Министерство Образования и Науки Украины
Харьковский национальный университет

А.А. Тензор, В.В. Невязкин

Краткий курс теории функции Зильберта

(на русском и украинском языках)

ТОМ 1

Харьков 2007

DFGKJH5676

Издание первое и последнее

ОГЛАВЛЕНИЕ:

Математический анализ ____ 4
Линейная алгебра ____ 5
Дифференциальные уравнения ____ 6
Теоретическая механика ____ 6
Функциональный анализ ____ 7
Теория вероятности ____ 8
Комплексный анализ ____ 9
Дифференциальная геометрия ____ 10
Теория управления ____ 14
Численные методы ____ 15
Задачи ____ 16
Список использованной литературы ____ 18

МАТАНАЛІЗ

Теорема (Зільберта-Штольца)
Функція Зільберта З(x) має в околі точки x похідні до (n–1) порядку включно.
Доведення (*від приємного*). Припустимо, що З(x) має похідні до (n+8) порядку включно. Це дурниця.

Теорема (Штрассермана)
Функція Штрассермана ШТР(х,з,ю) розкладається в ряд Тейлора з залишковим членом у вигляді функції Зільберта З(x).
Доведення. Оскільки Функція Штрассермана досить приємна на вигляд, ми можемо записати нерівність:

$$\text{ШТР}(\text{х},\text{з},\text{ю}) \neq \text{ШТР}(\mu,-1,\frac{5}{7}),\ \mu = 0,1,...$$

Отримали суперечність. Теорему доведено.

Зауваження 1. Ви спитаєте, при чому у попередній теоремі функція Зільберта? Відповідаємо – просто так!

Зауваження 2. Значення функції ШТР(π,з,ю) покладемо рівним $\hat{\pi}$ (пі з дахом):

$$\text{ШТР}(\pi,\text{з},\text{ю}) \equiv \hat{\pi}\ .$$

Якщо це не так, доповнимо інтеграл Пуассона порожніми брусами. Це корисна вправа.

Означення. Функція Штрассермана ШТР(х,з,ю), що діє на функцію Зільберта З(x), називається *оператором блабла* ∇ .

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Твердження

Якщо ранг матриці Якобі J

$$J = \left(\begin{array}{ccc:c:cc}
a_{11}^{6} & b_{12}^{7} & c_{13}^{8} & & 0 & n_{1n}^{n+m+k-3} \\
\sqrt{\mathrm{a}} & \sqrt{\mathrm{b}} & \sqrt{\mathrm{c}} & & 5 & 0 \\
am & bm & cm & & 0 & 11 \\
\hdashline
 & & & & & \\
\hdashline
 & & & & & \\
\hdashline
-4 & 0 & 18 & & 0 & 1 \\
k & k+1 & k+2 & & 1 & 0
\end{array}\right)$$

дорівнює –1, та у тому випадку, коли власні вектори ортонормованого базису кореневого підпростору Зільберта

$$< \alpha, \beta, \gamma, \sigma, ..., \chi_1, \omega, \psi >$$

не усі нулі, можна записати тотожність:

$$\sum_{j=-9}^{800} arcctg(\pi - 11e^{j}) \equiv \lim_{k \to 1} [\sqrt[0]{\infty}]^{k}$$

Доведення. Приймемо цю теорему на віру.

Наслідки

Згідно до цієї теорії можна потрапити до лікарні.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Означення. *Матрицею Петросяна* називають матрицю П(x), у якої елементи, що стоять на головній диагоналі, належать функції Зільберта З(x).

Означення. Детермінант матриці Петросяна – *петросяніан* П[З(x)].

Теорема (про замкненість петросяніана)
Якщо петросяніан задовольняє умовам теореми Зільберта-Штольца, і виконана достатня умова теореми Штрассермана, то петросяніан П[З(x)] – замкнена множина на інтервалі
$[\frac{7}{8}, \pi - \mathrm{arctg}\mu]$, де μ – неперервна функція.

Доведення. Наш інтервал $[\frac{7}{8}, \pi - \mathrm{arctg}\mu]$ – компакт $\Rightarrow$ за теоремою Вейєрштраса-Ляпунова, він має скінченне покриття. Спрямуємо μ на $+\infty \setminus \{2\}$ та підставимо правий кінець інтервала у петросяніан. Отримали:

$$\text{П}[\text{З}\,(\pi - \mathrm{arctg}\mu)] = \frac{7}{802},$$

а це означає, що петросяніан – замкнена множина, оскільки $\frac{7}{802} \in \text{З}(x)$. Теорему доведено.

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Принцип локалізації в'язей до (n-8) порядку включно

Якщо спочатку подивитися наліво, а потім направо, то, використовуючи метод віртуальних ітерацій, можемо найкоротшим шляхом прийти на схід.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Неравенство Треугольника*.

***Треугольник И.И. – выдающийся Харьковский математик, один из основателей теории функции Зильберта.**

Теорема 1
Пусть α, b, ξ – стороны треугольника.
Тогда $\alpha + b \rhd \xi$. (1)

Замечание. "$\rhd$" – знак *"больше так сказать"* – это то же самое, что знак ">" в пространстве Римана, только в пространстве Штрассермана ШТР^n.

Теорема 2
В принятых обозначениях $b + \xi \rhd \alpha$. (8)

Теорема 3
В принятых обозначениях $\alpha + \xi \rhd b$. (9)

Доказательство теоремы 1 ***(от приятного).*** Пусть это не так, то есть $\alpha + b \lhd \xi$. (11)
Но это противоречит аксиоматике Зильберта, согласно которой все теоремы верны!

Упражнение. Теоремы 2,3 доказать самостоятельно.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

В теории функции Зильберта существует сходимость “так сказать”, “как надо” и ”как не надо”, а именно:

Определение. Последовательность $\{\xi_k\}_{k=-10}^{\frac{\infty}{8}}$ *сходится “так сказать”* к числу $\xi \in \mathbf{Z}$ (пространство Зильберта) $\Leftrightarrow$ выполнены условия:

1. положим $\xi = \delta$,
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : |\xi_k - \delta| > \varepsilon$.
3. мат. ожидание функции Зильберта М[З(х)] равно константе Бернулли.

Обозначается $\xi_k \xrightarrow{\text{так сказать}} \xi$.

Определение. Последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty^2}$ *сходится “как надо”* к числу $\xi \in \mathbf{Z}$**:** $\xi_k \xrightarrow{К.Н.} \xi$ $\Leftrightarrow$ дисперсия случайной величины ξ_k равна интегралу Пуассона от трансцендентной функции.

Определение. Последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty^2}$ *сходится “как не надо”* к числу $\xi \in \mathbf{Z}$**:** $\xi_k \xrightarrow{К.Н.Н.} \xi$ $\Leftrightarrow$ дисперсия случайной величины ξ_k равна нулю.

Определение. Функциональная последовательность $f(\xi_k) \underset{\xi \rightrightarrows \lambda}{\rightleftarrows} \Lambda$ *коллинеарно сходится* к Λ, когда ξ равномерно сходится к λ с вероятностью $\frac{1}{k}$ $\Leftrightarrow$ $f'(\xi_k) > 0$, $\forall k$: $\lambda < k < \Lambda$.

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Теорема. Рассмотрим конформное отображение f из области D в область G:

D	а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

$$f : D \to G$$

G	а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

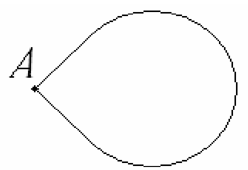
Тогда на $\forall$ факультете $\exists$ пара такая, что отображение f $\exists$ и не единственно, более того, таких отображений $\exists$ минимум два. Проверить самостоятельно.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

N-угольники в пространстве Зильберта

1. Регулярный одноугольник

Определение. *Регулярный одноугольник* – геометрическая фигура, состоящая из вершины (точки A) и дуги $(\breve{AA})$:



Теорема (о длине дуги регулярного одноугольника)
Пусть γ – регулярный одноугольник с вершиной в точке A. Возьмём точку $B \in \gamma$, $B \neq A$. Тогда длина дуги $\breve{AB}$ равна

$$l(\breve{AB}) = \int_A^B d\xi \, .$$

Замечание. Если $A=B$, то длина дуги неопределена и условно считается равной $\frac{\infty}{8}$.

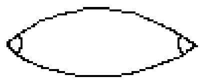
Упражнение. Доказать эту теорему самостоятельно.

2. Пространство двуугольников, измеримых по Зильберту

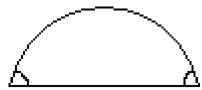
Определение. Двуугольник называется *измеримым по Зильберту*, если у него 2 угла, причём один угол – первый, а другой – второй.

Примеры

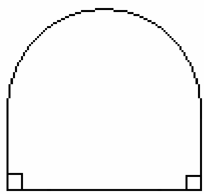
1. Простой двуугольник



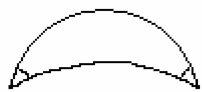
2. Прямой равноугольный двуугольник



3. Прямоугольный двуугольник



Замечание. Двуугольники бывают выпуклые и впуклые, например



Теорема

Впуклые двуугольники измеримыми по Зильберту не являются. Это следует из основной предельной теоремы Зильберта-Остроградского.

Теорема

В пространстве Зильберта $\mathbf{Z^n}$ двуугольники, измеримые по Зильберту, можно дифференцировать, интегрировать и брать от них невязку $\Leftrightarrow$ мат. ожидание косого геликоида, содержащего этот двуугольник, имеет предел, который сходится к константе Бернулли.

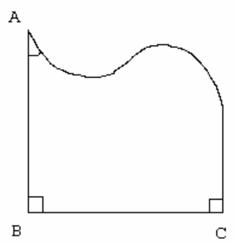
Доказательство. Клянусь Демидовичем!

3. Пространство треугольников, измеримых по Зильберту

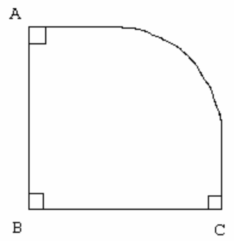
Определение. Треугольник называется *измеримым по Зильберту*, если сумма его углов больше 180^0.

Примеры

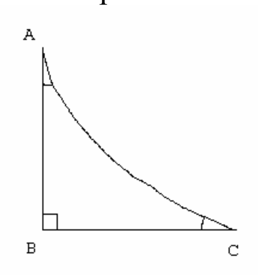
1. Треугольник Зильберта



2. Треугольник Штрассермана (штреугольник) – имеет 3 прямых угла



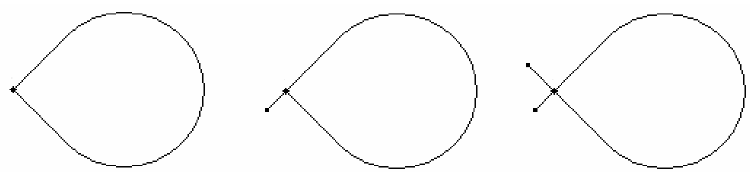
3. А этот треугольник не измерим по Зильберту



4. Классификация одноугольников

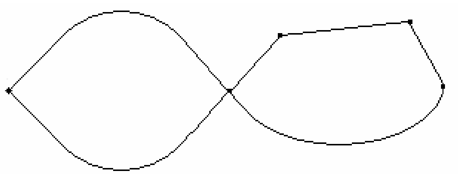
Одноугольники могут иметь 1, 2 или 3 вершины, если дуга незамкнута и имеет самопересечения.

Примеры



Замечание. Если число вершин >3, одноугольник называется *вырожденным*. Точка тоже вырожденный случай. Такие одноугольники мы рассматривать не будем.

Пример



5. Шестиугольник АТВСЕВ

Теорема. Рассмотрим шестиугольник АТВСЕВ и расположим его стороны в порядке возрастания. Тогда сумма длин его сторон в пространстве Лобачевского, умноженная на $\operatorname{cosec}\tau$, где $\tau \in (-4.7, 18]$ – дискретная функция, которая принимает 2 значения: $\{1, 15\}$ в зависимости от знака $\operatorname{cosec}\tau$.

Замечание. Эта теорема будет доказана на старших курсах.

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

Определение 1. Последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty^2}$ *очень слабо сходится* к элементу $\xi \in \mathbf{Z}$ (пространство Зильберта) $\Leftrightarrow$ мы этого хотим слабо.

Определение 2. Последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty^2}$ *очень сильно сходится* к элементу $\xi \in \mathbf{Z}$ $\Leftrightarrow$ мы этого хотим сильно.

Теорема (Коклюшкина)
Определения 1 и 2 неэквивалентны.
Доказательство. Действительно, мы же не можем одновременно хотеть одного и того же слабо и сильно! Теорема доказана.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Рассмотрим сумму с коэффициентами c_k, где

$$c_k = \frac{f_k}{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(x_k - x_l)} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f_j \prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{k-1} \dfrac{x_n - x_i}{x_j - x_i}}{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(x_k - x_i)}$$

и, пожалуй, хватит.

ЗАДАЧИ

1. Как доопределить остаточный член функции Зильберта в выколотой окрестности ∞, в точке $\{-6\}$ так, чтобы относительно винтовой линии (n–3) порядка $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ были параллельны? (Ответ – молча)

2. (Прикладная задача мат. статистики) Берём константу Бернулли и устремляем её на $\dfrac{\infty}{8}$. Вопрос: как будет вести себя на бесконечности трансцендентная функция, умноженная на константу Бернулли? (Ответ – вызывающе)

3. Доказать, что в пространстве Зильберта $\mathbf{Z}^{\mathbf{n}}$ числитель и знаменатель ортогональны, а их нормы и невязки скрещиваются.

4. Попробуйте на досуге проаппроксимировать функцию Зильберта З(x) константами Бернулли.

5. Введём в рассмотрение функцию Бюншмана $Б(x)$

$$Б(x) = \| f - \sum_{k=1}^{n} c_k y_k \|$$

Вопрос: как теперь вывести её из рассмотрения?

6. Доказать, что у всех девушек волосы одного цвета.

Решение *(методом мат. индукции)*.

1^0. При n=1 утверждение верно: у одной девушки волосы одного цвета.

$$\underbrace{\overbrace{000\ldots0}^{k}0}_{k+1} \quad \underbrace{0\overbrace{00\ldots00}^{k}}_{k+1}$$

Рис. 1.

2^0. Пусть утверждение верно при $n=k$. Докажем его для $n=k+1$. Внимательно рассмотрим $k+1$ девушку. У первых k девушек волосы одного цвета (по предположению), и у последних k девушек волосы одного цвета, значит, у $k+1$ девушки волосы одного цвета. Утверждение доказано.

<u>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ</u>:

1. В учебнике по теории функции Зильберта использованы конспекты студентов мех-мата по:
- матанализу,
- линейной алгебре,
- диффурам,
- теормеху,
- функану,
- теорверу,
- комплану,
- дифф. геометрии,
- теории управления,
- численным методам,

где все имена и теоремы вымышленные, любое сходство с уже существующими случайно.

2. Демидович Б. П. “Сборник задач и упражнений по математическому анализу”.

Также здесь фигурируют фразы и выражения некоторых преподавателей с мех-мата, кто знает, тот поймёт.

Тираж 600 экземпляров.

Цена 20 коп.