***Пошукова робота на тему:***

*Монотонність функції, необхідні і достатні умови. Eкстремум функції однієї та декількох змінних.. Необхідні і достатні умови. Найбільше і найменше значення функції на замкнутому проміжку і в обмеженій замкнутій області.*

**План**

* Монотонність функції, необхідні і достатні умови
* Екстремум функції, необхідні і достатні умови
* Найбільше і найменше значення функції на замкнутому проміжку
* Екстремум функції декількох змінних.
* Необхідні і достатні умови екстремуму для функції двох змінних
* Найбільше та найменше значення функції в обмеженій замкнутій області

**1. Екстремуми функцій**

**1.1. Зростання і спадання функцій**

Дамо ряд означень. Припустимо, що функція визначена на деякому проміжку  а  є внутрішньою точкою цього проміжку.

Означення.  Функція називається *зростаючою (спадною)* в точці , якщо існує окіл  точки , який міститься в проміжку  і є такий, що    для всіх  і ) для всіх .

Означення.  Якщо  функція є *зростаючою (спадною)* в кожній внутрішній точці проміжку  то вона називається зростаючою (спадною) на цьому проміжку.

2.Достатні ознаки зростання (спадання) диференційованої функції.

Теорема. Якщо функція  у внутрішній точці  має похідну  і , то функція  в точці зростає (спадає).

Д о в е д е н н я. Розглянемо випадок, коли .

Скористаємось означенням похідної

,

де .

Тоді з попередньої рівності та умови теореми маємо

.

При цьому знайдеться окіл  точки  такий, що для всіх крім, можливо, точки  справджуватиметься нерівність .

Нехай , тобто . Тоді з попередньої нерівності маємо, що й .

Нехай , тобто . Тоді з тієї самої нерівності дістаємо, що .

Отже, існує окіл точки  такий, що для всіх  матимемо , а для всіх  , а це й означає, що в точці  функція є зростаючою.

Теорему доведено.

Аналогічно доводиться випадок, коли .

3. Інтервали, на яких функція зростає (спадає), називаються інтервалами монотонності функції. Згідно з доведеним, у диференційованої функції  на інтервалі зростання , на інтервалі спадання . Якщо похідна  функції неперервна, то розділяти інтервали монотонності можуть лише точки, в яких , оскільки зміна знаку неперервної функції можлива лише при переході через її нуль. Точка, в якій , називається точкою стаціонарності функції . Зауважимо, що кожна точка стаціонарності розділяє інтервали монотонності (наприклад, функції і  мають точку стаціонарності ; ця точка для розділяє, а для  не розділяє інтеграли монотонності похідної  функції , то інтервали монотонності можуть розділяти не лише точки стаціонарності . Наприклад, для  точка  розділяє інтервали монотонності, в цій точці і похідна функції  не існує.

Обмежимося розглядом функцій, диференційованих скрізь, крім, можливо, скінченого числа точок, в їх областях визначення і які мають не більше скінченого числа точок стаціонарності. Якщо функція розглянутого класу, то доводиться, що її інтервали монотонності розділяються або точками стаціонарності , або точками, в яких похідна функції  не існує. Але ж не кожна така точка буде розділяти інтервали монотонності (рис. 6.11).

Рис.6.11

Сформулюємо правила дослідження функцій на зростання і спадання.

10.Знаходимо точки із області означення функції, в яких похідна функції дорівнює нулю або не існує. Ці точки називають критичними для функції за першою похідною.

Критичні точки розбивають область означення функції  на інтервали, на кожному із яких похідна  зберігає знак.

20. Досліджуємо знак   на кожному із цих інтервалів.

Якщо на інтервалі , то це інтервал зростання, якщо , інтервал спадання.

Приклад.

Знайти інтервал зростання і спадання функції.

Р о з в ’ я з о к. Обчислимо похідну

.

Знайдемо точки, в яких  . Це точки, в яких . Розв’яжемо цю нерівність:

.

Отже, в інтервалі   функція зростає; в інтервалах

 функція спадає.

**1.2. Екстремуми функцій**

Нехай функція  визначена  в деякій області  і точка  внутрішньою точкою

області .

Означення. Функція  в точці має максимум, якщо для всіх точок деякого околу  цієї точки виконується нерівність

           .                                        (6.85)

Означення. Функція  в точці  має мінімум, якщо для всіх точок деякого околу  цієї точки виконується нерівність

             .                                       (6.86)

Максимуми і мінімуми функції називаються її екстремумами.

**Необхідні умови існування екстремуму.**

Теорема.1. Якщо диференційована функція  має в точці  екстремум, то .

Д о в е д е н н я. Нехай, наприклад, функція  має в точці  максимум. Тоді  при достатньо малому , а тому

Переходячи до границі при , одержимо:

Згідно з умовою  - диференційована функція в точці . Тому одержані границі дорівнюють . Таким чином, маємо  і , отже .

Теорема 2. У точці екстремуму функції кількох змінних кожна її частинна похідна першого порядку або дорівнює нулю, або не існує.

Д о в е д е н н я. Нехай функція  в точці  має максимум – для конкретності. Зафіксуємо значення всіх змінних, крім однієї, наприклад , поклавши їх рівними між собою: .

Тоді функція стає функцією однієї змінної :

.

За умовою теореми функція  має максимум, тобто,

Остання нерівність означає, що функція як функція однієї змінної  в точці  має максимум. На основі вище доведеної теореми виводимо, що в точці  похідна дорівнює нулю або не існує. Аналогічно доведемо, що і всі інші частинні похідні першого порядку в точці  дорівнюють нулю або не існують.

Наслідок. В точці екстремуму  диференційованої функції  виконуються рівності

                             (6.87)

Означення. Точки, в яких частинні похідні першого порядку деякі функції дорівнюють нулю або не існують, називаються критичними точками.

Із доведеної теореми витікає, що екстремум функції кількох змінних може досягатись лише в критичних точках.

Для диференційованої функції двох змінних  критичні точки знаходяться із системи рівнянь

                                                     (6.88)

Приклад.

Знайти критичні точки функції

Р о з в ’ я з о к. Прирівнюючи до нуля частинні похідні даної функції, одержуємо систему рівнянь для знаходження координат критичних точок:

Функція  має чотири критичні точки:

.

**Достатні умови існування екстремуму.**

Теорема. Нехай  є критична точка функції , яка в цій точці є неперервною, і нехай існує окіл точки , в якому  має похідну , крім, можливо, точка . Тоді:

1) якщо в інтервалі  похідна , а в інтервалі  похідна , то  є точкою максимуму функції ;

2) якщо в інтервалі , а в інтервалі  то  є точкою мінімуму функції ;

3) якщо в обох інтервалах  і  похідна має той самий знак ( набуває або тільки додатних, або тільки від’ємних значень), то  не є екстремальною точкою функції .

Перше правило дослідження функції на екстремум. Щоб дослідити функцію  на екстремум, треба:

1) знайти стаціонарні точки даної функції (для цього слід розв’язати рівняння , причому з його коренів вибрати тільки дійсні і ті, які є внутрішніми точками області існування функції).

            2) знайти точки, в яких похідна  не існує (функціяв цих точках існує);

            3) у кожній критичній точці перевірити зміну знака похідної першого порядку.

            Приклади.

1.      Дослідити на екстремум функцію.

            Р о з в ’ я з о к. 1). Знаходимо

.

Розв’язуємо рівняння :

Звідси визначаємо стаціонарні точки

2). Точок, в яких похідна не існує, немає. Отже, стаціонарні точки є єдиними критичними точками заданої функції.

3). Розглянемо інтервали

.

            Для визначення знака похідної обчислимо останню в довільних точках, які належать даним інтервалам. Візьмемо, наприклад, такі точки: .

            Тоді:

            Отже, при переході через точку  похідна змінює знак з “+” на “-” ; у цій точці функція має екстремум який дорівнює при переході через точку  похідна змінює знак “-”  на “+”; у цій точці функція має мінімум, який дорівнює ;          при переході через критичну точку  похідна знак не змінює; точка не є екстремальною для заданої функції

            Теорема. Нехай точка  є стаціонарною для функції  і нехай в цій точці існує похідна другого порядку , яка не

дорівнює нулю, . Тоді, якщо  то є точкою

мінімуму; якщо , - точкою максимуму функції .

            Друге правило дослідження функції на екстремум. Щоб дослідити функцію на екстремум, треба знайти:

1)      стаціонарні точки заданої функції

2)      похідну другого порядку в стаціонарній точці.

3)      якщо то в цій точці функція має максимум, якщо мінімум.

Приклад. Користуючись другим правилом, дослідити функцію на екстремум.

Р о з в ’ я з о к. Знаходимо похідну . Прирівнюємо її до нуля і розв’язуємо рівняння

Звідси дістаємо такі стаціонарні точки: .

            Знаходимо похідні другого порядку: . Підставляємо у вираз для  знайдені значення  і :

.

            Отже,  є точкою максимуму, а  - точкою мінімуму функції , причому максимум і мінімум відповідно дорівнюють .

            **Достатня умова екстремуму функції двох змінних.**

            Теорема. Нехай в околі критичної точки  функція  має неперервні частинні похідні до другого порядку включно. Розглянемо вираз

.

            Тоді

1) якщо , то в точці  функція  має екстремум; максимум, якщо , і мінімум, якщо ,

2) якщо  , то в точці  функція  екстремуму не має.

У випадку , коли , екстремум в точці  може бути, може і не бути.

            Приклад. Знайти екстремум функції .

            Р о з в ’ я з о к. Знаходимо критичні точки функції :

            Функція має дві критичні точки: .

            Знаходимо  частинні похідні другого порядку:

            Дослідимо характер першої критичної точки :

.

Отже, в точці  функція не має ні максимуму, ні мінімуму.

            Дослідимо характер другої точки :

            Оскільки , то в точці  функція  має мінімум: .

**6.15.3. Знаходження найбільшого і найменшого значень функції**

1. Нехай на відрізку  задана неперервна функція , яка за теоремою Вейерштрасса на даному відрізку сягає  свого найбільшого і свого найменшого значення. Проте теорема Вейерштрасса не дає способу знаходження тих точок відрізка , в яких функція дорівнює своєму найбільшому (найменшому) значенню. Теорема тільки стверджує, що такі точки існують. Це можуть бути як внутрішні точки відрізка, так і його кінці.

Щоб знайти найбільше (найменше) значення неперервної функції на відрізку , треба знайти максимуми і мінімуми і порівняти їх із значеннями функції, яких вона набуває на кінцях відрізка. Найбільше (найменше) число серед утвореної множини і буде найбільшим  (найменшим) значенням функції, заданої на відрізку .

            Приклад.        Знайти найбільше і найменше значення функції  на відрізку .

            Р о з в  ’я з о к. Знаходимо стаціонарні точки. Для цього обчислимо похідну   Прирівнюючи цю похідну до нуля і розв’язуючи рівняння

,

дістаємо стаціонарні точки .

            Точок, в яких похідна не існує, немає.

            Обчислимо значення функції в точках (ці точки належать відрізку ), а також на кінцях відрізка, тобто в точках . Маємо

            Отже, найбільше значення становить , найменше -

            Щоб знайти найбільше (найменше) значення функції  замкненій області , потрібно знайти значення функції у всіх критичних точках і порівняти їх з найбільшими (найменшими) значеннями функції на границях області: найбільше і найменше із цих значень і буде найбільшим і найменшим значенням функції в даній області.

            Приклад.        Знайти найбільше і найменше значення функції  в трикутнику (рис. 6.14), обмеженому прямими .

            Р о з в ’ я з о к.

            Знайдемо критичні точки функції:

;

                     ;



Оскільки в даній області , то

У критичній точці функція приймає значення

.



                   Рис.6.12

            Дослідимо поведінку функції на границях області.

            На прямих  і . На прямій  ця функція є функцією однієї змінної , оскільки ;

.

            Знайдемо найбільше і найменше значення функції  на відрізку :

            Критична точка . В цій точці . На кінцях відрізка . Отже, функція  досягає найбільшого значення в точці , а найменшого – в точці . Найбільше значення , найменше значення .

            Зауваження. До знаходження відповідно найбільшого чи найменшого значення певної функції зводиться цілий ряд практичних задач.