ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 111

РАВНОУСКОРЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ

Цель и содержание работы

Целью работы является изучение законов равноускоренного движения при помощи машины Атвуда.

Содержание работы состоит в определении зависимости пути, пройденного телом при равноускоренном движении, от времени.

Краткая теория работы

В настоящей работе определяется зависимость пути от времени для равноускоренного движения при помощи машины Атвуда.

Машина Атвуда (рис. 1) состоит из легкого блока в виде сплошного диска, способного вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, расположенной в верхней части вертикальной стойки. На правой стороне стойки нанесена шкала с сантиметровыми отметками. Через блок перекинута легкая капроновая нить, на концах которой закреплены грузики в виде цилиндров разной массы m_1 и m_2.

В левой верхней части стойки установлено электромагнитное пусковое устройство, позволяющее фиксировать положение грузиков, зажимая нить между двумя дисками, один из которых связан с электромагнитом. При освобождении нити грузики приходят в движение, одновременно включается электронный секундомер.

Пройдя путь S, правый цилиндрик попадает своим нижним основанием на горизонтальную неподвижную платформу и замыкает контакты, останавливающие секундомер.

Величина пути S, пройденного телом с начальной нулевой скоростью за время t, определяется (из кинематики) уравнением:

$$S = \frac{at^2}{2}. \tag{1}$$

Однако ряд причин случайного характера (например, неточность начального расположения правого грузика на заданном расстоянии S от неподвижной платформы, инерционность пускового устройства и срабатывания контактов, застойные явления в подшипниках оси блока и т.п.) усложняют эту зависимость.

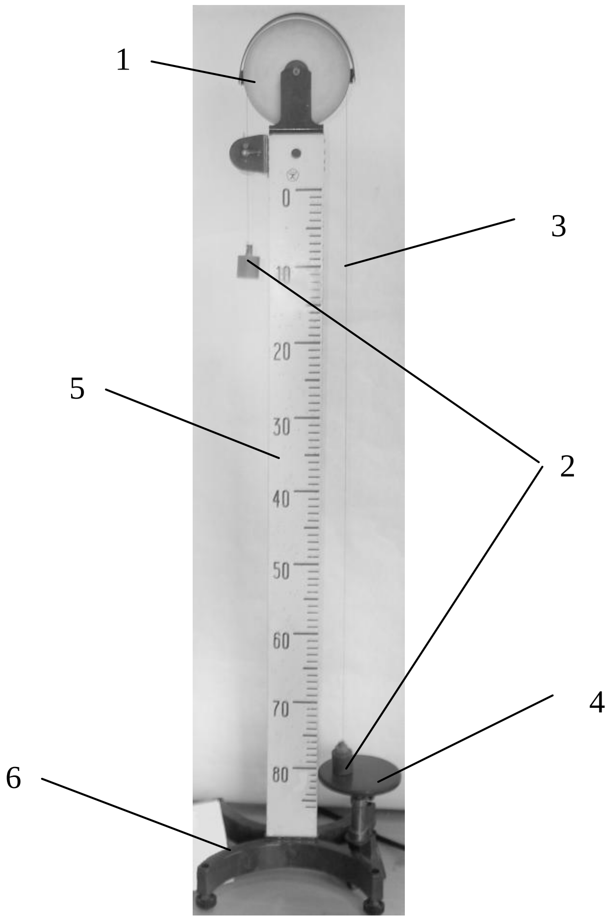

Рис 1. Машина Атвуда.

1 – блок, 2 – грузики, 3 – нить, 4 – неподвижная платформа, 5 – стойка со шкалой, 6 – основание.

Введем параметр τ – случайную величину, характеризующую неопределенность моментов начала и конца движения. Тогда,

$$S(t,\tau) = \frac{a(t+\tau)^2}{2}\,. \tag{2}$$

Преобразовав это выражение, получим:

$$S(t,\tau) = \frac{a\tau^2}{2} + at\tau + \frac{at^2}{2}\,. \tag{3}$$

Усредняя эту зависимость по случайным значениям параметра τ, находим:

$$S(t,\bar{\tau}) = \frac{a\bar{\tau}^2}{2} + at\bar{\tau} + \frac{at^2}{2}\,. \tag{4}$$

Если распределение случайной величины τ симметрично относительно значения $\bar{\tau}$ (то есть положительные и отрицательные значения τ равновероятны), то $\bar{\tau}=0$, $\bar{\tau}^2 \neq 0$, следовательно, введя обозначения $B \equiv \frac{a}{2}$ и $S_0 \equiv \frac{a\bar{\tau}^2}{2}$, можно записать:

$$S(t) = S_0 + Bt^2. \qquad (5)$$

Этот закон содержит два параметра: S_0 – начальное смещение и B – величину, равную половине ускорения. Эти параметры определяются по измеренным значениям пройденного пути S_i и сериям значений промежутков времени $t_{i,j}$ методом наименьших квадратов (см. Приложение 1).

<u>Приборы и принадлежности, необходимые для выполнения работы</u>

1. *Машина Атвуда*. Описание дано выше.
2. *Электронный секундомер*.

<u>Порядок выполнения работы</u>

1. Включить электронный секундомер.
2. Придерживая правый грузик рукой, переместить нить с грузиками так, чтобы нижнее основание правого грузика оказалось на отметке 0 см по шкале, нанесенной на стойку машины Атвуда.
3. Одновременно запустить секундомер и отпустить нить, после чего грузики начнут двигаться, а на табло мелькать цифры – отсчет времени.
4. После попадания нижнего основания правого грузика на неподвижную платформу, закрепленную на отметке 80 см по шкале стойки машины Атвуда, секундомер остановить.
5. В таблицу 1 для значения пути $S_1 = 0{,}80$ м занести значение промежутка времени $t_{1,1}$ в секундах.

   Затем провести измерения еще четыре раза, повторяя пункты 3 – 7 и вписывая в таблицу 1 значения $t_{1,2}, t_{1,3}, t_{1,4}, t_{1,5}$.
6. После этого изменить положение правого грузика: установить его нижнее основание на отметке 5 см по шкале стойки машины Атвуда. Выполнить пункты 4 – 7. В таблицу 1 записать значение промежутка времени $t_{2,1}$, соответствующее прохождению пути $S_2 = 0{,}75$ м. аналогично получить значения $t_{2,2}, t_{2,3}, t_{2,4}, t_{2,5}$, записывая их в соответствующую строку таблицы 1.

После этого перейти к серии измерений при новом положении грузика: на отметке 10 см и т.д.

Таблица 1

№ п/п	Пройденное расстояние S_i, м	ПРОМЕЖУТКИ ВРЕМЕНИ					Среднее значение $\bar{t}_i$, с
		$t_{1,i}$, с	$t_{2,i}$, с	$t_{3,i}$, с	$t_{4,i}$, с	$t_{5,i}$, с	
1	0,80						
2	0,75						
3	0,70						
4	0,65						
5	0,60						
6	0,55						
7	0,50						
8	0,45						
9	0,40						
10	0,35						

Последнюю серию измерений провести с грузиком, своим нижним основанием помещенным на отметку 35 см.

После выполнения измерений выключить секундомер.

Обработка результатов измерений

В каждой серии измерений промежутков времени найти среднее значение $\bar{t}_i$ с двумя цифрами после запятой. Данные записать в таблицу 1.

Для нахождения параметров S_0 и B методом наименьших квадратов следует внести в таблицу 2 следующие данные, предварительно рассчитав недостающие:

$$S_i,\ \bar{t}_i,\ \bar{t}_i^{\,2},\ \bar{t}_i^{\,4},\ S_i\bar{t}_i^{\,2}$$

(Здесь i – номер серии измерения.)

Подсчитать суммы по всем сериям измерений указанных данных (i изменяется от 1 до 10):

$$\sum_{i=1}^{10} S_i,\ \sum_{i=1}^{10} \bar{t}_i^{\,2},\ \sum_{i=1}^{10} \bar{t}_i^{\,4} \text{ и } \sum_{i=1}^{10} S_i\bar{t}_i^{\,2}$$

и также внести в таблицу 2.

Решить систему уравнений (6) относительно параметров S_0 и B:

$$\begin{cases} 10S_0 + B\sum_{i=1}^{10} \bar{t}_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{10} S_i \\ S_0\sum_{i=1}^{10} \bar{t}_i^{\,2} + B\sum_{i=1}^{10} \bar{t}_i^{\,4} = \sum_{i=1}^{10} S_i \bar{t}_i^{\,2} \end{cases}, \qquad (6)$$

используя числа, взятые из последней строчки таблицы 2.

(Вывод уравнений (6) см. Приложение. Сравните с формулами 10)

Таблица 2

i	S_i	$\bar{t}_i$	$\bar{t}_i^{\,2}$	$\bar{t}_i^{\,4}$	$S_i\bar{t}_i^{\,2}$
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
$\sum_{i=1}^{10}$					

$S_0 =$ м

$B =$ м/ с^2

$a =$ м/ с^2

Определив значения S_0 и B, необходимо на миллиметровой бумаге построить график зависимости пути от времени $S(t) = S_0 + Bt^2$ в виде сплошной линии. Затем на этом же графике отметить значения $\bar{t}_i$ и S_i в виде отдельных точек.

ПРИЛОЖЕНИЕ. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Пусть в результате эксперимента мы получили ряд измерений величины y: $y_1, y_2, ..., y_n$, соответствующих значениям аргумента t_1, t_2, …, t_n, которые могут быть представлены на графике в виде точек (рис. 2). Нам необходимо установить эмпирическую зависимость между y и t.

Очевидно, если соединить последовательно эти точки, то получим ломаную линию, не имеющую ничего общего с искомой зависимостью $y = f(t)$. Это следует хотя бы из того, что форма этой ломаной линии не будет воспроизводиться при повторных сериях измерений.

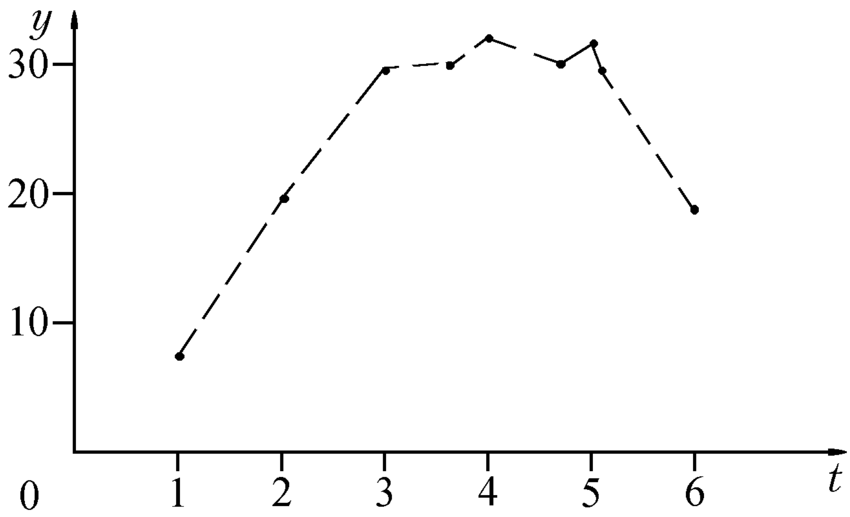

Рис. 2.

Измеренные значения y_i будут в общем случае смещены относительно искомой кривой как в сторону больших, так и в сторону меньших значений, вследствие статистического разброса (рис. 3).

Задача состоит в том, чтобы по данным экспериментальным точкам найти гладкую кривую (или прямую), которая проходила бы как можно ближе к графику “истинной” функциональной зависимости $y = f(t)$.

Теория вероятностей показывает, что наилучшим приближением будет такая кривая (или прямая) линия, для которой сумма квадратов расстояний по вертикали от экспериментальных точек до этой кривой будет минимальной.

Этот метод нахождения эмпирической зависимости получил название *метода наименьших квадратов*. Сущность этого метода состоит в следующем.

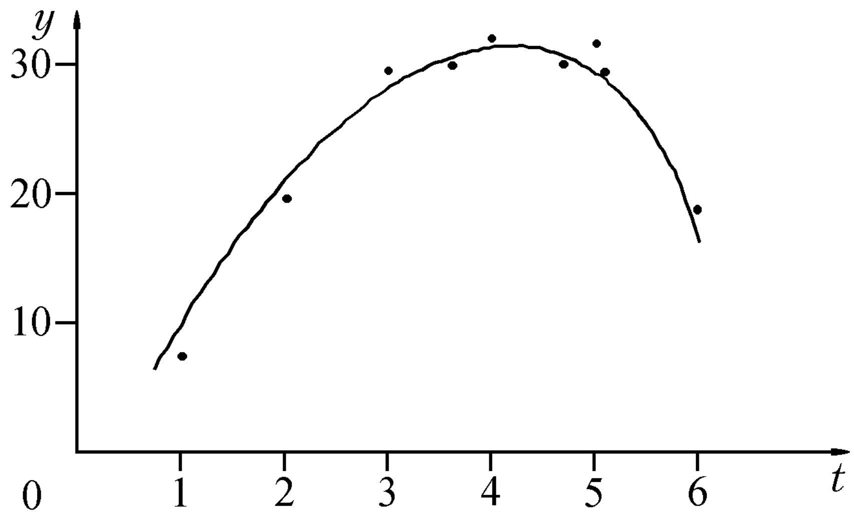

Рис. 3.

Предположим, что искомая зависимость выражается функцией $y = f(t, A_1, A_2, ..., A_m)$, где $A_1, A_2, ..., A_m$ – параметры. Значения этих параметров определяются так, чтобы точки y_i располагались по обе стороны этой кривой как можно ближе к последней, то есть, чтобы сумма квадратов отклонений измеренных значений y_i от функции $y = f(t)$ была наименьшей. (Это соответствует предположению, что разброс точек относительно кривой $y = f(t)$ подчиняется закону нормального распределения.)

Мерой этого разброса является дисперсия σ^2 или ее приближенное выражение $(\Delta S_n)^2$ – средний квадрат отклонений:

$$(\Delta S_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[y_i - y(t_i)]^2 .$$

Этот средний квадрат отклонений и должен принять минимальное значение. Как известно, функция $f(A)$ принимает минимальное значение при $A = A_{\min}$, если ее первая производная равна нулю, а вторая производная положительна при значении $A = A_{\min}$. Для функции многих переменных эти условия заменяются требованием, чтобы частные производные, то есть производные по параметру A_i удовлетворяли вышеупомянутым условиям (при этом остальные параметры A_k $(k \neq i)$ при вычислении производных считаются постоянными).

Таким образом, из условий минимума мы получаем систему уравнений для определения наилучших значений параметров.

Рассмотрим применение метода наименьших квадратов на примере отыскания эмпирической зависимости пути, проходимого грузиками на машине Атвуда, от времени.

Полагая, что “истинная” зависимость пути от времени имеет вид

$$S(t) - S_0 = Bt^2 .$$

можно рассмотреть случайные отклонения:

$$(\Delta \overline{S})_i = S_i - S(t_i) , \tag{7}$$

где S_i – измеренные положения правого грузика в моменты времени t_i.

Запишем квадратичную форму

$$F = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (S_i - S_0 - Bt_i^2)^2 \tag{8}$$

и потребуем, чтобы эта квадратичная форма, описывающая сумму квадратов отклонений точек S_i от искомой кривой, была минимальной:

$$F(S_0, B) = \min .$$

Тогда из равенства нулю частных производных от F по параметрам S_0 и B получим два уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial S_0} = -2 \sum\limits_{i=1}^{n} (S_i - S_0 - Bt_i^2) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial B} = -2 \sum\limits_{i=1}^{n} (S_i - S_0 - Bt_i^2) \cdot t_i^2 = 0 \end{cases} . \tag{9}$$

Эти уравнения можно переписать в виде

$$\begin{array}{l} nS_0 + B \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} S_i \\ S_0 \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2 + B \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^4 = \sum\limits_{i=1}^{n} S_i t_i^2 \end{array} . \tag{10}$$

Решение этой системы позволяет найти значения S_0 и $B = \dfrac{a}{2}$, а затем определить ускорение a.

(В уравнениях (7 – 10) индекс i соответствует усредненному значению данного параметра соответствующей серии измерений в таблицах 1 и 2.)

Контрольные вопросы

1. Какие величины характеризуют прямолинейное движение?
2. Какое движение называется равномерным, ускоренным?
3. В чем состоит принцип метода наименьших квадратов?
4. Начертите график зависимости пути от времени для равноускоренного движения без начальной скорости, с начальной скоростью; график пути для равнозамедленного движения.
5. Объясните смысл и происхождение слагаемого S_0 и величины B в законе пути, полученном в результате работы.
6. С какой целью применяется метод наименьших квадратов?

Литература

1. *Савельев И.В.* Курс общей физики. т. 1.
2. *Володина Л.А.* Обработка результатов измерений.
3. *Лебедев В.В.* Руководство по обработке результатов наблюдений при выполнении лабораторных работ. -М. МИНГ, 1987.