Г.П. Бевз
В.Г. Бевз
Н.Г. Владімірова
В.М. Владіміров

# Геометрія

# 10

Підручник
для загальноосвітніх
навчальних закладів

**Профільний рівень**

*Рекомендовано
Міністерством освіти
і науки України*

КИЇВ
«ГЕНЕЗА»
2010

## *ШАНОВНІ СТАРШОКЛАСНИКИ!*

Геометрія – одна з найдавніших, найшляхетніших, корисних і цікавих наук. У ній – згусток значної частини загальнолюдської культури, надбаної людством за кілька тисячоліть. А ще вона є незамінним інструментарієм для науковців і виробничників, засобом для розвитку логічного мислення, просторової уяви, раціоналізаторських здібностей та інших корисних якостей волі і характеру молоді.

Ось що писав про геометрію відомий архітектор XX ст. Ле Корбюзьє: «Тільки дотримуючись законів геометрії, архітектори давнини могли створити свої шедеври. Невипадково кажуть, що піраміда Хеопса – німий трактат з геометрії, а грецька архітектура – зовнішнє відображення геометрії Евкліда. Минули століття, але роль геометрії не змінилась. Як і раніше, вона залишається граматикою архітектора». І не тільки архітектора чи інженера-конструктора. Ця наука є своєрідною граматикою кожного фахівця, який використовує геометричні форми.

Геометрія складається з двох частин: *планіметрії* і *стереометрії*. У попередніх класах ви вивчали в основному планіметрію, тепер переходите до вивчення стереометрії (від грец. στερεοζ – просторовий), в якій розглядаються властивості геометричних фігур у просторі.

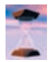
Стереометрія – геометрія тривимірного простору. За змістом вона багатша від планіметрії і цікавіша, оскільки вивчає властивості як плоских геометричних фігур, так і неплоских.

Перший розділ, за програмою, – матеріал для повторення, систематизації та узагальнення найважливіших відомостей з планіметрії.

Новий навчальний матеріал викладено в трьох розділах і додатках. Кожен з розділів містить теоретичний матеріал і задачі. Читаючи теорію, основну увагу слід звертати на слова, надруковані курсивом і жирним шрифтом. *Курсивом* виділено геометричні терміни, назви понять. Потрібно вміти пояснювати їх зміст, наводити відповідні приклади. **Жирним шрифтом** надруковано важливі геометричні твердження, зокрема теореми.

У кожному параграфі підручника є рубрика  «Для допитливих». Вона містить додаткові відомості для тих, хто хоче знати більше. У рубриці  «Виконаємо разом» наводяться задачі з розв'язаннями. Радимо переглянути їх, перш ніж виконувати домашнє завдання.

Знати геометрію – це насамперед уміти користуватися нею. Вчитися користуватися геометричними знаннями найкраще під час розв'язування геометричних задач. Завдання, рекомендовані для домашньої роботи, виділено кольором. Задачі і вправи в підручнику поділено на:  «Виконайте усно», рівень А, рівень Б і  «Вправи для повторення». У кожному розділі є задачі за готовими малюнками. Умови таких задач подано малюнками і короткими записами.

Для узагальнення і систематизації вивченого матеріалу подано «Головне в розділі». Перевірити, наскільки ви засвоїли новий матеріал, та підготуватися до зовнішнього незалежного оцінювання ви зможете, розв'язуючи задачі та виконуючи завдання з рубрик  «Тестові завдання» і  «Типові задачі для контрольної роботи».

Програмну тему «Ортоцентричний тетраедр» дещо розширено і вміщено в додатках «Елементи геометрії тетраедра». Там міститься ще кілька тем, в яких поглиблено розглядаються деякі найважливіші властивості найпростішого многогранника – тетраедра. Ці теми адресуємо для самостійного опрацювання тим учням, які мають бажання займатися посильною для початківців науково-дослідною роботою. А задачі, що є в «Додатках», можна пропонувати всім учням.

Іноді вважають, що найважливіше в геометрії – доведення теорем. Звичайно, учитися доводити теореми – справа корисна. Але не меншу роль у цій науці відіграють поняття, їх означення і класифікації; геометричні фігури, їх побудова і перетворення; геометричні величини, їх вимірювання та обчислення. Один з відомих геометрів XX ст. Д. Гільберт писав: «***У величезному саду геометрії кожний може підібрати собі букет за смаком***».

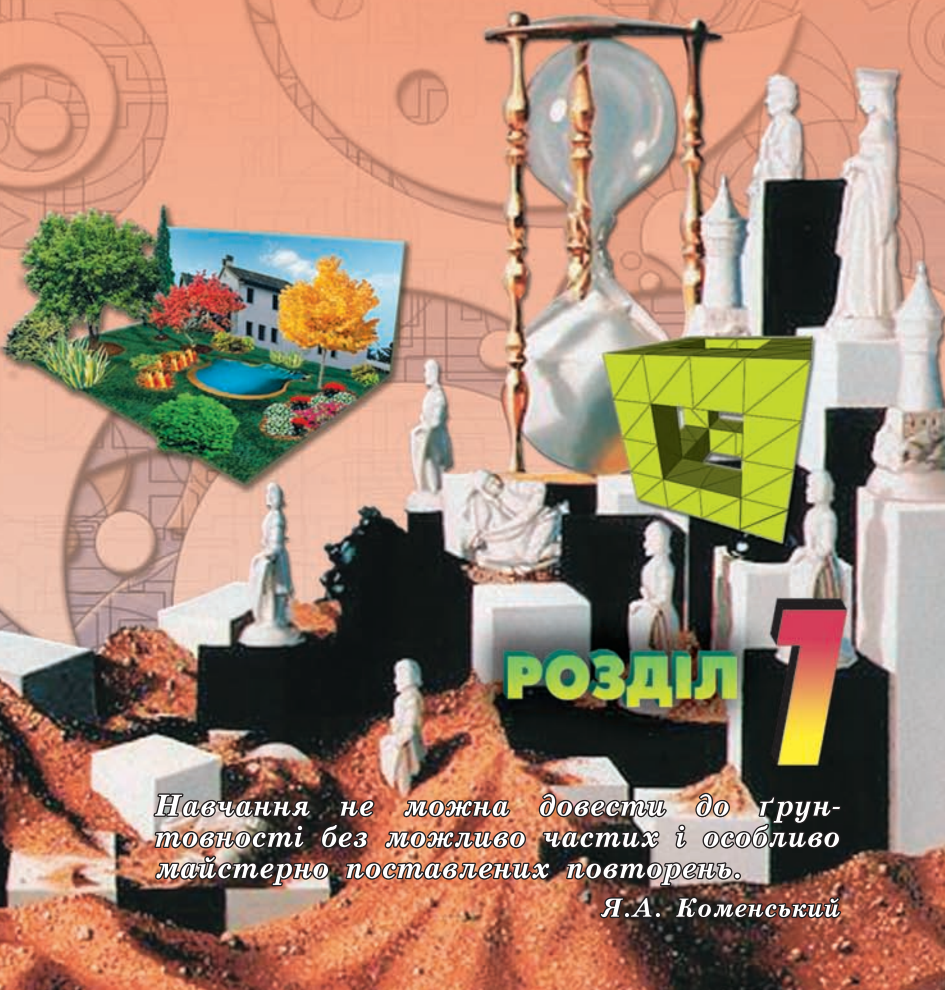
Запрошуємо вас у цей багатий і дивний світ Геометрії.

*Автори*

# Систематизація та узагальнення фактів і методів планіметрії

*Основні теми розділу:*

- **Опорні факти планіметрії.**
- **Методи розв’язування планіметричних задач.**



# Розділ 1

***Навчання не можна довести до ґрунтовності без можливо частих і особливо майстерно поставлених повторень.***

*Я.А. Коменський*

# § 1 ОПОРНІ ФАКТИ ПЛАНІМЕТРІЇ

Пригадаємо найважливіші відомості з планіметрії, які часто використовуються в стереометрії.

***Аксіоми планіметрії.*** Основне в геометрії – її поняття і твердження. Для більшості понять формулюються означення, але існують поняття неозначувані. Це – *точка*, *пряма*, *площина* та деякі інші.

Переважну більшість геометричних тверджень доводять, тобто показують, що вони як логічні наслідки випливають з інших істинних тверджень. А як бути, коли на початку курсу ще немає «інших тверджень»? У цих випадках кілька тверджень приймають за істинні без доведень. Їх називають *аксіомами*. А доводжувані твердження – *теоремами*.

Для планіметрії, як і для інших наук чи теорій, можна обирати різні системи аксіом. Одна з них може бути такою.

1. *Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що їй не належать.*
2. *Через будь-які дві різні точки можна провести пряму і тільки одну.*
3. *Із трьох точок прямої одна і тільки одна лежить між двома іншими.*
4. *Кожний відрізок має певну довжину.*
5. *Кожний кут має певну міру.*
6. *Пряма розбиває площину на дві півплощини.*
7. *На будь-якій прямій від заданої точки у заданому напрямі можна відкласти відрізок даної довжини і тільки один.*
8. *Від будь-якого променя у даній півплощині можна відкласти даний кут з вершиною у початку променя і тільки один.*
9. *Який би не був трикутник, існує рівний йому трикутник у заданому розміщенні відносно заданої прямої.*
10. *Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній прямій (аксіома Евкліда).*

Розділи про геометричні величини, геометричні перетворення і побудови потребують додаткових аксіом.

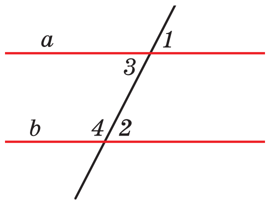
***Паралельні і перпендикулярні прямі.*** Дві прямі однієї площини називаються паралельними, якщо вони не перетинаються. Два відрізки або промені називають паралельними, якщо вони належать паралельним прямим.

*Ознаки паралельності прямих*. Дві прямі $a$ і $b$ однієї площини паралельні (мал. 1), якщо їх січна утворює з ними:

1) рівні відповідні кути ($\angle 1 = \angle 2$); або

2) рівні внутрішні різносторонні кути ($\angle 2 = \angle 3$); або

3) внутрішні односторонні кути, сума яких дорівнює 180° ($\angle 3 + \angle 4 = 180°$).

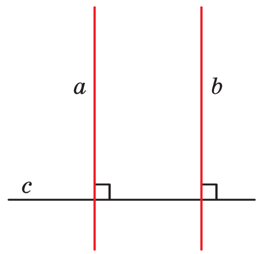



*Мал. 1*

*Властивості паралельних прямих*. Якщо прямі $a$ і $b$ паралельні, то виконуються всі три рівності, зазначені вище (п. 1–3).

Відношення паралельності прямих транзитивне: якщо $a \parallel b$ і $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

Дві прямі називаються *перпендикулярними*, якщо вони перетинаються під прямим кутом. Відрізки або промені називають перпендикулярними, якщо вони належать перпендикулярним прямим.




*Мал. 2*

Дві прямі однієї площини, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні (мал. 2). Якщо $a \perp c$ і $b \perp c$, то $a \parallel b$.

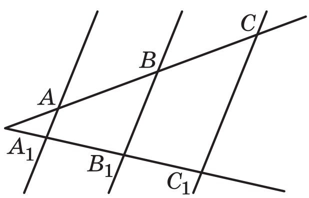
*Теорема Фалеса*. Якщо паралельні прямі перетинають сторони кута і на одній його стороні відтинають рівні відрізки, то і на другій його стороні вони відтинають рівні відрізки (мал. 3).

Якщо $AB = BC$, то $A_1B_1 = B_1C_1$.

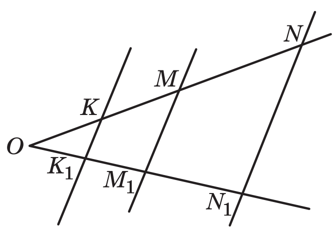
*Узагальнена теорема Фалеса*. Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають від них пропорційні відрізки (мал. 4).

$$\frac{KM}{MN} = \frac{K_1M_1}{M_1N_1}.$$

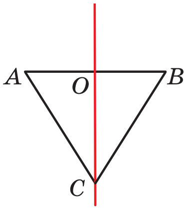
*Геометричне місце точок* – це множина всіх точок, які задовольняють певну умову.




*Мал. 3*




*Мал. 4*

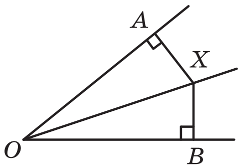



*Мал. 5*

Геометричним місцем точок площини, рівновіддалених від кінців відрізка, є серединний перпендикуляр до цього відрізка (мал. 5).

Якщо $AO = BO$ і $CO \perp AB$, то $AC = BC$.

Геометричне місце точок кута, рівновіддалених від його сторін, – бісектриса цього кута (мал. 6).




*Мал. 6*

***Трикутники.*** *Трикутник* – замкнена ламана із трьох ланок. Частина площини, обмежена такою ламаною, також називається трикутником. Кожний трикутник має три сторони, три вершини і три кути. Суму сторін трикутника називають його периметром.

Якщо сторони трикутника $a$, $b$, $c$, а протилежні їм кути $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, то:

$$|b - c| < a < b + c; \ \alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

*Ознаки рівності трикутників.* Два трикутники рівні, якщо:

1) дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника; або

2) сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і прилеглим до неї кутам другого трикутника; або

3) три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника.

Відрізок, який сполучає середини двох сторін трикутника, – його *середня лінія*. Середня лінія трикутника паралельна його третій стороні і дорівнює її половині.

Трикутники, в яких усі відповідні кути рівні, а відповідні сторони пропорційні, називаються *подібними*.

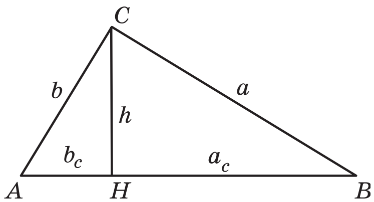
*Основна теорема про подібність трикутників.* Січна пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає від нього трикутник, подібний даному.

*Ознаки подібності трикутників.* Два трикутники подібні, якщо:

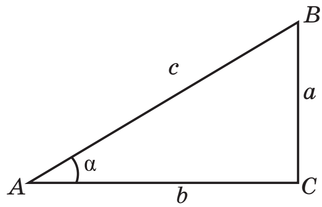
1) два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого; або

2) дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого, а кути між ними рівні; або

3) три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого.




Мал. 7




Мал. 8

Два прямокутні трикутники подібні, якщо:

1) гострий кут одного трикутника дорівнює куту другого; або

2) катети одного трикутника пропорційні катетам другого; або

3) катет і гіпотенуза одного трикутника пропорційні катету і гіпотенузі другого.

З ознак подібності трикутників випливають такі теореми.

• Бісектриса трикутника ділить його протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам.

• Медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну медіану у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини трикутника.

• Катет прямокутного трикутника – середнє пропорційне гіпотенузи $c$ і його проекції на гіпотенузу. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, – середнє пропорційне відрізків, на які висота ділить гіпотенузу (мал. 7).

$a^2 = a_c \cdot c;\quad b^2 = b_c \cdot c;\quad h^2 = a_c \cdot b_c.$

Якщо $c$ – гіпотенуза, а $a$, $b$ – катети прямокутного трикутника (мал. 8), то:

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ – } \textit{теорема Піфагора};$$

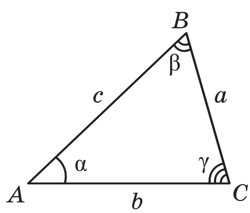
$$\frac{a}{c} = \sin\alpha;\quad \frac{b}{c} = \cos\alpha;\quad \frac{a}{b} = \mathrm{tg}\,\alpha;\quad \frac{b}{a} = \mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Якщо $a$, $b$, $c$ – сторони, а $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ – протилежні їм кути трикутника (мал. 9), то завжди

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ – *теорема косинусів*,

$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ – *теорема синусів*.

Кожен з трьох останніх дробів дорівнює $2R$, де $R$ – радіус кола, описаного навколо даного трикутника.




Мал. 9

Навколо кожного трикутника можна описати коло і до того ж тільки одне. Центром кола, описаного навколо трикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів до його сторін. У кожний трикутник можна вписати коло і до того ж тільки одне. Центром кола, вписаного в трикутник, є точка перетину його бісектрис.

Кожний трикутник $ABC$ має медіани, бісектриси, висоти, півпериметр, радіус вписаного і описаного кіл, які відповідно позначають: $m_a$, $l_a$, $h_a$, $p$, $r$, $R$. Відомо, що:

$$m_a^2 = \frac{1}{4}\left(2(b^2+c^2)-a^2\right); \quad l_a^2 = \frac{1}{(b+c)^2}bc\left((b+c)^2-a^2\right);$$

$$h_a^2 = \frac{4}{a^2}p(p-a)(p-b)(p-c); \quad r = \frac{S}{p}; \quad R = \frac{abc}{4S}.$$

*Площа трикутника*. Кожний трикутник (як частина площини, обмежена замкненою ламаною) має площу. Формули для визначення площі трикутника:

$$S = \frac{1}{2}ah_a; \qquad S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma;$$

$$S = r \cdot p; \qquad S = \frac{abc}{4R};$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ – } \textit{формула Герона}.$$

Для прямокутних і рівносторонніх трикутників формули простіші:

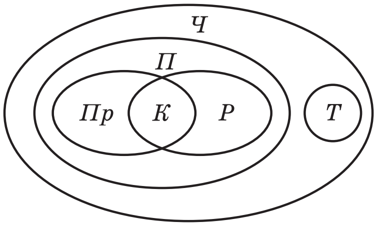
| Прямокутний трикутник | Рівносторонній трикутник |
|---|---|
| $S = \frac{1}{2}ab$; $r = \frac{a+b-c}{2}$; $R = \frac{c}{2}$; $h = \frac{a \cdot b}{c}$ | $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ |

***Чотирикутники.*** *Чотирикутник* – проста замкнена ламана із чотирьох ланок. Частина площини, обмежена такою ламаною, також називається чотирикутником. Сума всіх кутів кожного чотирикутника дорівнює 360°. Кожна сторона чотирикутника менша від суми трьох інших його сторін.

Чотирикутник, кожна сторона якого паралельна протилежній стороні, – *паралелограм.*

*Ознаки паралелограма.* Чотирикутник є паралелограмом, якщо:

1) кожна його сторона дорівнює протилежній стороні;
2) дві його протилежні сторони паралельні й рівні;
3) його діагоналі точкою перетину діляться навпіл.




*Ч — чотирикутники*
*П — паралелограми*
*Пр — прямокутники*
*Р — ромби*
*К — квадрати*
*Т — трапеції*

*Мал. 10*

*Властивості паралелограма:*

– кожна сторона паралелограма паралельна протилежній стороні і дорівнює їй;

– кожний кут паралелограма дорівнює протилежному куту;

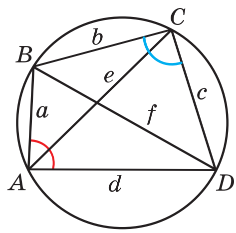
– кожна діагональ паралелограма точкою перетину ділиться навпіл;

– сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.

Окремі види паралелограмів – *прямокутники, ромби, квадрати* – мають додаткові властивості:

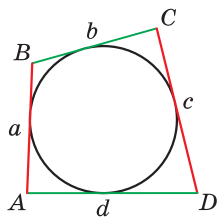
– діагоналі прямокутника (квадрата) рівні;

– діагоналі ромба (квадрата) перпендикулярні і лежать на бісектрисах його кутів.




*Мал. 11*

Чотирикутник, у якого тільки дві сторони паралельні, – *трапеція.* Паралельні сторони трапеції – її основи, дві інші – бічні сторони. Окремі види трапецій – рівнобічні і прямокутні трапеції. Відрізок, що сполучає середини бічних сторін трапеції, – її *середня лінія.* Середня лінія трапеції паралельна її основам і дорівнює їх півсумі.




*Мал. 12*

Співвідношення між окремими видами чотирикутників показано на малюнку 10.

*Вписані й описані чотирикутники* (мал. 11 і 12)

| Вид чотирикутника | Співвідношення між сторонами | Співвідношення між кутами |
|---|---|---|
| Вписаний у коло | $ac + bd = ef$ | $A + C = B + D$ |
| Описаний навколо кола | $a + c = b + d$ | $ab\sin^2\frac{B}{2} = cd\sin^2\frac{D}{2}$ |

*Площі чотирикутників.* Площа прямокутника дорівнює добутку двох його сусідніх сторін: $S = ab$.

Площа паралелограма:

$$S = ah_a, \text{ або } S = ab\sin\gamma,$$

де $a$, $b$ – його сторони, $\gamma$ – кут між ними, $h_a$ – висота, опущена на сторону $a$.

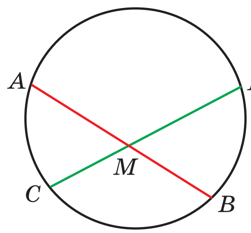
Якщо діагоналі чотирикутника дорівнюють $d_1$ і $d_2$, а кут між ними $\alpha$, то його площа

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha.$$

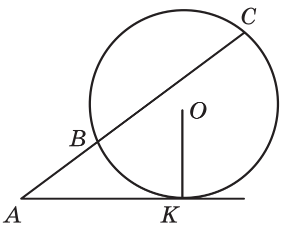
Площа ромба дорівнює $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$.

Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту:

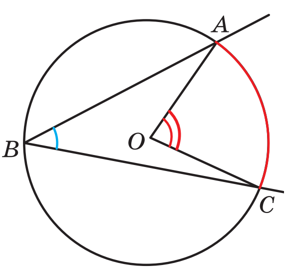
$$S = \frac{a+b}{2} h.$$




*Мал. 13*




*Мал. 14*




*Мал. 15*

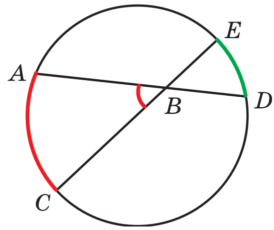
***Коло. Кути та відрізки, пов'язані з колом.*** Коло – фігура, що складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки – *центра кола*. Частина площини, обмежена колом, – *круг*. *Радіус* – відрізок, що сполучає будь-яку точку кола з його центром. Відрізок, що сполучає дві довільні точки кола, називають *хордою*. Хорда, що проходить через центр кола, – *діаметр*.

Пряма, яка має з колом тільки одну спільну точку і лежить у площині кола, називається *дотичною* до кола.

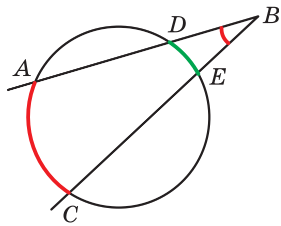
Мають місце такі властивості:

- діаметр кола, проведений через середину хорди, відмінної від діаметра, перпендикулярний до неї;
- дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику;
- відрізки дотичних, проведених до кола з однієї точки, рівні;
- $AM \cdot BM = CM \cdot DM$ (мал. 13);
- $AK^2 = AB \cdot AC$ (мал. 14);
- вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається (мал. 15):

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC};$$




Мал. 16




Мал. 17

- $\angle ABC = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AC} + \overset{\smile}{DE})$ (мал. 16);
- $\angle ABC = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AC} - \overset{\smile}{DE})$ (мал. 17);
- кут між хордою кола і дотичною, проведеною в її кінці, вимірюється половиною дуги, що міститься всередині кута.

Довжину кола $C$ радіуса $r$ визначають за формулою $C = 2\pi r$. Довжину $l$ дуги кола радіуса $r$, яка має $n$ градусів, можна визначити за формулою $l = \frac{\pi r n}{180}$.

Площу $S$ круга радіуса $r$ знаходять за формулою $S = \pi r^2$.

Частину круга, обмежену двома його радіусами, називають *сектором*, а частину круга, обмежену його хордою і дугою, – *сегментом*. Сегмент може бути меншим від півкруга або більшим. Півкруг – один з видів сектора і сегмента. Якщо сектор круга радіуса $r$ має $n$ градусів, то його площа $S_{\text{сек}} = \frac{\pi r^2 n}{360}$. Площа довільного сегмента дорівнює сумі або різниці площ сектора і трикутника.

Сторона $a_n$ правильного $n$-кутника через радіус $R$ описаного кола і радіус $r$ вписаного кола виражається формулами

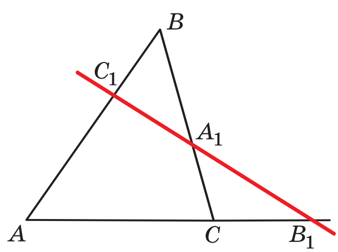
$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n} \text{ і } a_n = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Зокрема,

$$a_3 = R\sqrt{3},\ a_4 = R\sqrt{2},\ a_6 = R.$$

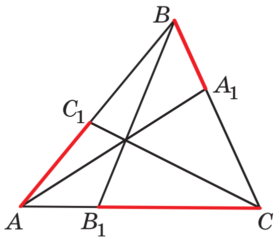
$$a_3 = 2r\sqrt{3},\ a_4 = 2r,\ a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}r.$$

*Теорема Птолемея*. У кожному опуклому чотирикутнику $ABCD$, вписаному в коло, добуток довжин діагоналей дорівнює сумі добутків довжин його протилежних сторін, тобто $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ (див. мал. 11).

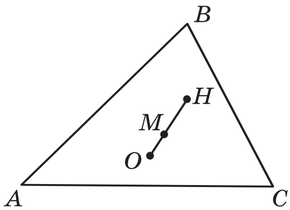



Мал. 18

*Теорема Менелая*. Нехай $A_1$, $B_1$, $C_1$ – три точки, які лежать відповідно на сторонах $BC$, $CA$, $AB$ $\triangle ABC$ або на їх продовженнях (мал. 18). Точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ тоді і тільки тоді




*Мал. 19*




*Мал. 20*

лежать на одній прямій, коли, враховуючи напрями відрізків,

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=-1.$$

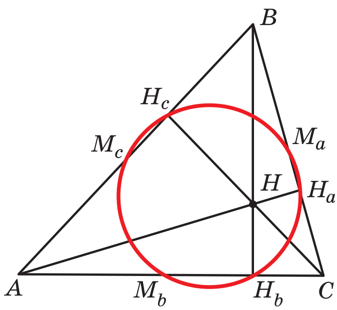
*Теорема Чеви*. Нехай $A_1$, $B_1$, $C_1$ – три точки, які лежать відповідно на сторонах $BC$, $CA$, $AB$ $\triangle ABC$ або на їх продовженнях (мал. 19). Для того щоб прямі $AA_1$, $BB_1$ і $CC_1$ перетиналися в одній точці або були всі паралельні, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Останню рівність називають *умовою Чеви*.

*Пряма Ейлера*. Ортоцентр $H$ трикутника, його центроїд $M$ і центр $O$ описаного кола лежать на одній прямій (мал. 20), причому $OM : MH = 1 : 2$.

*Коло Ейлера* (коло дев'яти точок). Основи висот трикутника, середини його сторін і середини відрізків, які сполучають ортоцентр трикутника з його вершинами, лежать на одному колі (мал. 21). Центр цього кола збігається із серединою відрізка, який сполучає ортоцентр трикутника і центр описаного кола. Його радіус дорівнює половині радіуса описаного кола.




*Мал. 21*

*Пряма Сімсона*. Основи перпендикулярів, опущених на сторони трикутника з точки описаного кола, лежать на одній прямій.

*Коло Аполлонія*. Геометричним місцем точок, відношення відстаней від яких до двох даних точок стале, є коло.

***Координати на площині***. Площину, на якій задано систему координат, називають *координатною площиною*. Кожній точці координатної площини відповідає єдина пара дійсних чисел (координати цієї точки), а кожній парі дійсних чисел – єдина точка координатної площини.

*Кожна координата середини відрізка дорівнює півсумі відповідних координат його кінців*. Тобто якщо кінці відрізка $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, то серединою даного відрізка є точка з координатами

$$\frac{x_1+x_2}{2} \text{ і } \frac{y_1+y_2}{2}.$$

*Відстань між точками* $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Квадрат довжини відрізка дорівнює сумі квадратів його проекцій на дві взаємно перпендикулярні прямі.

*Рівнянням фігури* на координатній площині називають рівняння з двома змінними, яке задовольняють координати кожної точки даної фігури і тільки вони.

*Рівняння кола* радіуса $r$ із центром у точці $A(a; b)$ має вигляд

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Якщо центр кола радіуса $r$ лежить у початку координат, то його рівняння $x^2 + y^2 = r^2$.

Кожній прямій координатної площини відповідає лінійне рівняння з двома змінними $ax + by + c = 0$. Таке рівняння називають *загальним рівнянням прямої*.

Рівність $y = kx + b$ – *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*. Тут $k = \operatorname{tg}\alpha$, де $\alpha$ – кут, який утворює пряма з додатним напрямом осі $OX$.

$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ – *рівняння прямої, що проходить через дві дані точки* $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$.

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ – *рівняння прямої у відрізках на осях* (числа $a$ і $b$ показують, які відрізки пряма $l$ відтинає на осях координат).

Якщо прямі $l_1$ і $l_2$ задані рівняннями $y_1 = k_1x + b_1$ і $y_2 = k_2x + b_2$, то:

1) $l_1 \parallel l_2$ тоді і тільки тоді, коли $k_1 = k_2$;

2) $l_1 \perp l_2$ тоді і тільки тоді, коли $k_1 \cdot k_2 = -1$.

***Векторні величини*** – ті, які визначаються не тільки числовими значеннями, а й напрямами. Значення векторних величин – *вектори*. Геометрично вектори (ненульові) зображаються *напрямленими відрізками*. Напрямлений відрізок має початок і кінець. Відстань між ними – *модуль* (довжина) вектора.

Два вектори називають *колінеарними*, якщо відповідні їм напрямлені відрізки розташовані на одній прямій або на паралельних прямих. Колінеарні вектори бувають співнапрямленими або протилежно напрямленими. Два вектори *рівні*, якщо вони співнапрямлені і мають рівні модулі. Два вектори називають *протилежними*, якщо вони мають рівні модулі і протилежно напрямлені.

*Координатами вектора* з початком $A(x_1; y_1)$ і кінцем $B(x_2; y_2)$ називають числа $x = x_2 - x_1$ і $y = y_2 - y_1$.

Записують такий вектор у вигляді:

$\overrightarrow{AB} = (x;\ y)$, або $\vec{a} = (x;\ y)$, або $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$.

*Модуль вектора* $\overrightarrow{AB} = (x;\ y)$ позначають символом $|\overrightarrow{AB}|$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

*Сумою векторів* $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$ називають вектор $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2)$. Для додавання векторів виконуються переставний і сполучний закони.

Геометрично додавати вектори можна за правилом трикутника або паралелограма (мал. 22 і 23). Завжди правильні векторні рівності:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

*Різницею векторів* $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$ називають вектор $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2)$.

Різниця векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{KP}$ дорівнює $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PK}$. *Щоб відняти від одного вектора другий, треба до першого додати вектор, протилежний другому.*

Які не були б вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, завжди $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

Добутком вектора $\vec{a} = (x;\ y)$ на число $n$ називають вектор $n\vec{a} = (nx;\ ny)$. Завжди правильні рівності:

$$(n + m)\,\vec{a} = n\vec{a} + m\vec{a} \text{ і } n(\vec{a} + \vec{b}) = n\vec{a} + n\vec{b}.$$

*Скалярним добутком* двох ненульових векторів називають добуток модулів цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi.$$

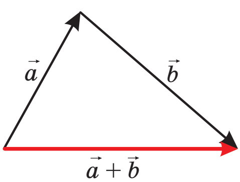
Якщо хоч один з векторів нульовий, то їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Кут $\varphi$ між ненульовими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна знайти, користуючись формулою $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

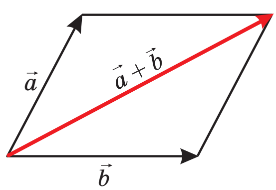
Якщо $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

$\vec{a} = k\vec{b}$ або $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$ – умова колінеарності ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ $(k \neq 0)$;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ або $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$ – умова їх перпендикулярності.




*Мал. 22*




*Мал. 23*

## ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке геометрія? Що таке планіметрія?
2. Наведіть приклади плоских і неплоских фігур.
3. Що означають записи $A \in a$, $B \notin a$?
4. Як слід розуміти вислів «точка $B$ лежить між $A$ і $C$»?
5. Що таке промінь? Як позначають промені?
6. Що таке відрізок? Що таке кінці відрізка?
7. Що таке відстань між двома точками?
8. Яка фігура називається кутом? Як позначають кути?
9. Який кут називають гострим? Прямим? Тупим? Розгорнутим?
10. Які кути називають суміжними? Чому дорівнює їх сума?
11. Які кути називають вертикальними?
12. Сформулюйте теорему про вертикальні кути.
13. Які прямі називають перпендикулярними?
14. Сформулюйте означення паралельних прямих.
15. Сформулюйте ознаку паралельності прямих.
16. Сформулюйте аксіому Евкліда про паралельність прямих.
17. Що таке трикутник? Назвіть елементи трикутника.
18. Якими бувають трикутники?
19. Що таке бісектриса, медіана, висота трикутника?
20. Сформулюйте теорему про суму кутів трикутника.
21. Сформулюйте ознаки рівності трикутників.
22. Який трикутник називають рівнобедреним?
23. Сформулюйте кілька властивостей рівнобедреного трикутника.
24. Як називають сторони прямокутного трикутника?
25. Сформулюйте ознаки рівності прямокутних трикутників.
26. Що таке перпендикуляр, похила, проекція похилої?
27. Що таке відстань від точки до прямої?
28. Що таке коло? Центр? Радіус? Діаметр? Хорда?
29. Що таке круг? Чим відрізняється круг від кола?
30. Сформулюйте означення і властивість дотичної до кола.
31. Що таке центральний кут? Вписаний кут?

**32.** Сформулюйте теорему про вписані кути.
**33.** Як побудувати трикутник за трьома даними сторонами?
**34.** Як побудувати кут, що дорівнює даному?
**35.** Як побудувати бісектрису даного кута?
**36.** Як поділити даний відрізок навпіл?
**37.** Як через дану точку провести пряму, перпендикулярну до даної прямої? А паралельну даній прямій?
**38.** Що таке геометричне місце точок? Наведіть приклади.
**39.** Що таке серединний перпендикуляр даного відрізка?
**40.** Як навколо даного трикутника описати коло?
**41.** Як у даний трикутник вписати коло?
**42.** Що таке чотирикутник?
**43.** Сформулюйте означення паралелограма.
**44.** Які властивості має паралелограм?
**45.** Сформулюйте ознаки паралелограма.
**46.** Що таке прямокутник? Які властивості має прямокутник?
**47.** Що таке ромб? Квадрат? Назвіть їх властивості.
**48.** Сформулюйте теорему Фалеса.
**49.** Сформулюйте теорему про середню лінію трикутника.
**50.** Що таке трапеція? Рівнобічна трапеція? Прямокутна трапеція?
**51.** Сформулюйте теорему про середню лінію трапеції.
**52.** Які трикутники називають подібними?
**53.** Сформулюйте ознаки подібності трикутників.
**54.** Сформулюйте теорему Піфагора.
**55.** Як знайти координати середини відрізка?
**56.** Як знайти відстань між точками з даними координатами?
**57.** Що таке рівняння фігури?
**58.** Яке рівняння має коло? Пряма?
**59.** Наведіть приклади векторних величин.
**60.** Як зображають вектори?
**61.** Що таке координати вектора?
**62.** Що таке довжина вектора?
**63.** Які вектори називають рівними? Колінеарними? Протилежними?

**64.** Що таке сума двох векторів?
**65.** Сформулюйте правило трикутника для додавання векторів.
**66.** Сформулюйте правило паралелограма для додавання векторів.
**67.** Що таке різниця векторів? Як її знаходять?
**68.** Сформулюйте правило множення вектора на число.
**69.** Сформулюйте властивості множення вектора на число.
**70.** Що таке синус, косинус, тангенс кута?
**71.** Сформулюйте теорему косинусів.
**72.** Сформулюйте теорему синусів.
**73.** Що таке многокутник?
**74.** Чому дорівнює сума кутів опуклого $n$-кутника?
**75.** Сформулюйте означення правильного многокутника.
**76.** За якою формулою знаходять довжину кола?
**77.** Що таке площа многокутника?
**78.** За якими формулами обчислюють площі прямокутника, паралелограма, трикутника, трапеції?
**79.** Сформулюйте теорему про відношення площ подібних многокутників.
**80.** За якою формулою знаходять площу круга?

## ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

### *Тематичні завдання в тестовій формі*

#### Прямі і кути

**1.** Установіть, на скільки частин можуть розбити площину дві її прямі.
а) На 2 або на 3; б) на 2 або на 4;
в) на 3 або на 4; г) на 3 або на 5.

**2.** Якщо один із суміжних кутів на $80°$ більший від другого, то другий кут дорівнює:
а) $80°$; б) $140°$; в) $50°$; г) $120°$.

**3.** Відомо, що $a \perp c$ і $b \perp c$. Укажіть правильне відношення.
а) $a \perp b$; б) $a \cap b$; в) $a \parallel b$; г) $a \in b$.

**4.** Кут між однією з двох паралельних прямих і їх січною дорівнює $60°$. Під яким кутом бісектриса цього кута перетинає другу пряму?
а) $60°$; б) $40°$; в) $30°$; г) $120°$.

5. Скільки прямих можна провести через дві різні точки?
а) Одну; б) дві; в) три; г) жодної.

6. Вписаний кут, що спирається на діаметр, дорівнює:
а) $180°$; б) $80°$; в) $45°$; г) $90°$.

7. Яким знаком не позначають взаємне розташування двох прямих?
а) $a \perp b$; б) $a \in b$; в) $a \parallel b$; г) $a \cap b$.

8. Прямі $a$ і $b$ не паралельні прямій $c$. Чи випливає з цього, що прямі $a$ і $b$ не паралельні?
а) Так; б) ні; в) так, якщо $a \perp c$; г) ні, якщо $b \perp c$.

9. Скільки пар вертикальних кутів утворюють три прямі, що перетинаються в одній точці?
а) 3; б) 6; в) 9; г) 12.

10. На одній стороні кута відкладено три відрізки $AB = 2$, $BC = 3$ і $CD = 5$. Через точки $A$, $B$, $C$ і $D$ проведено паралельні прямі $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ і $DD_1$ до перетину з іншою стороною кута. Знайдіть $B_1C_1$, якщо $A_1D_1 = 20$.
а) 9; б) 6; в) 4; г) 10.

## Трикутники

1. Якщо кути трикутника пропорційні числам 2, 3 і 4, то його найменший кут дорівнює:
а) $80°$; б) $40°$; в) $30°$; г) $20°$.

2. Найменший зовнішній кут прямокутного трикутника дорівнює:
а) $180°$; б) $90°$; в) $135°$; г) $125°$.

3. Площа рівностороннього трикутника зі стороною 2 дм дорівнює:
а) 4 дм$^2$; б) $2\sqrt{3}$ дм$^2$; в) $\sqrt{3}$ дм$^2$; г) $0{,}5\sqrt{3}$ дм$^2$.

4. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника $ABC$, якщо $AC = 3$ см, $\angle B = 30°$.
а) 3 см; б) 6 см; в) $\sqrt{3}$ см; г) 12 см.

5. Менша медіана прямокутного трикутника з катетами 5 см і 12 см дорівнює:
а) 2,5 см; б) 6,5 см; в) 6 см; г) 5 см.

6. У трикутнику провели три середні лінії. Скільки пар подібних трикутників утворилося?
а) 4; б) 6; в) 10; г) 12.

**7.** За якою формулою обчислюють радіус кола, вписаного в трикутник?

а) $\frac{abc}{4R}$; б) $\frac{4S}{abc}$; в) $\frac{S}{p}$; г) $\frac{p}{S}$.

**8.** Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює $\sqrt{20}$, а бісектриса, опущена на неї:

а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt{10}$.

**9.** Знайдіть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 6 см і 14 см, а кут між ними 30°.

а) 42 см$^2$; б) $21\sqrt{3}$ см$^2$; в) $21\sqrt{2}$ см$^2$; г) 21 см$^2$.

**10.** Площі двох подібних трикутників відносяться як 4 : 9. Як відносяться їхні сторони?

а) 16 : 81; б) 2 : 4,5; в) 1 : 2,5; г) 2 : 3.

## Чотирикутники

**1.** Кількість осей симетрії квадрата дорівнює:

а) 2; б) 3; в) 4; г) 5.

**2.** Основи трапеції дорівнюють 4 см і 10 см, а її середня лінія:

а) 4 см; б) 7 см; в) 10 см; г) 3,5 см.

**3.** Периметр паралелограма дорівнює 16 см. Одна його сторона – 5 см, а друга:

а) 5 см; б) 6 см; в) 11 см; г) 3 см.

**4.** Знайдіть кути ромба, якщо вони пропорційні числам 2 і 7.

а) 30° і 70°; б) 20° і 140°; в) 40° і 140°; г) 80° і 280°.

**5.** Менша сторона прямокутника дорівнює 5 см. Знайдіть довжину діагоналі, якщо вона утворює з більшою стороною кут 30°.

а) 10 см; б) 5 см; в) 2,5 см; г) 20 см.

**6.** Знайдіть площу ромба, якщо його менша діагональ і сторона дорівнюють 4 м.

а) $4\sqrt{3}$ м$^2$; б) $6\sqrt{3}$ м$^2$; в) $8\sqrt{3}$ м$^2$; г) $2\sqrt{3}$ м$^2$.

**7.** Якщо бісектриса кута прямокутника ділить його на частини, площі яких пропорційні числам 1 і 3, то його суміжні сторони відносяться як:

а) 1 : 2; б) 1 : 3; в) 1 : 4; г) 2 : 3.

**8.** Периметр рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 20 см. Знайдіть бічну сторону трапеції.

а) 5 см; б) 6 см; в) 11 см; г) 3 см.

**9.** Знайдіть найбільший кут прямокутної трапеції, якщо один з її кутів удвічі більший за інший.

а) $130°$ або $170°$; б) $120°$ або $135°$;
в) $140°$ або $145°$; г) $180°$ або $128°$.

**10.** Один з кутів ромба дорівнює $120°$, а периметр 24 см. Менша діагональ ромба дорівнює:

а) 2 см; б) 3 см; в) 4 см; г) 6 см.

## Коло і круг

**1.** Довжина чверті кола радіуса $2\pi$ м дорівнює:

а) $\pi^2$ м; б) $16\pi$ м; в) 2 м; г) $4\pi$ м$^2$.

**2.** Площа круга дорівнює $100\pi$ см$^2$. Знайдіть довжину його кола.

а) $100\pi$ см; б) $50\pi$ см; в) $20\pi$ см; г) $2500\pi$ см.

**3.** Кут між двома радіусами кола дорівнює $125°$. Знайдіть кут між дотичними, проведеними через кінці цих радіусів.

а) $125°$; б) $95°$; в) $35°$; г) $55°$.

**4.** Під яким кутом із центра кола, вписаного в рівносторонній трикутник, видно сторону цього трикутника?

а) $30°$; б) $60°$; в) $90°$; г) $120°$.

**5.** Радіус кола, описаного навколо правильного шестикутника з периметром 24 см, дорівнює:

а) 12 см; б) 3 см; в) 6 см; г) 4 см.

**6.** Кола радіусів 3 м і 7 м мають внутрішній дотик. Відстань між їхніми центрами:

а) 2 м; б) 10 м; в) 4 м; г) 5 м.

**7.** Знайдіть площу кільця, утвореного концентричними колами радіусів 3 м і 5 м.

а) 2 м$^2$; б) $16\pi$ м$^2$; в) $2\pi$ м$^2$; г) $4\pi$ м$^2$.

**8.** Сторона квадрата, описаного навколо кола завдовжки $16\pi$ см, дорівнює:

а) 16 см; б) 8 см; в) 4 см; г) $4\sqrt{2}$ см.

**9.** Правильний трикутник $ABC$ вписаний у коло. Знайдіть довжину кола, якщо довжина дуги $BAC$ дорівнює 6 см.

а) $12\pi$ см; б) 12 см; в) 9 см; г) $4\sqrt{3}$ см.

**10.** Знайдіть площу сектора круга радіуса 6 см з центральним кутом $60°$.

а) $6\pi$ см$^2$; б) $3\pi$ см$^2$; в) $9\pi$ см$^2$; г) $2\pi$ см$^2$.

## Координати на площині

**1.** Середина відрізка $KP$, де $K$ (1; −3), $P$ (7; 5), має координати:

а) (−1; 3); б) (4; 1); в) (2; 1); г) (3; 4).

**2.** Який знак слід поставити в запису $AC * BC$ замість зірочки, якщо $A(-1; 3)$, $B(5; 6)$, $C(2; 4{,}5)$?

а) $>$; б) $<$; в) $=$; г) $\neq$.

**3.** Яка з точок не належить прямій $2x + y = 7$?

а) (−2; 11); б) (−0,5; 8); в) (2; 5); г) (0,5; 6).

**4.** Прямій $y = \frac{1}{2}x + 5$ паралельна пряма:

а) $y = 5$; б) $3x + y = 4$; в) $2y - x = 2$; г) $x + 3y = 6$.

**5.** Пряма $x + y = 5$ утворює з додатним напрямом осі $OX$ кут:

а) 90°; б) 45°; в) 135°; г) 30°.

**6.** Центр кола $x^2 + (y - 2)^2 - 8 = 0$ має координати:

а) (0; 4); б) (1; 2); в) (0; 2); г) (2; 4).

**7.** Точка $M$, яка лежить на осі $OX$ та рівновіддалена від точок $A(5; 4)$ і $B(2; 1)$, має координати:

а) (0; 4); б) (1; 0); в) (0; 2); г) (6; 0).

**8.** Коло з діаметром $AB$, де $A(4; 3)$, $B(-4; -3)$, має рівняння:

а) $x^2 + y^2 = 5$; б) $x^2 + y^2 = 9$;
в) $x^2 + y^2 = 25$; г) $x^2 + y^2 = 3$.

**9.** Якщо діаметр кола $x^2 + y^2 = 25$ проходить через точку $A(3; 4)$, то його рівняння:

а) $3x + 4y = 25$; б) $3y = 4x$;
в) $y + x = 5$; г) $4x + 3y = 0$.

**10.** Яка з прямих не є дотичною до кола $x^2 + (y - 2)^2 = 9$?

а) $x = 3$; б) $y = 3$; в) $x = -3$; г) $y = -1$.

## Вектори

**1.** Якщо $A(1; -3)$ і $B(-7; 12)$, то вектор $\overrightarrow{AB}$ має координати:

а) (6; −15); б) (−8; 15); в) (−8; 9); г) (−6; 9).

**2.** Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні, то:

а) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$; б) $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$;
в) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; г) $\vec{a} : \vec{b} = \vec{0}$.

**3.** Знайдіть координати вектора $\vec{m} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$, якщо $\vec{p} = (-2; 1)$, $\vec{q} = (4; -3)$.

а) (8; −7); б) (−14; 0); в) (8; 11); г) (−2; 3).

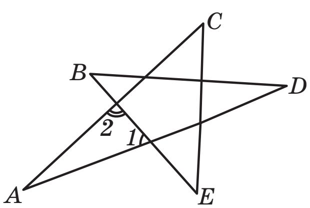
4. Знайдіть довжину вектора $\vec{a} = (-2;\ 4)$.
   а) $2\sqrt{10}$; б) 20; в) 12; г) $2\sqrt{5}$.
5. Вектор, колінеарний вектору $\vec{a} = (-1;\ 4)$, має координати:
   а) $(-2;\ -8)$; б) $(0,5;\ 2)$; в) $(3;\ -3)$; г) $(4;\ -16)$.
6. Сумою векторів $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD}$ є вектор:
   а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AC}$; в) $\vec{0}$; г) $\overrightarrow{AD}$.
7. Якщо скалярний добуток двох одиничних векторів дорівнює 0,5, то кут між ними:
   а) 30°; б) 60°; в) 120°; г) 45°.
8. При якому значенні $m$ вектори $\vec{a} = (-2;\ 6)$ і $\vec{b} = (9;\ m)$ перпендикулярні?
   а) $-3$; б) 27; в) 3; г) $-27$.
9. При якому значенні $x$ вектори $\vec{m} = (3;\ x)$ і $\vec{n} = (-6;\ 7)$ колінеарні?
   а) 14; б) 3,5; в) $-3,5$; г) $-14$.
10. Проекції вектора $\overrightarrow{AB}$ на осі $x$ і $y$ дорівнюють відповідно $a$ і $b$, а проекція вектора $\overrightarrow{BA}$ на вісь $y$ дорівнює:
   а) $-a$; б) $-b$; в) $b$; г) $a$.

## §2 МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЛАНІМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

Планіметричні задачі бувають різних видів, здебільшого – на обчислення, побудову, доведення чи дослідження. У ***задачах на обчислення*** найчастіше вимагається знайти значення геометричної величини: відстань, довжину дуги, міру кута, периметр чи площу фігури.

***ЗАДАЧА 1.*** Знайдіть суму кутів $A, B, C, D, E$ зірки, зображеної на малюнку 24.

***РОЗВ'ЯЗАННЯ.*** Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним. Тому, позначивши на малюнку два кути цифрами *1* і *2*, маємо:



*Мал. 24*

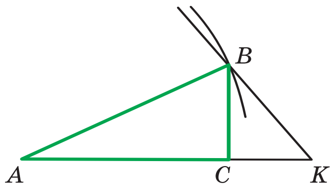
$\angle B + \angle D = \angle 1$, $\angle C + \angle E = \angle 2$. Отже, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = \angle A + \angle 1 + \angle 2 = 180°$.

***ВІДПОВІДЬ.*** Сума кутів кожної такої п'ятикутної зірки дорівнює 180°.

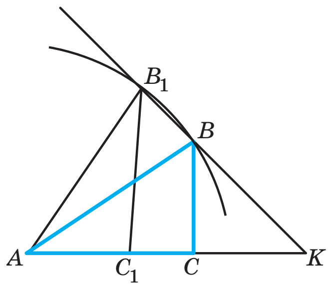
У ***задачах на побудову*** вимагається побудувати фігуру зі вказаними властивостями. Класичними вважають побудови, виконувані тільки лінійкою і циркулем. При цьому часто використовують методи геометричних місць, подібності, паралельного перенесення, симетрії тощо.

***ЗАДАЧА 2.*** Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою $c$ і сумою двох катетів $m$.

***РОЗВ'ЯЗАННЯ.*** *Аналіз*. Припустимо, що потрібний трикутник $ABC$ побудовано (мал. 25). Добудувавши до нього прямокутний рівнобедрений трикутник $BCK$, матимемо трикутник $ABK$, у якого $\angle K = 45°$, $AK = m$ і $AB = c$ – відомі відрізки. За двома даними сторонами і кутом $K$ трикутник $ABK$ побудувати можна. Провівши в ньому перпендикуляр $BC$, можна визначити третю вершину $C$ трикутника $ABC$.




*Мал. 25*




*Мал. 26*

*Побудова*. Відкладаємо відрізок $AK = m$. При одному його кінці будуємо кут $AKB = 45°$, а з другого, як із центра, проводимо дугу кола радіуса $AB = c$. Якщо ця дуга перетинає промінь $KB$ у точці $B$, проводимо перпендикуляр $BC$ до $AK$. Трикутник $ABC$ той, який вимагалося побудувати.

***ДОВЕДЕННЯ.*** За побудовою $AC \perp BC$, $AB = c$ і $AC + CB = AC + CK = AK = m$.

*Дослідження*. Якщо $c \geq m$, то згідно з нерівністю трикутника розв'язків не існує.

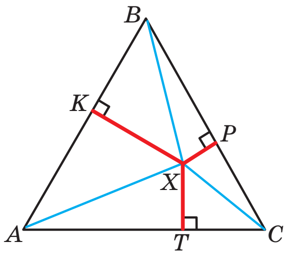
Якщо $c < \frac{m\sqrt{2}}{2}$, то дуга кола не має з променем $KB$ спільних точок, а тому розв'язків немає.

Якщо $\frac{m\sqrt{2}}{2} \leq c < m$, то задача має один розв'язок:

при $c = \frac{m\sqrt{2}}{2}$ коло і промінь $KB$ дотикаються;

в інших випадках, хоч дуга з променем і перетинаються у двох точках (мал. 26), але утворені при цьому трикутники $ABC$ і $AB_1C_1$ рівні.

У ***задачах на доведення*** пропонується довести яке-небудь твердження.




*Мал. 27*

***ЗАДАЧА 3.*** Доведіть, що сума відстаней від довільної точки $X$ внутрішньої області правильного трикутника до його сторін стала, тобто не залежить від положення цієї точки.

***РОЗВ'ЯЗАННЯ.*** Нехай $ABC$ – правильний трикутник зі стороною $a$ і висотою $h$, $X$ – довільна точка у його внутрішній області, а $XK$, $XP$, $XT$ – перпендикуляри до $AB$, $BC$, $AC$ (мал. 27). Виразимо двома способами площу $S$ трикутника $ABC$.

Відрізки $XA$, $XB$, $XC$ даний трикутник розбивають на три трикутники з основами $AB$, $BC$, $CA$ і висотами $XK$, $XP$, $XT$. Їх подвоєні площі дорівнюють $a \cdot XK$, $a \cdot XP$, $a \cdot XT$, а подвоєна площа всього трикутника $a \cdot h$. Отже,

$a \cdot XK + a \cdot XP + a \cdot XT = a \cdot h$, звідси $XK + XP + XT = h$.

Отже, де б не була точка $X$ (усередині $\triangle ABC$), сума відстаней від неї до сторін не змінюється і дорівнює $h$.

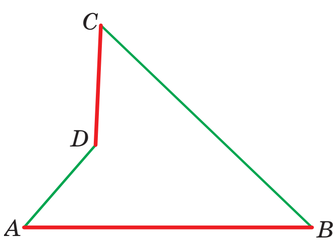
У ***задачах на дослідження*** пропонується дослідити що-небудь.

***ЗАДАЧА 4.*** Кожна сторона паралелограма паралельна протилежній стороні. А чи існує чотирикутник, кожна сторона якого перпендикулярна до протилежної сторони?

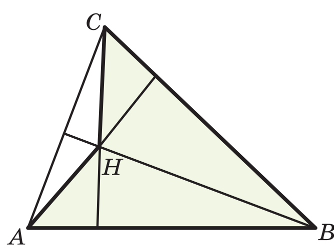
***РОЗВ'ЯЗАННЯ.*** *Перший спосіб*. Спробуємо накреслити хоча б один з таких чотирикутників. Нехай $AB$ і $CD$ – його протилежні сторони – перпендикулярні відрізки. Провівши відрізки $AD$ і $BC$, утворимо чотирикутник $ABCD$, у якого $AB \perp CD$ (мал. 28). Дві інші його сторони $AD$ і $BC$ можуть бути не перпендикулярні. Але продовживши або вкоротивши відрізок $AB$, можна досягти, щоб і вони стали перпендикулярними.

***ВІДПОВІДЬ.*** Чотирикутник, кожна сторона якого перпендикулярна до протилежної сторони, існує.

*Другий спосіб*. Нехай $ABC$ – довільний гострокутний трикутник, а його висоти перетинаються в точці $H$ (мал. 29).




*Мал. 28*




*Мал. 29*

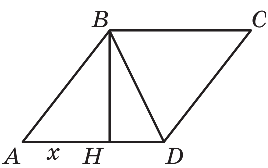
Зафарбуємо неопуклий чотирикутник $ABCH$. Кожна його сторона перпендикулярна до протилежної сторони.

Другий спосіб продуктивніший: він додатково показує, що в такого чотирикутника діагоналі перпендикулярні. А отже, середини сторін чотирикутника $ABCH$ – вершини прямокутника, а площа чотирикутника $ABCH$ дорівнює півдобутку діагоналей тощо.

Якщо в розв'язанні використовують тільки геометричні відомості, таке розв'язання називають *геометричним*. Якщо ж використовують відомості з алгебри чи математичного аналізу, то кажуть про *аналітичне розв'язання*. Найчастіше аналітичне розв'язання задачі зводиться до складання за умовою геометричної задачі відповідних рівнянь чи систем рівнянь.

***ЗАДАЧА 5.*** Знайдіть площу ромба, якщо його висота і менша діагональ відповідно дорівнюють 12 см і 13 см.

***РОЗВ'ЯЗАННЯ.*** Нехай $ABCD$ – ромб (мал. 30), а $BH$ і $BD$ – його висота і діагональ. Тоді $BH = 12$ см, $BD = 13$ см, а $HD = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$ (см).



*Мал. 30*

Нехай $AH = x$. Тоді $AB = AD = AH + HD = x + 5$.

З $\triangle ABH$ $AB^2 = BH^2 + AH^2$. Можемо скласти рівняння:

$(x + 5)^2 = 12^2 + x^2$, або $x^2 + 10x + 25 = 144 + x^2$, звідси $x = 11{,}9$ (см).

Маємо $AB = x + 5 = 11{,}9 + 5 = 16{,}9$ (см). Знайдемо тепер площу $S$ ромба $ABCD$.

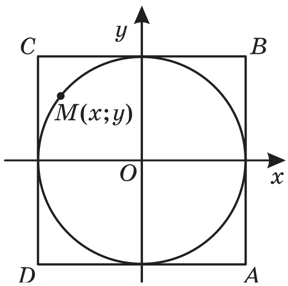
$S = BH \cdot AD$, тобто $S = 12 \cdot 16{,}9 = 202{,}8$ (см$^2$).

***ВІДПОВІДЬ.*** $S = 202{,}8$ см$^2$.

Ефективними методами розв'язування геометричних задач є координатний і векторний методи.

*Координатний метод* полягає в тому, що розв'язуючи геометричну задачу, оперують координатами окремих точок, рівняннями прямих або інших ліній. Розв'язуючи задачу координатним методом, розглядувані фігури розміщують на координатній площині. Приписавши окремим точкам фігур координати, а лініям — рівняння, далі обчислюють координати інших точок, виводять рівняння інших ліній. У результаті отримуємо потрібну відповідь.

Раціональність розв'язання задачі цим методом значною мірою залежить від того, як розглядувану фігуру розмістити відносно координатних осей. Найзручніше цим методом користуватися тоді, коли в задачі мова йде про прямі кути або суми квадратів якихось відстаней.




*Мал. 31*

***ЗАДАЧА 6.*** Знайдіть суму квадратів відстаней від довільної точки кола радіуса 5 см до вершин описаного навколо нього квадрата.

***РОЗВ'ЯЗАННЯ.*** Коло радіуса 5 см і описаний навколо нього квадрат розмістимо в системі координат так, щоб її осі були серединними перпендикулярами для сторін квадрата (мал. 31). Тоді колу відповідатиме рівняння $x^2 + y^2 = 25$, а вершини квадрата матимуть координати $A(5; -5)$, $B(5; 5)$, $C(-5; 5)$, $D(-5; -5)$.

Якщо $M(x; y)$ – довільна точка кола, то $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = (5 - x)^2 + (-5 - y)^2 + (5 - x)^2 + (5 - y)^2 + (-5 - x)^2 + (5 - y)^2 + (-5 - x)^2 + (-5 - y)^2 = 2((5 - x)^2 + (5 + x)^2 + (5 + y)^2 + (5 - y)^2) = 200 + 4(x^2 + y^2) = 300$ (см$^2$).

***ВІДПОВІДЬ.*** 300 см$^2$.

Якщо задачу розв'язують, використовуючи властивості векторів, то це – векторний метод розв'язування задачі. Для ефективного його застосування слід уміти геометричні співвідношення (властивості геометричних фігур) записувати у вигляді векторних рівностей. При цьому часто використовують такі твердження та векторні рівності:

1) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ – точки $A$ і $B$ збігаються;

2) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ – прямі $AB$ і $CD$ паралельні або збігаються;

3) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ – точки $A$, $B$, $C$ лежать на одній прямій;

4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ – прямі $AB$ і $CD$ перпендикулярні;

5) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{m}{n}\overrightarrow{MB}$, а числа $m$ і $n$ додатні – точка $M$ ділить відрізок $AB$ у відношенні $AM : MB = m : n$;

6) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$ – кут між прямими, на яких лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнює $\varphi$;

7) $\overrightarrow{XM} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$ – $M$ – середина відрізка $AB$;

8) $\overrightarrow{XM} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})$ – $M$ – точка перетину медіан трикутника $ABC$;

9) $\overrightarrow{XM} = \dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}$ – точка $M$ ділить відрізок $AB$ у відношенні $AM : MB = m : n$.

Користуючись цими співвідношеннями, можна розв'язувати багато геометричних задач та доводити теореми.

Розв'язування задачі векторним методом складається з кількох кроків:

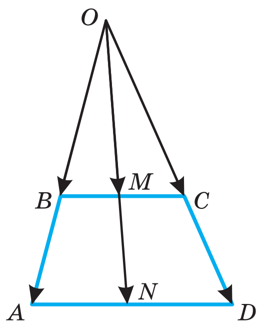
– подані в задачі співвідношення «перекладають мовою» векторів, тобто записують їх відповідними векторними рівностями;

– отримані векторні рівності перетворюють, використовуючи правила векторної алгебри;

– від мови векторів переходять до мови геометрії.

***ЗАДАЧА 7.*** Точка перетину прямих, яким належать бічні сторони трапеції, та середини її основ лежать на одній прямій. Доведіть.

***РОЗВ'ЯЗАННЯ.*** На малюнку 32 зображено трапецію $ABCD$. Точки $M$ і $N$ – середини її основ, а $O$ – точка перетину прямих $AB$ і $CD$. Щоб довести, що точки $M$, $N$ і $O$ лежать на одній прямій, покажемо, що вектори $\overrightarrow{OM}$ і $\overrightarrow{ON}$ – колінеарні.



*Мал. 32*

Оскільки $M$ – середина $BC$, а $N$ – середина $AD$, то виконуються рівності:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \text{ і } \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}).$$

Оскільки $\triangle OBC \sim \triangle OAD$, то $OA : OB = OD : OC = k$. Звідси

$\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(k\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}k(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = k\overrightarrow{OM}$.

Маємо $\overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{OM}$. Отже, точки $M$, $N$ і $O$ лежать на одній прямій.

## ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

### А

1. Через точку на площині проведено 3 прямі. Доведіть, що міри принаймні двох з утворених кутів менші за 61°.
2. Установіть вид трикутника, якщо його кути пропорційні числам 1, 2 і 3.
3. Визначте найбільший внутрішній кут трикутника, якщо його зовнішні кути (взяті по одному при вершині) пропорційні числам 2, 3 і 4.
4. Висота і медіана прямокутного трикутника, проведені з вершини прямого кута, ділять кут на три рівні частини.

Знайдіть кут між висотою і бісектрисою, проведеною із цієї вершини.

**5.** Точка $O$ – спільна середина відрізків $AD$ і $BC$. Пряма $l$, що проходить через точку $O$, перетинає відрізок $AB$ у точці $M$, а відрізок $CD$ у точці $N$. Доведіть:

а) $MO = NO$; б) $AM = DN$; в) $\angle DNO = \angle AMO$.

**6.** У рівнобедреному трикутнику $ABC$ проведено медіани $AM$ і $BN$ до бічних сторін. Доведіть:

а) $\triangle AMB = \triangle BNA$; б) $\triangle CAM = \triangle CBN$.

**7.** У рівнобедреному трикутнику $ABC$ проведено бісектриси $AM$ і $BN$ до бічних сторін. Доведіть:

а) $\triangle AMB = \triangle BNA$; б) $\triangle CAM = \triangle CBN$.

**8.** Побудуйте рівнобедрений трикутник, у якого бічна сторона і висота, проведена до основи, дорівнюють відповідно 8 см і 6 см.

**9.** Побудуйте прямокутний трикутник, у якого один з катетів дорівнює 3 см, а медіана, проведена до іншого катета, 6 см.

**10.** Поділіть заданий відрізок на 7 рівних частин.

**11.** Сума двох сусідніх кутів опуклого чотирикутника дорівнює 100°. Знайдіть кут між бісектрисами двох інших його кутів.

**12.** Знайдіть усі медіани прямокутного трикутника з катетами 3,2 см і 4,8 см.

**13.** Бісектриса тупого кута паралелограма ділить його сторону на відрізки 5 см і 15 см, починаючи від вершини гострого кута. Обчисліть периметр паралелограма.

**14.** Перпендикуляр, проведений з вершини прямого кута до однієї з діагоналей прямокутника, поділяє її у відношенні $1:3$. Доведіть, що одна зі сторін прямокутника дорівнює половині діагоналі.

**15.** Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і $4\sqrt{6}$ см, а висота, проведена з їхньої спільної вершини, – 4 см. Знайдіть площу трикутника.

**16.** Знайдіть основи трапеції, якщо їх різниця і середня лінія трапеції дорівнюють 10 м.

**17.** Катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 12 см. Знайдіть синуси, косинуси і тангенси кутів трикутника.

**18.** Обчисліть кути рівнобічної трапеції, якщо синус одного з них дорівнює $0{,}5\sqrt{3}$.

**19.** Побудуйте кут, косинус якого дорівнює 0,5. Знайдіть синус і тангенс цього кута.

**20.** Побудуйте кут, тангенс якого дорівнює 5. Знайдіть синус і косинус цього кута.

**21.** Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною 6 см і кутом при основі, косинус якого дорівнює $\frac{1}{3}$.

**22.** Косинуси гострих кутів трапеції дорівнюють 0,8 і 0,6. Знайдіть синуси, косинуси і тангенси його тупих кутів.

**23.** Знайдіть невідому сторону $\triangle ABC$, якщо:
а) $AB = 3$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 60°$;
б) $AB = 6\sqrt{2}$ см, $AC = 4$ см, $\angle A = 45°$.

**24.** Сторони трикутника пропорційні числам 7, 8 і 13. Знайдіть найбільший кут трикутника, якщо його периметр 56 см.

**25.** Діагоналі паралелограма дорівнюють 12 см і 32 см, а одна зі сторін 14 см. Знайдіть периметр паралелограма і кут між його діагоналями.

**26.** Діагоналі ромба дорівнюють 16 см і 12 см. Знайдіть периметр і площу ромба.

**27.** Периметр ромба дорівнює 6,8 см, а одна з діагоналей 1,6 см. Знайдіть площу ромба.

**28.** Периметр паралелограма дорівнює 52 см, а його площа 60 см$^2$. Знайдіть сторони і висоти паралелограма, якщо його гострий кут 30°.

**29.** У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 8 см і 18 см. Знайдіть радіус вписаного кола.

**30.** Бісектриса прямого кута трикутника ділить гіпотенузу на відрізки 20 дм і 15 дм. Знайдіть площу трикутника.

**31.** Знайдіть діагоналі рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 11 см і 21 см, а бічна сторона 13 см.

**32.** Знайдіть кути опуклого п’ятикутника, якщо вони пропорційні числам 3, 4, 5, 7, 8.

**33.** Центральний кут правильного $n$-кутника у 4 рази менший за його внутрішній кут. Знайдіть $n$.

**34.** Накресліть коло діаметра 6 см. Впишіть у коло й опишіть навколо нього правильні $n$-кутники та обчисліть їх периметри, якщо: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 12$.

**35.** У коло вписано квадрат і правильний шестикутник. Периметр квадрата 24 см. Знайдіть периметр і площу шестикутника.

**36.** Навколо кола описано правильний трикутник, а в коло вписано правильний шестикутник, периметр якого 18 см. Знайдіть периметр і площу трикутника.

**37.** Дано правильний шестикутник зі стороною 4 см. Знайдіть ширину і площу кільця, утвореного колами, вписаним і описаним навколо шестикутника.

**38.** Знайдіть сторони та площу $\triangle ABC$, якщо $A(3; 4)$, $B(-3; 4)$, $C(-3; -4)$.

**39.** Дано $\triangle ABC$, у якого $A(7; 5)$, $B(4; 1)$, $C(-4; 7)$. Знайдіть довжини його медіан.

**40.** Відрізок $MN$ точками $K$ і $P$ поділено на три рівні частини ($MK = KP = PN$). Знайдіть координати точки $N$, якщо $M(2; -4)$, $P(-6; 2)$.

**41.** На осі абсцис знайдіть точку $M$, яка рівновіддалена від початку координат і від точки $P(2; 3)$.

**42.** Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точки $A(1; 4)$ і $B(-2; 1)$. Знайдіть площу трикутника, який відтинає ця пряма від осей координат.

**43.** Доведіть, що трикутник з вершинами $A(3; 4)$, $B(6; -2)$, $C(-3; 1)$ – рівнобедрений. Знайдіть його площу.

**44.** Установіть вид чотирикутника $ABCD$, якщо $A(3; 1)$, $B(4; 6)$, $C(9; 7)$, $D(8; 2)$. Знайдіть його периметр і площу.

**45.** Знайдіть координати точки, яка симетрична точці $A(3; -5)$ відносно: а) точки $(0; 0)$; б) осі абсцис; в) осі ординат.

**46.** Побудуйте два довільні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Побудуйте вектор $\vec{d}$ такий, що:

а) $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$;

в) $\vec{d} = \vec{a} - 3\vec{b}$; г) $\vec{d} = 2\vec{a} + 0{,}5\vec{b}$.

**47.** Чи рівні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, якщо $A(1; 6)$, $B(3; 2)$, $C(0; -1)$, $D(2; -5)$?

**48.** Знайдіть модуль вектора $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (1; 3)$, $\vec{b} = (-2; 0)$.

**49.** При яких значеннях $x$ вектори $\vec{a} = (x; 2)$ і $\vec{b} = (4; 2x)$ колінеарні?

**50.** При яких значеннях $x$ вектори $\vec{p} = (2; x)$ і $\vec{s} = (x; x + 3)$ перпендикулярні?

## Б

**51.** По різні сторони від прямої $MN$ позначено точки $A$ і $B$ так, що $MA = MB$ і $NA = NB$. Доведіть, що $AB \perp MN$.

**52.** У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 30 см. Висота, проведена до бічної сторони, поділяє її на відрізки у відношенні 7 : 18, починаючи від вершини. Знайдіть площі частин трикутника, на які його поділяє ця висота.

**53.** Сторона трикутника, медіана і висота, проведені до неї, дорівнюють відповідно 34, 25 і 24 см. Знайдіть периметр трикутника.

**54.** Основи трапеції дорівнюють 6 см і 18 см. У якому відношенні діагоналі діляться точкою перетину?

**55.** Довжина кола збільшилася на 20 %. На скільки відсотків збільшиться площа вписаного в це коло правильного трикутника?

**56.** Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а один з гострих кутів дорівнює 30°. Знайдіть радіус кола з центром у вершині цього кута, яке поділяє даний трикутник на дві рівновеликі частини.

**57.** Батько і дочка стоять одне навпроти одного. Їхні тіні відповідно дорівнюють 3 м і 2,5 м. Який зріст має дочка, якщо зріст батька 183 см?

**58.** Основи рівнобічної трапеції, в яку можна вписати коло, пропорційні числам 3 і 11. Знайдіть синуси кутів трапеції.

**59.** Знайдіть невідомі сторони $\triangle ABC$, якщо:

а) $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 60°$;

б) $AB = 6$ см, $AC = 4$ см, $\cos B = \frac{7}{9}$;

в) $AC - AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 120°$;

г) $AC = 6$ см, $BC = 14$ см, $\angle A = 60°$.

**60.** Сторони трикутника дорівнюють 11 см, 23 см і 30 см. Знайдіть довжину медіани, бісектриси і висоти, проведених до найбільшої сторони.

**61.** У трикутику $ABC$ $AB = BC = 6$ см, $\sin A = 0{,}4$. Знайдіть відстань від точки перетину медіан трикутника до центра кола, описаного навколо трикутника.

**62.** $AL$ – бісектриса рівнобедреного $\triangle ABC$ ($AB = BC$), $BL = a$, $\angle A = 2\alpha$. Знайдіть сторони трикутника і довжини його бісектрис.

**63.** $BM$ – медіана трикутника $ABC$, $BM = m$, $\angle ABM = \alpha$, $\angle CBM = \beta$. Знайдіть $AB$.

**64.** Основи трапеції дорівнюють 6 см і 24 см. Знайдіть радіуси вписаного і описаного кіл.

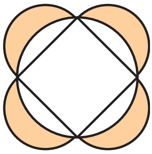
**65.** На сторонах $AB$ і $BC$ трикутника $ABC$ взято точки $K$ і $T$ так, що $AB = 10$ см, $AK = 2$ см, $BC = 14$ см, $TC = 9$ см. Знайдіть площу чотирикутника $AKTC$, якщо $S_{ABC} = 28$ см$^2$.

**66.** Основи рівнобічної трапеції $ABCD$ дорівнюють 11 см і 21 см, а бічна сторона – 13 см. Знайдіть радіуси кіл: а) описаного навколо трапеції; б) вписаного в $\triangle ABC$; в) вписаного в $\triangle ACD$.

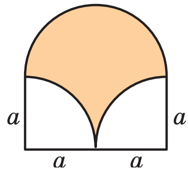
**67.** Дано два круги з радіусами по 1 дм, відстань між їх центрами дорівнює $\sqrt{3}$ дм. Знайдіть площу спільної частини цих кругів.

**68.** Спільна хорда двох кругів стягує дуги 60° і 120°. Знайдіть відношення радіусів цих кругів.

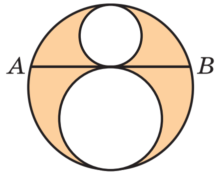
**69.** Чотири серпики утворені колом, описаним навколо квадрата, і півколами, побудованими на сторонах квадрата як



Мал. 33




Мал. 34




Мал. 35

на діаметрах (мал. 33). Доведіть, що сума площ цих чотирьох серпиків дорівнює площі квадрата.

**70.** Знайдіть площу фігури, заштрихованої на малюнку 34.

**71.** На малюнку 35 зображено три різні попарно дотичні кола і хорда, яка дотикається до двох менших кіл у їх спільній точці. Знайдіть площу заштрихованої частини більшого круга, якщо довжина хорди $a$.

**72.** У круговий сектор $AOB$ радіуса $OA = 10$ см вписано коло. Знайдіть відношення площ сектора і круга, якщо $S_{\triangle AOB} = 25\sqrt{3}$ см$^2$.

**73.** $AK$, $BL$, $CM$ – медіани трикутника $ABC$. Знайдіть координати точки $L$, якщо $A(-3; -1)$, $B(-2; 1)$, $K(1; -1)$.

**74.** Знайдіть сторони та площу трикутника $ABC$, якщо $A(a; b)$, $B(-a; b)$, $C(-a; -b)$ і точка $A$ лежить у III координатній чверті.

**75.** Дано трикутник $ABC$, у якого $A(7; 5)$, $B(4; 1)$, $C(-4; 7)$. Знайдіть довжини медіани, висоти і бісектриси, проведених з вершини $B$.

**76.** Використовуючи умову попередньої задачі, напишіть рівняння медіани, висоти і бісектриси, проведених з вершини $B$.

**77.** Точки $A(2; -5)$ і $C(2; -1)$ є вершинами квадрата $ABCD$. Напишіть рівняння кола, вписаного в цей квадрат, та кола, описаного навколо нього. Знайдіть невідомі вершини квадрата.

**78.** Запишіть рівняння прямої, яка проходить через центри двох кіл: $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ і $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 3$.

**79.** Чи має трикутник $ABC$, у якого $A(-6; -1)$, $B(-3; 5)$, $C(3; 2)$, вісь симетрії? Якщо має, то запишіть її рівняння.

**80.** $AC$ – діагональ квадрата. Запишіть рівняння осей симетрії цього квадрата, якщо $A(1; 2)$, $C(5; 6)$.

**81.** Коло радіуса 3 дотикається до осей координат у I чверті. Запишіть рівняння цього кола і кола, симетричного даному відносно: а) початку координат; б) осі абсцис; в) осі ординат; г) прямої $y = 2x$.

**82.** $O$ – точка перетину медіан рівностороннього трикутника $ABC$. При паралельному перенесенні точка $A$ відобразилася на точку $O$. Виконайте паралельне перенесення $\triangle ABC$. Знайдіть периметр побудованого трикутника, якщо $S_{\triangle AOB} = S\sqrt{3}$.

**83.** При гомотетії відносно початку координат точка $A(1;\ 2)$ переходить у точку $A_1(3;\ 6)$. У яку точку при цій гомотетії перейде точка $B(3;\ -2)$? Знайдіть коефіцієнт гомотетії.

**84.** Ромби $ABCD$ і $MNPK$ – подібні, $AC:BD = 4:5$. Знайдіть діагоналі ромба $MNPK$, якщо його площа дорівнює 40 см$^2$.

**85.** Пряма $MN$, паралельна основі $AC$ трикутника $ABC$, ділить його на дві частини – трикутник і трапецію. Площі цих фігур пропорційні числам 1 і 3. Знайдіть периметр $\triangle ABC$, якщо периметр $\triangle MBN$ дорівнює 7 см.

**86.** Побудуйте три довільні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Побудуйте вектор $\vec{d}$ такий, що:

а) $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b}$; б) $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$;

в) $\vec{d} = 0{,}5\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$; г) $\vec{d} = \vec{a} + 0{,}5\vec{b} - 2\vec{c}$.

**87.** Знайдіть модуль вектора $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $\left(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}}\right) = 60°$.

**88.** Знайдіть косинус кута $A$ трикутника $ABC$, якщо $A(-1;\ 2)$, $B\ (3;\ 5)$, $C\ (2;\ -1)$.

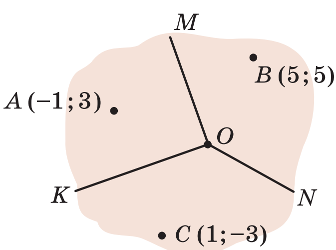
**89.** При яких значеннях $a$ кут між векторами $\vec{m} = (6;\ a)$ і $\vec{b} = (-5;\ a - 1)$ тупий?

**90.** Знайдіть кут між одиничними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо вектор $5\vec{a} - 4\vec{b}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a} - 2\vec{b}$.

**91.** Дано точки $A(4;\ -2)$ і $B(2;\ -5)$. Запишіть рівняння прямої, яка дотикається до кола діаметра $AB$ у точці $A$.

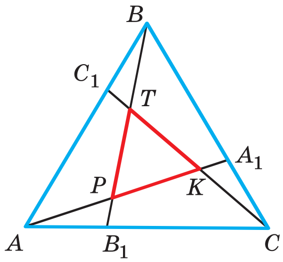
**92.** Запишіть рівняння дотичних, проведених з точки $A(5;\ 0)$ до кола $x^2 + y^2 = 9$.

**93.** На діаграмі Вороного зображено три антени $A$, $B$, $C$, їх координати та області обслуговування (мал. 36). Ребра $OM$, $ON$, $OK$ клітин на діаграмі Вороного будуються як серединні перпендикуляри до відрізків $AB$, $BC$ і $AC$. Запишіть рівняння ребер діаграми Вороного і координати точки $O$ – вершини діаграми Вороного.

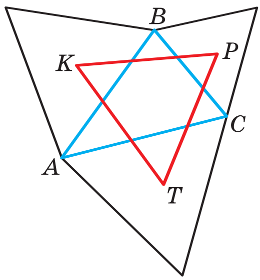



*Мал. 36*

*Георгій Феодосійович ВОРОНИЙ (1868–1908)*




*Мал. 37*




*Мал. 38*

**94*.** На сторонах $AB$, $BC$ і $CA$ трикутника $ABC$ позначено точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ такі, що $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 2$ (мал. 37). Як відносяться площі трикутників $ABC$ і $KPT$?

**95*.** На сторонах довільного трикутника $ABC$ зовні нього побудовано правильні трикутники (мал. 38). Доведіть, що їх центри $K$, $P$, $T$ – вершини правильних трикутників.

**96.** На основі $AC$ трикутника $ABC$ взято точки $M$ і $H$ такі, що $AM < AH$. Прямі $BM$ і $BH$ ділять медіану $AK$ на три рівні частини. Знайдіть $AC$, якщо $MH = 3$.

**97*.** Протилежні сторони опуклого шестикутника паралельні. Доведіть, що прямі, які сполучають середини протилежних сторін, перетинаються в одній точці.

**98*.** Пряма Ейлера проходить через центр вписаного у трикутник кола. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.

**99*.** Якщо вписане в трикутник коло дотикається до його сторін $AB$, $BC$, $CA$ в точках $A_1$, $B_1$, $C_1$, то прямі $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ перетинаються в одній точці. Доведіть.

**100*.** На катетах $AC$ і $BC$ прямокутного трикутника $ABC$ зовні нього побудовано квадрати $ACKP$ і $CBMT$. Доведіть, що прямі $AM$, $BP$ і висота $CH$ трикутника перетинаються в одній точці.