**Дослідження характеристик стійкості в системі популяційної динаміки**

**із запізненням**

1. Вступ

У багатьох застосуваннях припускається, що на поведінку піддослідної системи не впливає жодна затримка в часі, тобто майбутній стан системи не залежить від попередніх станів і визначається лише теперішнім. У таких випадках динамічна система переважно моделюється звичайними диференціальними рівняннями. Однак при глибшому вивченні виявляється, що такий погляд – це лише перше наближення до дійсного стану і реальніша модель повинна включати минулі стани системи.

Крім того, деякі задачі повністю втрачають свій зміст без розгляду “попередньої історії”. Ці положення були відомі й раніше, але теорія систем з післядією інтенсивно розвивається лише протягом останніх 50 років. Досягнення в галузі обчислювальної техніки є дуже важливими, оскільки теорія інтегрування, тобто аналітичного розв’язування, для систем з післядією не настільки успішна.

Перші системи, з якими зіткнулися дослідники, були біологічними. При дослідженні динаміки популяцій двох антагоністичних видів [7] використовувалися системи із запізненням. Р.Беллман [3] вивчав наслідки введення у кров хімічного розчину. Зауважимо, що рівняння, які описують цей процес, не є звичайними диференціальними рівняннями, оскільки повна циркуляція крові триває близько двох хвилин.

Мета цієї праці – проаналізувати систему імунного захисту організму, враховуючи запізнення в часі. Вперше модель імунного захисту людського організму була розроблена групою математиків і лікарів на чолі з Г.І.Марчуком. Як зазначає Г.І.Марчук [1], модель дала непогані результати при використанні її для лікування пневмонії та вірусного гепатиту.

2. Асимптотична стійкість

***2.1. Головні результати теорії стійкості***

Широке коло задач пов’язано з дослідженнями динаміки об’єктів, що описуються диференціальними рівняннями із запізненням:

 (2.1)

Тут – функціонал, визначений для довільного фіксованого  на множині кусково-неперервних функцій:



Одним із найзагальніших методів дослідження стійкості таких задач є прямий метод Ляпунова. Використання такої методики для систем із післядією пов’язано з двома напрямками. Перший ґрунтується на скінченно-вимірних функціях Ляпунова і використовує теореми Б.С.Разуміхіна. Однак цей підхід має недолік: не доведено необхідності цих умов стійкості. Сенс диференціально-різницевих рівнянь полягає в нескінченно-вимірних просторах. Використання скінченно-вимірних функцій Ляпунова призводить до зайвих достатніх умов.

З цієї причини М.М.Красовський [8] запропонував підійти до вивчення стійкості з точки зору дослідження процесів у функціональних просторах. Як точку простору він запропонував розглядати не вектор , а вектор-відрізок цієї траєкторії . Замість функції  він запропонував використовувати функціонал , визначений на відрізку . Використання функціоналів – це природнє узагальнення прямого методу Ляпунова для звичайних диференціальних рівнянь на рівняння із запізненням. Головний результат для автономних систем твердить [2].

**Теорема 2.1.** *Нехай існують - функціонал і неперервні функції такі, що при , при ,*

**

*Тоді незбурений роз’язок системи (1) є стійким, а кожен роз’язок обмеженим. Якщо, крім цього,  при , тоді кожен розв’язок прямує до нуля при .*

***2.2. Один загальний випадок нелінійної системи третього порядку із запізненням***

Розглянемо систему диференціальних рівнянь із запізненням:

 (2.2)

Тут  і – від’ємні константи, функції задовольняють наступні умови:

 (2.3)

де  – додатні константи.

**Теорема 2.2.** *Нехай умови* (2.3) *виконані.*

*Тоді незбурений розв’язок*  (2.2) є стійким та експоненціально -стійким.

**Доведення.** Нехай  – функція Ляпунова для скалярного рівняння:

 (2.4)

Тоді:

 

 Розглянемо функціонал, що відображає  в  вигляду:



Повна похідна функціоналу вздовж першого рівняння з (2.2) має вигляд:



Згідно з умовами (3), існує таке, що:

 (2.5)

у сфері:

. (2.6)

Функціонал  задовольняє умови:

 (2.7)



при досить великому *N*.

Нехай  – довільний розв’язок системи (2.2) з початковими умовами  зі сфери:



Розглянемо інтервал , на якому піддослідний розв’язок зодовольняє умови:



Оскільки мають місце (2.5), (2.6), (2.7), то, як випливає з теореми 2 (див. [10], стор.145), розв’язок першого рівняння з (2.2) – експоненціально x-стійкий, тобто:

 (2.8)

Уявимо функцію , яка задовольняє друге рівняння з (2.2) у наступному вигляді:

 (2.9)

Оскільки  то маємо:



Застосовуючи до останньої нерівності лему Гронуола-Беллмана, отримуємо:



Виберемо  і  такі, що мають місце нерівності:



Звідси при  має місце:



Нехай . Таким чином, нерівності мають місце для довільного . Таким же чином, як це було зроблено для , можна довести -стійкість (2.2). Теорему доведено.

**3. Система імунного захисту**

Наша подальша мета – отримати достатні умови стійкості в явному вигляді для наступної нелінійної системи:

 (3.1)

Тут . З цією метою введемо такі позначення. Нехай – довільні додатні константи.

Нехай:



**Теорема 3.1*.*** *Нехай існують додатні константи , що задовольняють нерівності:*

**

*Тоді тривіальний розв’язок (22 ) є асимптотично стійким.*

**Доведення**. Використаємо квадратичний функціонал вигляду:



що є додатньо-означеним на розв’язках системи (22). Обчислимо повну похідну функціоналу , використовуючи систему (22). Маємо:



Зробимо перетворення в усіх складових порядку, відмінного від двох. Тут береться до уваги додатність траєкторії системи. Маємо:



Ми отримали нерівність, де в правій частині є квадратична форма, що відповідає вектору:



Маємо:

.

Тут:

.

Взявши до уваги вигляд матриці , стає зрозумілим, що від’ємна визначеність  є еквівалентною виконанню нерівностей, згаданих у формулюванні теореми.

Література

1. *Нисевич Н.И., Марчук Г.И. Математическое моделирование вирусного гепатита. – М.: Наука, 1981.*
2. *Hale J. Theory of Functional-Differential Equations. Springer. – Berlin, 1977.*
3. *Bellman R., Jacques J., Kalaba R. Some mathematical aspects of chemoterapy. I: one-organ models // Bull. Math. Biophys. – 1960. – Р. 181-198.*
4. *Marzeniuk V.P. On Construction of Exponential Estimates for Linear Systems with Delay. – Advances in Difference Equations. – Gordon and Breach Science Publishers. – 1997. – Р.439-445.*
5. *Хусаинов Д.Я., Марценюк В.П. Оптимизационный метод исследования устойчивости линейных систем с запаздыванием // Кибернетика и системный аналіз. – 1996. – №4. – С. 88-93.*
6. *Хусаинов Д.Я., Марценюк В.П. Двусторонние оценки решений линейных систем с запаздыванием // Доклады НАН Украины.– 1996. – №8. – С. 8-13.*
7. *Volterra V. Sur la theorie mathmatique des phenomenes hereditaires. J. Math. Pures Appl. – 7 (1928). – Р. 249-298.*
8. *Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959.*
9. *Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1951.*
10. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971.*
11. *Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с постедействием. – М.: Наука, 1981. – 448 с.*