; 1].

**Решение**

Пусть *Z = X+Y,* где *φ1*(*x*)= 1 при 0 ≤ *х* ≤ *1 и φ2(у)* = 1 при 0 ≤ *у* ≤1.

По формуле (5.49) плотность вероятности:



Если *z* < 0, то для 0 ≤ *x* ≤ 1 *z*-*x* < 0; если *z* > 2, то для 0 ≤ *x* ≤ 1 *z*-*x* > 1, следовательно, в этих случаях *φ2*(*z*-*x*) = 0 и *φ*(*z*) = 0.

Пусть 0 ≤ *z* ≤ 2. Подынтегральная функция *φ2*(*z*-*x*) будет отлична от нуля только для значений *х*, при которых 0 ≤ *z - x* ≤ 1 или, что то же самое, при *z* -1 ≤ *x* ≤ *z.*

Если 0 ≤ *z* ≤ 1, то .

Если 1 ≤ *z* ≤ 2, то .

Объединяя все случаи, получим:

 (5.60)

Закон распределения (5.60) называется *законом распределения Симпсона* или *законом равнобедренного треугольника* (рис. 5.16).

Вычисление φ(z) можно было провести и иначе: вначале найти функцию распределения *F(z),* а затем – ее производную, т.е. φ(z) = *F'*(z). Преимущество такого подхода состоит в возможности использования геометрической интерпретации функции *F*(*z*) как площади *SD* области *D* – части квадрата (со стороной, равной 1), лежащей левее и ниже прямой *у =* z *- х* (рис. 5.17).

Действительно (см. рис. 5.17), при 0 ≤ *z* ≤1 *SD* = *z2/2* (площадь заштрихованного треугольника со стороной z), а при 1 ≤ z ≤ 2 SD = 1 - (2 - z)2/2 (площадь квадрата без площади незаштрихованного треугольника, сторона которого, как нетрудно показать, равна (2 – *z).* Следовательно,



и выражение (5.60) для *φ(z)* получается дифференцированием F(z).

Задания

1. Закон распределения двумерной дискретной случайной величины *(X,Y)* задан в табл. 5.3.

Таблица 5.3

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yi**xi* | 0 | 1 | 2 | 3 |
| -1 | 0,02 | 0,03 | 0,09 | 0,01 |
| 0 | 0,04 | 0,20 | 0,16 | 0,10 |
| 1 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,05 |

Найти:

а) законы распределения одномерных случайных величин *Х и Y*;

б) условные законы распределения случайной величины *X* при условии *Y =* 2 и случайной величины Y при условии *Х =* 1;

в) вероятность P(Y > *X).*

1. Рассматривается двумерная случайная величина *(X,Y),* где *X –* поставка сырья, *Y –* поступление требования на него. Известно, что поступление сырья и поступление требования на него могут произойти в любой день месяца (30 дней) с равной вероятностью. Определить:

а) выражение совместной плотности и функции распределения двумерной случайной величины *(Х,У),*

б) плотности вероятности и функции распределения одномерных составляющих *X* и *Y;*

в) зависимы или независимы *X* и Y;

г) вероятности того, что поставка сырья произойдет до и после поступления требования.

1. Двумерная случайная величина *(X,Y)* распределена равномерно внутри квадрата *R* с центром в начале координат. Стороны квадрата равны корень2и составляют углы 45° с осями координат. Определить:

а) выражение совместной плотности двумерной случайной величины *(X,Y);*

б) плотности вероятности одномерных составляющих *X* и *Y;*

в) их условные плотности;

г) зависимыили независимы *Х и Y.*

1. Даны плотности вероятности независимых составляющих двумерной случайной величины *(X,Y):*

 

Найти выражение совместной плотности и функции распределения двумерной случайной величины.

В примерах 5.14–5.16 определить:

а) ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин *X* и *Y,*

б) коррелированы или некоррелированы эти случайные величины.

1. Использовать данные примера 5.10.
2. Использовать данные примера 5.11.
3. Использовать данные примера 5.12.
4. Случайная величина *X* распределена на всей числовой оси с плотностью вероятности *φ*(*х*) = 0,5е-│Х│. Найти плотность вероятности случайной величины *Y = X2* и ее математическое ожидание.
5. Найти закон распределения суммы двух независимых случайных величин, каждая из которых распределена по стандартному нормальному закону, т.е. *N*(0,1)*.*
6. Двумерная случайная величина определяется следующим образом. Если при подбрасывании игральной кости выпадает четное число очков, то *Х =* 1, в противном случае *X = 0; Y =* 1, когда число очков кратно трем, в противном случае Y=0. Найти:

а) законы распределения двумерной случайной величины *(X, Y)* и ее одномерных составляющих;

б) условные законы распределения Х *и Y.*

1. Двумерная случайная величина *(X, Y)* распределена с постоянной совместной плотностью внутри квадрата *ОАВС,* где O(0;0), A(0;1), B(1;1), С(1;0). Найти выражение совместной плотности и функции распределения двумерной случайной величины *(X, Y).*
2. Поверхность распределения двумерной случайной величины *(X, Y)* представляет прямой круговой конус, основанием которого служит круг с центром в начале координат и с радиусом 1. Вне этого круга совместная плотность двумерной случайной величины *(X, Y)* равна нулю. Найти выражения совместной плотности *φ*(*х*, *у),* плотностей вероятностей одномерных составляющих *φ1*(*x*), *φ2* (*y*), условных плотностей *φx*(y), *φy*(*x*). Выяснить, являются ли случайные величины *X* и *Y.* зависимыми; коррелированными.
3. Двумерная случайная величина *(X, Y)* распределена по закону



Найти:

а) коэффициент *А;*

б) вероятность попадания случайной величины *(X, Y)* в пределы квадрата, центр которого совпадает с началом координат, а стороны параллельны осям координат и имеют длину 2.

Установить, являются ли величины *X* и *Y* зависимыми; найти *φ1*(*х), φ2(y).*

1. Совместная плотность двумерной случайной величины *(X, У)* имеет вид



Найти:

а) постоянную С;

б) плотности вероятности одномерных составляющих;

в) их условные плотности;

г) числовые характеристики *ах, ау, D(Х), D(Y), ρ*.

1. Найти совместную плотность двумерной случайной величины *(X, Y)* и вероятность ее попадания в область *D –* прямоугольник, ограниченный прямыми *х =* 1, *х =* 2,*у =* 3, *у =* 5,если известна ее функция распределения *(X, Y):*

**

1. Задана совместная плотность двумерной случайной величины *(X, Y):*

.

Найти функцию распределения *F*(*x*,*y*).

1. Имеются независимые случайные величины *X* и *Y.* Случайная величина *X* распределена по нормальному закону с параметрами ах = 0, . Случайная величина *Y* распределена равномерно на интервале (0;1). Найти выражения совместной плотности и функции распределения двумерной случайной величины *(X, Y).*
2. Совместная плотность двумерной случайной величины *(X, Y)* задана формулой:



Найти ax, ay, , , ρ.

1. Независимые случайные величины *X, Y* распределены по нормальным законам с параметрами ax = 2, ay = -3,  = 1,  = 4. Найти вероятности событий:

а) (*X <* ax)(*Y <* ay);

б) *Y* < *X*-5;

в)(│*X*│< 1)(│*Y*│< 2).

1. Задана плотность вероятности *φ*(*х*) случайной величины *Х*, принимающей только положительные значения. Найти плотность вероятности случайной величины *Y*, если:

а) *Y* = *e-x*;

б) *Y* = ln*X*;

в) *Y* = *X*3;

г) *Y* = 1/*X*2;

д) *Y* = .

1. Случайная величина *Х* равномерно распределена в интервале (-π/2; π/2). Найти плотность вероятности случайной величины *Y* = sin*X*.
2. Случайная величина распределена по закону Релея с плотностью вероятности

**

Найти закон распределения случайной величины *Y* = *.*

1. Случайная величина *Х* распределена по закону Коши с плотностью вероятности

.

Найти плотность вероятности обратной величины *Y* = 1/*X*.

1. Дискретная случайная величина *Х* имеет ряд распределения

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | -1 | 0 | 1 | 2 |
| *pi* | 0,2 | 0,1 | 0,3 | 0,4 |

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины *Y= 2х*

1. Имеются две случайные величины *X* и *Y,* связанные соотношением *Y = 2 – ЗХ.* Числовые характеристики случайной величины *X* заданы *ах= -*1; *D(X) =* 4. Найти:

а) математическое ожидание и дисперсию случайной величины *Y;*

б) ковариацию и коэффициент корреляции случайной величин *Х и Y.*

1. Случайная величина *X* задана плотностью вероятности φ(x) = cosx в интервале (0, π/2); вне этого интервала φ(x) = 0. Найти математическое ожидание случайной величины *Y= X2.*
2. Случайная величина *X* распределена с постоянной плотностью вероятности в интервале (1;2) и нулевой плотностью вне этого интервала. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины *Y =* 1*/x*
3. Непрерывная случайная величина *X* распределена в интервале (0;1) по закону с плотностью вероятности



Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины *Y= X2.*

1. Непрерывная случайная величина распределена по показательному закону с параметром *Х = 2.* Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины *Y= e-X.*
2. Случайная величина *X* распределена по нормальному закону с параметрами *а* = 0, σ*2* = 5. Найти математическое ожидание случайной величины *Y*=1 - *ЗХ2 + 4Х3.*
3. Имеются две независимые случайные величины X *и Y.* Величина *X* распределена по нормальному закону с параметрами *ах=* 1,  = 4. Величина Yраспределена равномерно в интервале (0;2). Найти:

а) *М(Х - У), D(Х - Y);*

б) *M(X2), M(Y2).*

**6 ГЛАВА**

**Закон больших чисел и предельные теоремы**

В главе рассматриваются:

* неравенство Маркова;
* неравенство Чебышева;
* теоремы Чебышева и Бернулли;
* центральная предельная теорема.

**Типовые задачи**

**Пример 6.1**

Среднее количество вызовов, поступающих на коммутатор завода в течении часа, равно 300. Оценить вероятность того, что в течение следующего часа число вызовов на коммутатор:

а) превысит 400;

б) будет не более 500.

**Решение**

а) По условию *М*(*Х*) = 300. По формуле (6.1.) *Р*(*Х* > 400) ≤ , т.е. вероятность того, что число вызовов превысит 400, будет не более 0,75.

б) По формуле (6.3) *Р*(*Х* ≤ 500) ≥  = 0,4, т.е. вероятность того, что число вызовов не более 500, будет не менее 0,4.

**Пример 6.2**

Сумма всех вкладов в отделение банка составляет 2 млн.руб., а вероятность того, что случайно взятый вклад не превысит 10 тыс.руб., равна 0,6. Что можно сказать о числе вкладчиков?

**Решение**

Пусть *Х* – размер случайно взятого вклада, а n – число всех вкладов. Тогда из условия задачи следует, что средний размер вклада *М*(*Х*) =  тыс.руб. Согласно неравенству Маркова (6.3):

 или 

Учитывая, что *Р*(*Х* ≤ 10) = 0,6, получим , откуда n ≤ 500, т.е. число вкладчиков не более 500.

**Пример 6.3**

Средний расход воды на животноводческой ферме составляет 1000 *л* в день, а среднее квадратичное отклонение этой случайной величины не превышает 200 *л.* Оценить вероятность того, что расход воды на ферме в любой выбранный день не превзойдет 2000 *л,* используя:

а) неравенство Маркова;

б) неравенство Чебышева.

**Решение**

а) Пусть *X* – расход воды на животноводческой ферме (л). По условию *М(Х) =* 1000. Используя неравенство Маркова (6.3), получим Р(Х < 2000) > 1\*1000/2000 = 0,5, т.е. не менее, чем 0,5.

б) Дисперсия *D(X) = а2 <* 2002. Так как границы интервала 0 < *X <* 2000 симметричны относительно математического ожидания *М(Х) =* 1000, то для оценки вероятности искомого события можно применить неравенство Чебышева (6.6):



т.е. не менее, чем 0,96. В данной задаче оценку вероятности события, найденную с помощью неравенства Маркова (*р ≥* 0,5), удалось уточнить с помощью неравенства Чебышева (Р > 0,96).

**Пример 6.4**

Вероятность выхода с автомата стандартной детали равна 0,96. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что число бракованных среди 2000 деталей находится в границах от 60 до 100 (включительно). Уточнить вероятность того же события с помощью интегральной теоремы Муавра-Лапласа. Объяснить различие полученных результатов.

**Решение**

По условию вероятность того, что деталь бракованная, равна *Р* = 1 – 0,96 = 0,04. Число бракованных деталей *X - т* имеет биномиальный закон распределения, а его границы 60 и 100 симметричны относительно математического ожидания *а = М(Х) = пр =* 2000\*0,04 = 80.

Следовательно, оценку вероятности искомого события



можно найти по формуле (6.6):

,

т.е. не менее чем 0,808.

Применяя следствие (2.13) интегральной теоремы Муавра-Лапласа, получим

,

т.е. вероятность искомого события приближенно равна 0,979.

Полученный результат *Р ≈* 0,979 не противоречит оценке, найденной с помощью неравенства Чебышева – *Р >* 0,808. Различие результатов объясняется тем, что неравенство Чебышева дает лишь нижнюю границу оценки вероятности искомого события для любой случайной величины, а интегральная теорема Муавра–Лапласа дает достаточно точное значение самой вероятности *Р* (тем точнее, чем больше *п),* так как она применима лишь для случайной величины, имеющей определенный, а именно – биномиальный закон распределения.

**Пример 6.5**

Оценить вероятность того, что отклонение любой случайной величины от ее математического ожидания будет не более трех средних квадратических отклонений (по абсолютной величине) – *(правило трех сигм).*

**Решение**

По формуле (6.6), учитывая, что *D(X) = σ2,* получим:

,

т.е. не менее, чем 0,889. Напомним, что для нормального закона правило трех сигм выполняется с вероятностью *Р,* равной 0,9973, т.е. *Р* = 0,9973. Можно показать, что для равномерного закона распределения *Р* = 1, для показательного – *Р*  = 0,9827 и т.д. Таким образом, правило трех сигм (с достаточно большой вероятностью его выполнения) применимо для большинства случайных величин, встречающихся на практике.

**Пример 6.6**

По данным примера 2.8 с помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что из 1000 новорожденных доля доживших до 50 лет будет отличаться от вероятности этого события не более, чем на 0,04 (по абсолютной величине).

**Решение**

Полагая *п* = 1000, *р* = 0,87, *q* = 0,13, по формуле (6.7):



т.е. не менее, чем 0,929.

Замечание

Если математическое ожидание *М(Х) > А* или дисперсия случайной величины *D(X)* > е2, то правые части неравенств Маркова и Чебышева в форме соответственно (6.3) и (6.6) будут отрицательными, а в форме (6.1) и (6.4) будут больше 1. Это означает, что применение указанных неравенств в этих случаях приведет к тривиальному результату: вероятность события больше отрицательного числа либо меньше числа, превосходящего 1. Но такой вывод очевиден и без использования данных.

**Пример 6.7**

Для определения средней продолжительности горения электроламп в партии из 200 одинаковых ящиков было взято на выборку по одной лампе из каждого ящика. Оценить вероятность того, что средняя продолжительность горения отобранных 200 электроламп отличается от средней продолжительности горения ламп во всей партии не более чем на 5 ч (по абсолютной величине), если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения ламп в каждом ящике меньше 7 ч.

**Решение**

Пусть *Xi –* продолжительность горения электролампы, взятой из *i*-го ящика (ч). По условию дисперсия *D(Xi)*< 72 = 49. Очевидно, что средняя продолжительность горения отобранных ламп равна (X1+X2+...+X200)/200, а средняя продолжительность горения ламп во всей партии *(М(Х1) + M(X2) +*...+M(X200))/200=(a1+a2+...+a200)/200.

Тогда вероятность искомого события по формуле (6.12):

,

т.е. не менее, чем 0,9902.

**Пример 6.8**

Сколько надо провести измерений данной величины, чтобы с вероятностью не менее 0,95 гарантировать отклонение средней арифметической этих измерений от истинного значения величины не более, чем на 1 (по абсолютной величине), если среднее квадратическое отклонение каждого из измерений не превосходит 5?

**Решение**

Пусть *Xi* – результат *i*-го измерения (*i* = 1,2,...,n); *а –* истинное значение величины, т.е. *M(Xj)* = a при любом *i*. Необходимо найти *п,* при котором



В соответствии с (6.12) данное неравенство будет выполняться, если

, откуда  и ,

т.е. потребуется не менее 500 измерений.

Задания

1. Среднее изменение курса акции компании в течение одних биржевых торгов составляет 0,3%. Оценить вероятность того, что на ближайших торгах курс изменится более, чем на 3%.
2. Отделение банка обслуживает в среднем 100 клиентов день. Оценить вероятность того, что сегодня в отделении банка будет обслужено:

а) не более 200 клиентов,

б) более 150 клиентов.

1. Электростанция обслуживает сеть на 1600 электроламп, вероятность включения каждой из которых вечером равна 0,9. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что число ламп, включенных в сеть вечером, отличается от своего математического ожидания не более чем на 100 (по абсолютной величине). Найти вероятность того же события, используя следствие из интегральной теоремы Муавра-Лапласа.
2. Вероятность того, что акции, переданные на депозит, будут востребованы, равна 0,08. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что среди 1000 клиентов от 70 до 90 востребуют свои акции.
3. Среднее значение длины детали 50 см, а дисперсия – 0,1. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что случайно взятая деталь окажется по длине не менее 49,5 и не более 50,5 см. Уточнить вероятность того же события, если известно, что длина случайно взятой детали имеет нормальный закон распределения.
4. Оценить вероятность того, что отклонение любой случайной величины от ее математического ожидания будет не более двух средних квадратических отклонений (по абсолютной величине).
5. В течение времени *t* эксплуатируются 500 приборов. Каждый прибор имеет надежность 0,98 и выходит из строя независимо от других. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что доля надежных приборов отличается от 0,98 не более чем на 0,1 (по абсолютной величине).
6. Вероятность сдачи в срок всех экзаменов студентом факультета равна 0,7. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что доля сдавших в срок все экзамены из 2000 студентов заключена в границах от 0,66 до 0,74.
7. Бензоколонка *N* заправляет легковые и грузовые автомобили. Вероятность того, что проезжающий легковой автомобиль подъедет на заправку, равна 0,3. С помощью неравенства Чебышева найти границы, в которых с вероятностью, не меньшей 0,79, находится доля заправившихся в течение 2 ч легковых автомобилей, если за это время всего заправилось 100 автомобилей.
8. В среднем 10% работоспособного населения некоторого региона – безработные. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что уровень безработицы среди обследованных 10 000 работоспособных жителей города будет в пределах от 9 до 11% (включительно).
9. Выход цыплят в инкубаторе составляет в среднем 70% числа заложенных яиц. Сколько нужно заложить яиц, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,95, ожидать, что отклонение числа вылупившихся цыплят от математического ожидания их не превышало 50 (по абсолютной величине)? Решить задачу с помощью:

а) неравенства Чебышева;

б) интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

1. Опыт работы страховой компании показывает, что страховой случай приходится примерно на каждый пятый договор. Оценить с помощью неравенства Чебышева необходимое количество договоров, которые следует заключить, чтобы с вероятностью 0,9 можно было утверждать, что доля страховых случаев отклонится от 0,1 не более чем на 0,01 (по абсолютной величине). Уточнить ответ с помощью следствия из интегральной теоремы Муавра – Лапласа.
2. В целях контроля из партии в 100 ящиков взяли по одной детали из каждого ящика и измерили их длину. Требуется оценить вероятность того, что вычисленная по данным выборки средняя длина детали отличается от средней длины детали во всей партии не более чем на 0,3 мм, если известно, что среднее квадратическое отклонение не превышает 0,8 мм.
3. Сколько нужно произвести измерений, чтобы с вероятностью, равной 0,9973, утверждать, что погрешность средней арифметической результатов этих измерений не превысит 0,01, если измерение характеризуется средним квадратическим отклонением, равным 0,03?

**7 ГЛАВА**

**Элементы теории случайных процессов и теории массового обслуживания**

В главе рассматриваются:

* определение случайного процесса и его характеристики, понятие марковского случайного процесса;
* основные понятия теории массового обслуживания;
* потоки событий;
* уравнение Колмогорова;
* СМО с отказами;
* метод Монте-Карло.

**Типовые задачи**

**Пример 7.1**

Случайный процесс определяется формулой *X(t) = Xcoswt,* где *X –* случайная величина. Найти основные характеристики этого процесса, если *М(Х) = а, D(X) = а2.*

**Решение**

На основании свойств математического ожидания и дисперсии имеем:





Корреляционную функцию найдем по формуле (7.1):





Нормированную корреляционную функцию найдем по формуле (7.2):



**Пример 7.2**

Построить граф состояний следующего случайного процесса: устройство *S* состоит из двух узлов, каждый из которых в случайный момент времени может выйти из строя, после чего мгновенно начинается ремонт узла, продолжающийся заранее неизвестное случайное время.

**Решение**

Возможные состояния системы: *S0* – оба узла исправны; *S1* – первый узел ремонтируется, второй исправен; *S2* – второй узел ремонтируется, первый исправен; *S3* - оба узла ремонтируются. Граф системы приведен на рис. 7.4.

Стрелка, направленная, например, из *S0 в S1,* означает переход системы в момент отказа первого узла, из *S1* в *S0* – переход в момент окончания ремонта этого узла.

На графе отсутствуют стрелки из *S0* в *S3* и из *S1* в *S2*. Это объясняется тем, что выходы узлов из строя предполагаются независимыми друг от друга и, например, вероятностью одновременного выхода из строя двух узлов (переход из S0 в *S3)* или одновременного окончания ремонтов двух узлов (переход из *S3*в *S0)* можно пренебречь.

**Пример 7.3**

На автоматическую телефонную станцию поступает простейший поток вызовов с интенсивностью альфа = 1,2 вызовов в минуту. Найти вероятность того, что за две минуты:

а) не придет ни одного вызова;

б) придет ровно один вызов;

в) придет хотя бы один вызов.

**Решение**

а) Случайная величина *X* – число вызовов за две минуты – распределена по закону Пуассона с параметром λτ = 1,2\*2 = 2,4. Вероятность того, что вызовов не будет (m = 0), по формуле (7.5):

.

б) Вероятность одного вызова (m = 1):

.

в) Вероятность хотя бы одного вызова:

.

**Пример 7.4**

Найти предельные вероятности для системы *S* из примера 7.2, граф состояний которой приведен на рис. 7.4, при λ01 = 1, λ02 = 2, λ10 = 2, λ13 = 2, λ20 = 3, λ23 = 1, λ31 = 3, λ32 = 2.

**Решение**

Система алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим для данной системы, имеет вид (7.14) или

 (7.15)

(Здесь вместо одного «лишнего»уравнения системы (7.14) записали нормировочное условие(7.12).)

Решив систему (7.15), получим p0 = 0,40, p1 = 0,20, p2 = 0,27, p3 = 0,13, т.е. в предельном стационарном режиме системе *S* в среднем 40% времени будет находиться в состоянии *S*0 (оба узла исправны), 20% - в состоянии *S*1 (первый узел ремонтируется, второй работает), 27% - в состоянии *S*2 (второй узел ремонтируется, первый работает) и 13% времени – в состоянии *S*3 (оба узла ремонтируются).

**Пример 7.5**

Найти средний чистый доход от эксплуатации в стационарном режиме системы *S* в условиях примеров 7.2 и 7.4, если известно, что в единицу времени исправная работа первого и второго узлов приносит доход соответственно в 10 и 6 ден. ед., а их ремонт требует затрат соответственно в 4 и 2 ден. ед. Оценить экономическую эффективность имеющейся возможности уменьшения вдвое среднего времени ремонта каждого из двух узлов, если при этом придется вдвое увеличить затраты на ремонт каждого узла (в единицу времени).

**Решение**

Из примера 7.4 следует, что в среднем первый узел исправно работает долю времени, равную *p0+ р2 = 0,40 +* 0,27 = 0,67, а второй узел – *p0 + р1 = 0,40* + 0,20 = 0,60. в то же время первый узел находится в ремонте в среднем долю времени, равную *р1 + р3 =* 0,20 + 0,13 = 0,33, а второй узел – *р2+р3=* =0,27+0,13=0,40. Поэтому средний чистый доход в единицу времени от эксплуатации системы, т.е. разность между доходами и затратами, равен

*D* = 0,67\*10+0,60\*6-0,33\*4-0,40\*2 = 8,18 ден. ед.

Уменьшение вдвое среднего времени ремонта каждого из узлов в соответствии с (7.10) будет означать увеличение вдвое интенсивностей потока «окончаний ремонтов» каждого узла, т.е. теперь λ10 = 4*,* λ*20 = 6,* λ31 = 6, λ32 = 4 и система линейных алгебраических уравнений (7.14), описывающая стационарный режим системы *S,* вместе с нормировочным условием (7.12) примет вид:



Решив систему, получим *р0 =* 0,60, *р1 =* 0,15, *р2 =*0,20, *р3 =* 0,05.

Учитывая, что *р0 + р2 =*0,60 + 0,20 = 0,80, *р0 + р1* = 0,60 + 0,15 = 0,75, *р1 + р3 =* 0,15 + 0,05 = 0,20, *р2 + р3 =* 0,20 + 0,05 = 0,25, а затраты на ремонт первого и второго узлов составляют теперь соответственно 8 и 4 ден. ед., вычислим средний чистый доход в единицу времени:

*D1* = 0,80\*10+0,75\*6-0,20\*8-0,25\*4 = 9,9 ден. ед.

Так как *D1* больше *D* (примерно на 20%), то экономическая целесообразность ускорения ремонтов узлов очевидна.

**Пример 7.6**

Процесс гибели и размножения представлен графом (рис.7.8). Найти предельные вероятности состояний.

**Решение**

По формуле (7.20) найдем

,

по (7.21)

, ,

т.е. в установившемся стационарном режиме в среднем 70,6% времени система будет находится в состоянии *S0*, 17,6% - в состоянии *S1* и 11,8% - в состоянии *S2.*

**Пример 7.7**

Известно, что заявки на телефонные переговоры в телевизионном ателье поступают с интенсивностью Я, равной 90 заявок в час, а средняя продолжительность разговора по телефону *to6 – 2* мин. Определить показатели эффективности работы СМО (телефонной связи) при наличии одного телефонного номера.

**Решения**

Имеем λ = 90 (1/ч), tоб = 2 мин. Интенсивность потока обслуживаний μ = 1/ tоб = 1/2 = 0,5 (1/мин) = 30 (1/ч). По (7.24) относительная пропускная способность СМО *Q =* 30/(90+30) = 0,25, т.е. в среднем только 25% поступающих заявок осуществят переговоры по телефону. Соответственно вероятность отказа в обслуживании составит *PОТК*=0,75 (см. (7.25)). Абсолютная пропускная способность СМО по (7.26) A=90\*0,25=22,5, т.е. в среднем в час будут обслужены 22,5 заявки на переговоры. Очевидно, что при наличии только одного телефонного номера

СМО будет плохо справляться с потоком заявок.

**Пример 7.8**

В условиях примера 7.7 определить оптимальное число телефонных номеров в телевизионном ателье, если условием оптимальности считать удовлетворение из каждых 100 заявок на переговоры в среднем не менее 90 заявок.

**Решение**

Интенсивность нагрузки канала по формуле (7.28) *р*=90/30=3, т.е. за время среднего (по продолжительности) телефонного разговора tоб = 2 мин поступает в среднем 3 заявки на переговоры.

Будем постепенно увеличивать число каналов (телефонных номеров) *п* = 2, 3, 4,... и определим по формулам (7.29), (7.32), (7.33) для получаемой n-канальной СМО характеристики обслуживания. Например, при *п =* 2 *po*=(1 + 3 + 32/2!)-1 = 0,118 ≈ 0,12;

Q = 1-(32/2!)\*0,118 ≈ 0,471; *А* = 90\*0,471 = 42,4.

Значение характеристик СМО сведем в табл. 7.1.

Таблица 7.1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Характеристика обслуживания* | *Обозначение* | *Число каналов (телефонных номеров)* |
| *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* |
| Относительная пропускная способность | Q | 0,25 | 0,47 | 0,65 | 0,79 | 0,90 | 0,95 |
| Абсолютная пропускная способность | A | 22,5 | 42,4 | 58,8 | 71,5 | 80,1 | 85,3 |

По условию оптимальности *Q ≥* 0,9, следовательно, в телевизионном ателье необходимо установить 5 телефонных номеров (в этом случае *Q* = 0,90 – см. табл. 7.1). При этом в час будут обслуживаться в среднем 80 заявок (*А =* 80,1), а среднее число занятых телефонных номеров (каналов) по формуле (7.34) ** = 80, 1/30 = 2,67.

**Пример 7.9**

В вычислительный центр коллективного пользования с тремя ЭВМ поступают заказы от предприятий на вычислительные работы. Если работают все три ЭВМ, то вновь поступающий заказ не принимается, и предприятие вынуждено обратиться в другой вычислительный центр. Среднее время работы с одним заказом составляет 3 ч. Интенсивность потока заявок 0,25 1/ч. Найти предельные вероятности состояний и показатели эффективности работы вычислительного центра.

**Решение**

По условию *п=3, λ*=0,25 (1/ч), *to6* =3 (ч). Интенсивность потока обслуживаний μ*=1/to6* =1/3=0,33. Интенсивность нагрузки ЭВМ по формуле (7.28) *р*=0,25/0,33=0,75. Найдем предельные вероятности состояний:

по формуле (7.29):

p0=(1+0,75+0,752/2!+0,753/3!)-1=0,476;

по формуле (7.30):

p1 = 0,75\*0,476 = 0,357; p2 = (0,752/2!)\*0,476 = 0,134; p3 = (0,753/3!)\*0,476 = 0,033,

т.е. в стационарном режиме работы вычислительного центра в среднем 47,6% времени нет ни одной заявки, 35,7% – имеется одна заявка (занята одна ЭВМ), 13,4% – две заявки (две ЭВМ), 3,3% времени – три заявки (заняты три ЭВМ).

Вероятность отказа (когда заняты все три ЭВМ), таким образом, *Р0ТК = р3 =* 0,033.

Согласно формуле (7.32) относительная пропускная способность центра *Q* = 1 – 0,033 = 0,967, т.е. в среднем из каждых 100 заявок вычислительный центр обслуживает 96,7 заявок.

По формуле (7.33) абсолютная пропускная способность центра *А* = 0,250,967 = 0,242, т.е. в один час в среднем обслуживается 0,242 заявки.

Согласно формуле (7.34) среднее число занятых ЭВМ *к =* = 0,242/0,33 = 0,725, т.е. каждая из трех ЭВМ будет занята обслуживанием заявок в среднем лишь на 72,5/3 = 24,2%.

При оценке эффективности работы вычислительного центра необходимо сопоставить доходы от выполнения заявок с потерями от простоя дорогостоящих ЭВМ (с одной стороны, здесь высокая пропускная способность СМО, а с другой – значительный простой каналов обслуживания) и выбрать компромиссное решение.

Задания

1. Случайный процесс определяется формулой X(t)= *Хе(-t) (t* > 0), где *X* – случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами *а* и а2. Найти математическое ожидание, дисперсию, корреляционную и нормированную корреляционную функции случайного процесса.
2. Построить граф состояний следующего случайного процесса: система состоит из двух автоматов по продаже газированной воды, каждый из которых в случайный момент времени может быть либо занятым, либо свободным.
3. Построить граф состояний системы *S,* представляющей собой электрическую лампочку, которая в случайный момент времени может быть либо включена, либо выключена, либо выведена из строя.
4. Среднее число заказов на такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно 3. Найти вероятность того, что за две минуты поступит:

а) 4 вызова;

б) хотя бы один;

в) ни одного вызова.

(Поток заявок простейший.)

1. Найти предельные вероятности для систем *S,* граф которых изображен на рис. 7.11 и 7.12.

1. Рассматривается круглосуточная работа пункта проведения профилактического осмотра автомашин с одним каналом (одной группой проведения осмотра). На осмотр и выявление дефектов каждой машины затрачивается в среднем 0,5 ч. На осмотр поступает в среднем 36 машин в сутки. Потоки заявок и обслуживаний – простейшие. Если машина, прибывшая в пункт осмотра, не застает ни одного канала свободным, она покидает пункт осмотра необслуженной. Определить предельные вероятности состояний и характеристики обслуживания профилактического пункта осмотра.
2. Решить задачу 7.15 для случая *п* = 4 канала (групп проведения осмотра). Найти минимальное число каналов, при котором относительная пропускная способность пункта осмотра будет не менее 0,9.
3. Одноканальная СМО с отказами представляет собой одну телефонную линию, на вход которой поступает простейший поток вызовов с интенсивностью 0,4 вызовов/мин. Средняя продолжительность разговора 3 мин.; время разговора имеет показательное распределение. Найти предельные вероятности состояний и характеристики обслуживания СМО. Сравнить пропускную способность СМО с номинальной, которая была бы, если разговор длился в точности 3 мин., а заявки шли одна за другой регулярно, без перерывов.
4. Имеется двухканальная простейшая СМО с отказами. На ее вход поступает поток заявок с интенсивностью 4 заявки/ч. Среднее время обслуживания одной заявки 0,8 ч. Каждая обслуженная заявка приносит доход 4 ден. ед. Содержание каждого канала обходится 2 ден. ед./ч. Выяснить, выгодно или невыгодно в экономическом отношении увеличить число каналов до трех.

***Задания по вариантам***

|  |  |
| --- | --- |
| **Варианты** | **Главы** |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
| 1 | 1 | 15 | 28 | 8.2 | 25 | 3 | 9 |
| 2 | 3 | 11 | 18 | 9 | 16 | 14 | 2 |
| 3 | 6 | 19.a | 30 | 2 | 12 | 2.a | 4.a |
| 4 | 10 | 22.a | 6 | 14 | 4 | 9 | 7 |
| 5 | 14 | 24 | 1 | 18 | 11 | 13 | 6 |
| 6 | 19 | 9 | 13 | 3.ав | 23 | 5 | 8 |
| 7 | 21 | 5 | 17 | 17 | 3 | 2.б | 5 |
| 8 | 2 | 18 | 9 | 10 | 30 | 12 | 3 |
| 9 | 9 | 17 | 29 | 6.1 | 28 | 1 | 2 |
| 10 | 16 | 23 | 3 | 16.б | 13 | 7 | 4.в |
| 11 | 23 | 1 | 12 | 14 | 5 | 11.а | 1 |
| 12 | 7 | 14 | 25 | 3.бв | 24 | 13 | 9 |
| 13 | 4 | 21 | 14 | 20 | 2 | 2.б | 8 |
| 14 | 11 | 15 | 21 | 4 | 17 | 6 | 3 |
| 15 | 20 | 8 | 19 | 6.2 | 9 | 13 | 4.б |
| 16 | 8 | 22.б | 7 | 19 | 10 | 3 | 5 |
| 17 | 12 | 20 | 26 | 1 | 20 | 8 | 2 |
| 18 | 5 | 16 | 8 | 15 | 6 | 14 | 7 |
| 19 | 15 | 13.б | 24 | 5.ав | 21 | 9 | 1 |
| 20 | 18 | 2 | 11 | 20 | 1 | 14 | 4.а |
| 21 | 26 | 5 | 15 | 2 | 29 | 4 | 5 |
| 22 | 22 | 10 | 20 | 7 | 14 | 11.б | 9 |
| 23 | 13 | 19.б | 23 | 11 | 22 | 10 | 1 |
| 24 | 17 | 23 | 2 | 16.а | 26 | 7 | 3 |
| 25 | 24 | 6 | 27 | 12 | 18 | 2.а | 8 |
| 26 | 28 | 3 | 10 | 5.бв | 15 | 4 | 4.а |
| 27 | 25 | 12 | 4 | 19 | 8 | 1 | 6 |
| 28 | 30 | 4 | 16 | 13 | 27 | 2.б | 7 |
| 29 | 29 | 7 | 22 | 8.1 | 19 | 11.а | 4.а |
| 30 | 27 | 13.а | 5 | 15 | 7 | 3 | 9 |