КОСТРОМСКОЙ ФИЛИАЛ ВОЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА РХБ ЗАЩИТЫ

Кафедра «Автоматизации управления войсками»

Только для преподавателей

*"Утверждаю"*

Начальник кафедры № 9

полковник ЯКОВЛЕВ А.Б.

«\_\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2004 г.

доцент СМИРНОВА А.И.

**"МАТРИЦЫ. МЕТОД ГАУССА"**

ЛЕКЦИЯ № 2 / 3

Обсуждено на заседании кафедры № 9

«\_\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2003г.

Протокол № \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Кострома, 2003

**Cодержание**

Введение

1. Действия над матрицами.
2. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Заключение

**Литература**

1. В.Е. Шнейдер и др., Краткий курс высшей математики,том I, гл.2,§6, 7.
2. В.С. Щипачев, Высшая математика, гл. 10, § 1, 7.

**ВВЕДЕНИЕ**

На лекции рассматривается понятие матрицы, действия над над матрицами, а также метод Гаусса для решения систем линейных уравнений. Для частного случая, так называемых квадратных матриц, можно вычислять определители, понятие о которых рассмотрено на предыдущей лекции. Метод Гаусса является более общим, чем рассмотренный ранее метод Крамера решения линейных систем. Разбираемые на лекции вопросы используются в различных разделах математики и в прикладных вопросах.

1-ый учебный вопрос **ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.**  *Прямоугольная таблица из m, n чисел, содержащая m – строк и n – столбцов, вида:*



*называется* ***матрицей размера m* × *n***

Числа, из которых составлена матрица, называются *элементами матрицы.*

Положение элемента *аi j* в матрице характеризуются двойным индексом:

первый *i* – номер строки;

второй *j* – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент.

Сокращенно матрицы обозначают заглавными буквами: *А, В, С…*

Коротко можно записывать так: **

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** *Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, т.е. m = n , называется*  ***квадратной.***

Число строк (столбцов) квадратной матрицы называется порядком матрицы.

*ПРИМЕР.*



ЗАМЕЧАНИЕ 1. Мы будем рассматривать матрицы, элементами которых являются числа. В математике и ее приложениях встречаются матрицы, элементами которых являются другие объекты, например, функции, векторы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Матрица – специальное математическое понятие. С помощью матриц удобно записывать различные преобразования, линейные системы и т.д., поэтому матрицы часто встречаются в математической и технической литературе.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.** *Матрица размера* 1× *n, состоящая из одной строки, называется*  ***матрицей – строкой.***

*Матрица размера т* ×1*, состоящая из одного столбца, называется*  ***матрицей – столбцом.***

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Нулевой матрицей*** *называют матрицу, все элементы которой равны нулю.*

Рассмотрим квадратную матрицу порядка *n:*

побочная диагональ



главная диагональ

Диагональ квадратной матрицы, идущая от верхнего левого элемента таблицы к правому нижнему, называется *главной диагональю матрицы* (на главной диагонали стоят элементы вида *а i i*).

Диагональ, идущая от правого верхнего элемента к левому нижнему, называется *побочной диагональю матрицы*.

Рассмотрим некоторые частные виды квадратных матриц.

1. Квадратная матрица называется *диагональной*, если все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю.



1. Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется *единичной*. Обозначается:



1. Квадратная матрица называется *треугольной,* если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю:

 

верхняя нижняя

треугольная матрица треугольная матрица

Для квадратной матрицы вводится понятие: *определитель матрицы*. Это определитель, составленный из элементов матрицы. Обозначается:



Ясно, что определитель единичной матрицы равен 1: ⏐*Е*⏐ = 1

ЗАМЕЧАНИЕ. Неквадратная матрица определителя не имеет.

Если определитель квадратичной матрицы отличен от нуля, то матрица называется *невырожденной*, если определитель равен нулю, то матрица называется *вырожденной.*

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.**  *Матрица, полученная из данной заменой ее строк столбцами с теми же номерами, называется*  ***транспонированной к данной.***

Матрицу, транспонированную к *А*, обозначают *АТ*.

*ПРИМЕР.*

 

2  3 3  2

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Две матрицы одного и того же размера называются* ***равными,*** *если равны все их соответственные элементы****.***

Рассмотрим действия над матрицами.

СЛОЖЕНИЕ МАТРИЦ.

Операция сложения вводится только для матриц одинакового размера.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Суммой двух матриц А = (аi j) и В = (bi j) одинакового размера*** *называется матрица С = (сi j*) *того же размера, элементы которой равны суммам соответствующих элементов слагаемых матриц, т.е. с i j = a i j + b i j*

Обозначается сумма матриц *А + В.*

*ПРИМЕР.*



УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.***Чтобы умножить матрицу на число k, надо умножить на это число каждый элемент матрицы*:

***если*** *А=* (*а i j* )***, то*** *k* • *A=* (*k* • *a i j* )

*ПРИМЕР.*

****

СВОЙСТВА СЛОЖЕНИЯ МАТРИЦ И УМНОЖЕНИЯ НА ЧИСЛО

1. Переместительное свойство: *А + В = В + А*

2. Сочетательное свойство: *( А + В ) + С = А + ( В + С )*

3. Распределительное свойство: *k* • *( A + B ) = k A + k B*, где *k –* число

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

Матрицу *А* назовем с о г л а с о в а н н о й с матрицей *В* , если число столбцов матрицы *А* равно числу строк матрицы *В* , т.е. для согласованных матриц матрица *А* имеет размер *m* × *n* , матрица *В*  имеет размер *n* × *k .* Квадратные матрицы согласованы, если они одного порядка.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.** *Произведением матрицы А размера m* × *n на матрицу В размера n* × *k называется матрица С размера m* × *k, элемент которой аi j , расположенный в i –ой строке и j – ом столбце, равен**сумме произведений элементов i – ой строки матрицы А на соответствующие элементы j – столбца матрицы В, т.е.*

*c i j = a i 1  b 1 j + a i 2 b 2 j +……+ a i n b n j*

Обозначим: *С = А* • *В.*

Если  то



Произведение *В* × *А* не имеет смысла, т.к. матрицы  не согласованы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если *А* × *В* имеет смысл, то *В* × *А* может не иметь смысла.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если имеет смысл *А* × *В* и *В* × *А*, то, вообще говоря

*А* × *В* ≠ *В* × *А*, т.е. умножение матриц не обладает переместительным законом.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если *А* – квадратная матрица и *Е* – единичная матрица того же порядка, то *А* × *Е* = *Е* × *А = А*.

Отсюда следует, что единичная матрица при умножении играет роль единицы.

*ПРИМЕРЫ*. Найти , если можно, *А* × *В* и *В* × *А*.

1. 

*Решение*:Квадратные матрицы одного и того же второго порядка согласованы в томи другом порядке, поэтому *А* × *В* и *В* × *А* существуют.



2. 

*Решение*:Матрицы *А* и *В* согласованы



Матрицы *В* и  *А* не согласованы, поэтому *В* × *А* не имеет смысла.

Отметим, что в результате перемножения двух матриц получается матрица, содержащая столько строк, сколько их имеет матрица–множимое и столько столбцов, сколько их имеет матрица-множитель.

СВОЙСТВА УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

1. Сочетательное свойство: *А* × *( В* × *С ) = (А* × *В )* ×*С*
2. Распределительное свойство: *(А* + *В)* × *С = А* × *С + В* ×*С*

Можно показать, что , если *А* и *В* – две квадратные матрицы одного порядка с определителями ⏐ *А* ⏐ и ⏐ *В* ⏐, то определитель матрицы *С* = *А* × *В* равен произведению определителей перемножаемых матриц, т.е.

⏐*С*⏐ = ⏐ *А* ⏐ ⏐ *В* ⏐

Отметим следующий любопытный факт. Как известно, произведение двух отличных от нуля чисел не равно нулю. Для матриц подобное обстоятельство может и не иметь места, т.е. произведение двух ненулевых матриц может оказаться равным *нуль - матрице*.

Действие "деление" для матриц не вводится. Для квадратных невырожденных матриц вводится обратная матрица. С понятием обратной матрицы можно познакомиться в рекомендуемой литературе.

2 – ой учебный вопрос**РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ**

**УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА**

Метод Гаусса (или метод последовательного исключения неизвестных) применим для решения систем линейных уравнений, в которых число неизвестных может быть либо равно числу уравнений, либо отлично от него.

Система *т* линейных уравнений с *п* неизвестными имеет вид:



*x*1 , *x*2, …, *xn* – неизвестные.

*ai j* - коэффициенты при неизвестных.

*bi* - свободные члены (или правые части)

Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет решение, и *несовместной*, если она не имеет решения.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение и *неопределенной*, если она имеет бесчисленное множество решений.

Две совместные системы называются *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений.

К элементарным преобразованиям системы отнесем следующее:

1. перемена местами двух любых уравнений;
2. умножение обеих частей любого из уравнений на произвольное число, отличное от нуля;
3. прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое действительное число.

Элементарные преобразования переводят систему уравнений в равносильную ей.

Элементарные преобразования системы используются в методе Гаусса.

Для простоты рассмотрим метод Гаусса для системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными в случае, когда существует единственное решение:

Дана система:

 ( 1 )

*1-ый шаг метода Гаусса.*

На первом шаге исключим неизвестное *х1* из всех уравнений системы (1), кроме первого. Пусть коэффициент . Назовем его ведущим элементом. Разделим первое уравнение системы (1) на *а11.* Получим уравнение:

 ( 2 )

где 

Исключим *х1* из второго и третьего уравнений системы (1). Для этого вычтем из них уравнение (2), умноженное на коэффициент при *х1* (соответственно *а*21 и *а*31).

Система примет вид:

 ( 3 )

Верхний индекс (1) указывает, что речь идет о коэффициентах первой преобразованной системы.

*2-ой шаг метода Гаусса.*

На втором шаге исключим неизвестное *х2* из третьего уравнения системы (3). Пусть коэффициент . Выберем его за ведущий элемент и разделим на него второе уравнение системы (3), получим уравнение:

 ( 4 )

где 

Из третьего уравнения системы (3) вычтем уравнение (4), умноженное на Получим уравнение:



Предполагая, что находим



В результате преобразований система приняла вид:

 (5)

Система вида (5) называется ***треугольной*.**

Процесс приведения системы (1) к треугольному виду (5) (шаги 1 и 2) называют ***прямым ходом метода Гаусса*.**

Нахождение неизвестных из треугольной системы называют ***обратным ходом метода Гаусса.***

Для этого найденное значение *х3* подставляют во второе уравнение системы (5) и находят *х2*. Затем *х2* и *х3*  подставляют в первое уравнение и находят *х1*.

В общем случае для системы *т* линейных уравнений с *п* неизвестными проводятся аналогичные преобразования. На каждом шаге исключается одно из неизвестных из всех уравнений, расположенных ниже ведущего уравнения.

Отсюда другое называние метода Гаусса – *метод последовательного исключения неизвестных.*

Если в ходе преобразований системы получается противоречивое уравнение вида *0 = b*, где *b* ≠ 0, то это означает, что система несовместна и решений не имеет.

В случае совместной системы после преобразований по методу Гаусса, составляющих прямой ход метода, система *т* линейных уравнений с *п* неизвестными будет приведена или к *треугольному* или к  *ступенчатому*  виду.

Треугольная система имеет вид:



Такая система имеет единственное решение, которое находится в результате проведения обратного хода метода гаусса.

Ступенчатая система имеет вид:



Такая система имеет бесчисленное множество решений. Чтобы найти эти решения, во всех уравнениях системы члены с неизвестными *хk*+1, … , *xk* переносят в правую часть. Эти неизвестные называются свободными и придают им произвольные значения. Из полученной треугольной системы находим *х*1, … , *xk*, которые будут выражаться через свободные неизвестные. Подробнее об этом можно узнать в рекомендуемой литературе.

Рассмотренный метод Гаусса легко программируется на ЭВМ и является более экономичным (по числу действий), чем другие методы.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Рассмотренные на лекции матрицы являются удобным инструментом для записи различных математических преобразований и широко используется в научно-технической литературе. Метод Гаусса позволяет решать любые линейные системы, он находит широкое применение и содержится в пакетах стандартных программ для ЭВМ.

доцент Смирнова А.И.