1 Нелинейные уравнения

Рассматривается задача нахождения значений переменной $x = x_*$, для которых справедливо равенство

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

В этом уравнениии $f(x)$ - некоторая нелинейная функция x.
Если такие значения существуют, то они называются *корнями* уравнения (1). Корень называется *простым* , если $f'(x_*) \neq 0$ и *кратным* , если $f^{(k)}(x_*) = 0$ для $k = 1, \ldots, n-1$, а $f^{(n)}(x_*) \neq 0$. Целое n назывется *кратностью* корня .

1.1 Отделение корней

Под отделением корней уравнения (1) понимают определение достаточно узкого интервала (a, b), в котором лежит корень уравнения. Основой отделения корней служит
Теорема[1]. Пусть функция определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$, на концах которого она принимает значения разных знаков. Тогда между a и b найдется хотя бы одна точка c, в которой функция обращается в нуль:

$$f(c) = 0, \quad a < c < b.$$

Если функция $f(x)$ монотонна в этом интервале, то внутри его лежит только один корень уравнения $f(x) = 0$.
Алгоритм отделения можно реализовать следующим образом

YesDo:=True;
While YesDo do
Input $a, b, \quad M$;
$h = (b-a)/M; \quad f_{min} := 1.0e20;$
$x_i := a; \quad f_i := f(a);$
for i:=1 to M do
begin $\{i\}$
$x_{i-1} := x_i; \qquad f_{i-1} := f_i;$
$x_i := a + h * i; \;\; f_i := f(x_i);$

[1]Первая теорема Больцано-Коши

If $f_i < f_{min}$ Then
begin $\{min\}$
$f_{min} := f_i;\ \ x_{min} := x_i;$
end; $\{min\}$
If $f_{i-1} * f_i \leq 0$ Then
Output $x_{i-1}, f_{i-1}, \quad x_i, f_i;$
end; $\{i\}$
Output $f_{min}, x_{min};$
Input YesDo;
end; $\{While\}$

1.2 Метод бисекций

Метод бисекций(метод деления пополам) основан на следующем итерационном процессе: интервал a, b, на котором $(f_a = f(a)) \cdot (f_b = f(b)) < 0$, делится пополам - $x_s = (a+b)/2$ и вычисляется $f_s = f(x_s)$. Если $f_s \cdot f(a) \geq 0$, то $a := x_s,\ \ f_a := f_s$, иначе $b := x_s,\ \ f_b := f_s$; Далее выполняется следующий шаг, и т.д.
На i-м шаге приближенным значением корня служит полусумма $(a+b)/2$, оценкой погрешности - полуразность $(b-a)/2$.
Метод бисекций можно описать следующим алгоритмом[2]

Input $\quad a, b, \quad \delta, N;$
$i := 0;$
$fa := f(a);\ \ fb := f(b);$
Repeat
$xs := (a+b)/2; \quad fs := f(xs);;$
If $fs * fa \geq 0$
Then begin $fa := fs;\ \ a := xs$ end;
Else begin $fb := fs;\ \ b := xs$ end;
$i := i + 1;$
$x^i := (a+b)/2;$
$dx := (b-a)/2;$
Until $((|dx| \leq \delta |x^i|)$ OR $(i \geq N));$
Output $\quad i, x^i, dx;$

[2] В приводимых ниже алгоритмах используется только одна серия итераций. Нужно их модифицировать, используя структуры из файла it_gen.pdf

1.3 Метод хорд

В методе хорд вместо деления отрезка (a, b) пополам используется линейная интерполяция граничных значений функции $f(x)$

$$\hat{f}(t) = f(a)(1-t) + f(b)t, \quad 0 \le t = (x-a)/(b-a) \le 1.$$

Следующая контрольная точка находится из уравнения $\hat{f}(t) = 0$:

$$t_* = f(a)/(f(a) - f(b)), \quad x_s = a + t_*(b-a);$$

Далее происходит сдвиг границ интервала так же, как в методе бисекций. Метод хорд можно описать следующим алгоритмом

Input $\quad a, b, \quad \delta, N;$
$\quad fa := f(a); \;\; fb := f(b);$
$\quad i := 0;$
$\quad fa := f(a); \;\; fb := f(b);$
$\quad$ Repeat
$\qquad y := x2 - x1;$
$\qquad t := fa/(fa - fb); \quad xs := a + y * t$
$\qquad fs := f(xs);;$
$\qquad$ If $fs * fa \ge 0$
$\qquad$ Then begin $fa := fs; \;\; a := xs$ end;
$\qquad$ Else begin $fb := fs; \;\; b := xs$ end;
$\qquad i := i + 1;$
$\qquad x^i := (a+b)/2;$
$\qquad dx := (b-a)/2;$
$\quad$ Until $((|dx| \le \delta |x^i|)$ OR $(i \ge N));$
Output $\quad i, x^i, dx;$

Метод бисекций и метод хорд нельзя использовать в многомерном случае!

1.4 Метод установления

Идея этого метода состоит в переходе от нелинейного уравнения (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$dx/dt = f(x), \quad x(0) = x^0. \tag{2}$$

Это уравнение должно обладать устойчивым предельным стационарным состоянием, чтобы при $t \to \infty$ $x(t) \to x_*$. Тогда приближенное решение уравнениия (2) с помощью устойчивого численного метода дает (для достаточно больших t) хорошее приближение к решению (1).
Простейшим алгоритмом будет метод Эйлера, являющийся вариантом метода простой итерации

$$x^{i+1} = x^i + \tau f(x^i). \tag{3}$$

Метод установления можно описать следующим алгоритмом

Input x^0, τ, δ, N;
    $i := 0;$
    Repeat
        $dx = \tau * f(x^i);$
        $i := i + 1;$
        $x^i := x^i + dx;$
    Until $((|dx| \leq \delta |x^i|)$ OR $(i \geq N));$
Output $i, x^i, dx;$

Для погрешности $\epsilon^k = x_k - x_*$ из (3) получается следующее уравнение

$$\epsilon^{k+1} = \epsilon^k + \tau(f(x^k) - f(x_*)).$$

Представив $f(x^k) - f(x_*) = f'(\tilde{x})\epsilon^k$, получим соотношение

$$\epsilon^{k+1} = (1 + \tau f'(\tilde{x}))\epsilon^k,$$

из которого следует, что для сходимости метода установления должны выполняться следующие условия: последовательность $\{x_k, k = 0, 1, \ldots\}$должна находиться в области $|x_k - x_*| < R$, в которой первая производная ограничена и сохраняет свой знак. Тогда выбор параметра τ, удовлетворяющего условиям,

$$sign(\tau) = -sign(f'), \quad |\tau| < 2/\max|f'|,$$

обеспечивает сходимость метода установления.

1.5 Метод Ньютона

Метод Ньютона для уравнения (1) записывается в виде

$$x^{i+1} = x^i - [df/dx]^{-1} f(x^i). \tag{4}$$

Определение:
говорят, что функция $g(x) \in Lip_c(X)$, если $|g(x) - g(y)| \le c|x - y|$ для всех $(x, y) \in X$.
Теорема(о сходимости метода Ньютона).
Пусть $f : D \to R$ где D - открытый интервал , а R - вещественная ось, и пусть $f' \in Lip_c(D)$. Предположим, что для некоторого $\rho > 0 \quad |f'| \ge \rho$ при всех $x \in D$. Если уравнение $f(x) = 0$ имеет решение, то существует некоторое $\eta > 0$, такое, что если $|x^0 - x_*| < \eta$, то последовательность, задаваемая формулой

$$x^{k+1} = x^k - f(x^k)/f'(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

существует и сходится к x_* . Более того, для $k = 0, 1, 2, \dots$

$$|x_{k+1} - x_*| \le \frac{c}{2\rho} |x_k - x_*|^2.$$

Замечание 1. Как следует из теоремы, при $f'(x_*) \ne 0$ сходимость квадратичная. Если же $f'(x_*) = 0$, то только линейная.
Замечание 2. Для сходимости метода Ньютона начальное приближение x^0 должно быть достаточно близко к корню. Если же расстояние $|x^0 - x_*|$ велико, то метод Ньютона может вообще не сходиться.
Метод Ньютона можно реализовать следующим алгоритмом

Input $\quad x^0, \delta, \quad N$;
$\quad\quad i := 0$;
$\quad\quad$ Repeat
$\quad\quad\quad\quad df := [df/dx](x^i)$;
$\quad\quad\quad\quad dx = f(x^i)/df$;
$\quad\quad\quad\quad i := i + 1$;
$\quad\quad\quad\quad x^i := x^i - dx$;
$\quad\quad$ Until $((|dx| \le \delta |x^i|)$ OR $(i \ge N))$;
Output $\quad i, x^i, -dx$;

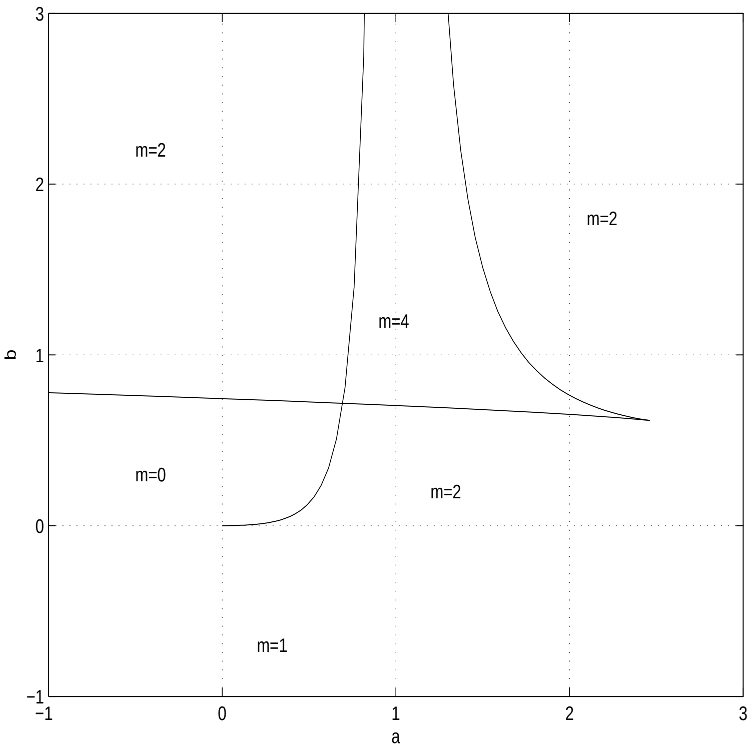

Рис. 1: Разбиение плоскости параметров уравнения $e^x - a - bx^3 = 0$

1.6 Тестовое уравнение

1. В качестве 1-го тестового используется уравнение

$$f(x) = \exp(x) - a - bx^3 = 0. \tag{5}$$

В зависимости от значений параметров a, b это уравнение может иметь $m = 0, 1, 2, 4$ корня. Для исследования знака 1-й производной функции $f(x)$ полезно находить корни уравнения

$$g(x) = f'(x) = \exp(x) - 3bx^2 = 0. \tag{6}$$

На рисунке 1 показано разбиение плоскости параметров a, b на подобласти с различным числом корней уравнения (5).

2. В качестве 2-го тестового используется уравнение

$$f(x) = \exp(-1/(x-1)^2) = 0. \tag{7}$$

Это уравнение имеет единственный корень $x_* = 1$ *бесконечной кратности*($f^{(k)}(1) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots$). Первая производная $f'(x) < 0$ для $x < 1$ и $f'(x) > 0$ для $x > 1$.

1.7 Компьютерные эксперименты

1. Для функции уравнения(5) с параметрами $a = 1.15, b = 1.25$ найти границы корней. Для функции уравнения (6) с параметром $b = 1.25$ найти границы корней и ее знаки на всей вещественной оси.
Контрольная информация:
Функция $f(x)$: корни(приближенно)
$x_1 = -0.83, \ \ x_2 = 0.14, \ \ x_3 = 1.20, \ \ x_4 = 5.14$
Функция $g(x) = f'(x)$: знаки и корни
$(- \ldots -) \ \ -0.41 \ \ (+ \ldots +) \ \ 0.75 \ \ (- \ldots -) \ \ 4.18 \ \ (+ \ldots +)$

2. Описанными выше методами(бисекций, хорд, установления, Ньютона) для значений $\delta = 1.0e - 2, 1.0e - 3, 1.0e - 4, 1.0e - 5$ найти корни функции (5)со значениями $a = 1.15, b = 1.25$. Для этих корней составить таблицы зависимости числа итераций от δ.
3. Методом установления попытаться найти корень функции (5), беря значения параметра τ, для которых нет сходимости. Каким образом проявляется расходимость итерационного процесса ?
4. Метод Ньютона:
в случае корня кратности 2 метод Ньютона сходится линейно,т.е.существенно медленнее, чем в случае простого корня. Проверить, будет ли модифицированный метод Ньютона

$$x^{i+1} = x^i - 2[df/dx]^{-1} f(x^i)$$

иметь для корня кратности 2 ту же скорость сходимости, что и стандартный метод для простого корня. Для проверки использовать уравнение

$$h(x) = \sin((x-1)^2) = 0.$$

Для значения $\delta = 1.0e - 7$ найти корень этого уравнения простым и модифицированным методом Ньютона. Сравнить число итераций.