## Содержание:

|  |  |
| --- | --- |
| Из истории начертательной геометрии | 3 |
| Виды проецирования | 5 |
| Пересечение многогранников плоскостью (описание метода) | 12 |
| Примеры задач | 14 |
| Список используемой литературы |  |

## Из истории начертательной геометрии.

Еще в глубокой древности человек чертил и рисовал на скалах, камнях, стенах и предметах домашнего обихода изображения вещей, деревьев, животных и людей. Он делал это для удовлетворения своих потребностей, в том числе эстетических. При этом основное требование к таким изображениям заключалось в том, чтобы изображение вызывало правильное зрительное представление о форме изображаемого предмета.

Римский архитектор Витрувий еще в 1 в. до н. э. применял три проекции – план, фасад и профиль. Витрувий рассказывает в своем труде «Десять книг об архитектуре», что еще в V в. до н. э. Агафарх, Демокрит и Анаксагор пользовались элементами перспективы при создании декорации для театра, когда исполнялись «Прикованный Прометей» и другие трагедии великого древнегреческого драматурга Эсхила (525-456 гг. до н. э.).

С ростом практических и технических применений изображений (в строительстве зданий и других гражданских и военных сооружений и т. п.) к ним стали предъявлять и такие требования, чтобы по изображению можно было судить о геометрических свойствах, размерах и взаиморасположении отдельных элементов определенного предмета. О таких требованиях можно судить по многим памятникам древности, уцелевшим до наших дней. Однако строгие геометрические обоснованные правила и методы изображения пространственных фигур (с соблюдением перспективы) стали систематически разрабатывать художники, архитекторы и скульпторы лишь в эпоху Возрождения: Леонардо да Винчи, Дюрер, Рафаэль, Микеланджело, Тициан и др.

Об изображениях, выполненных методами, близкими к аксонометрии, свидетельствуют русские фрески и иконописная живопись XIV-XVI вв. Отсутствием перспективы характеризуются многие русские миниатюры с технической тематикой.

Основы математической теории перспективы были впервые разработаны Ж. Дезаргом в 1630 г. В русских чертежах XVIII в. применяются, кроме перспективных и аксонометрических, также ортогональные проекции. Последние, в частности, использовались выдающимися русскими изобретателями И. И. Ползуновым и И. П. Кулибиным.

Растущие запросы архитектуры, техники, промышленности, военного дела и живописи привели к формированию специальной математической ветви – начертательной геометрии, завершенной французским математиком Г. Монжем. Труд последнего «Начертательная геометрия», возникший из решений ряда вопросов фортификации и опубликованный в 1798 г., лег в основу проекционного черчения, которое широко используется в современной технике и науке. В своей книге Монж разработал метод ортогонального проектирования пространственных фигур на две взаимно перпендикулярные плоскости («метод Монжа»), получая двойное изображение оригинала – на *горизонтальной* и на *вертикальной* плоскостях. Это дает возможность решить и обратную задачу: восстановление пространственной фигуры или изучение ее геометрических свойств по заданным (горизонтальному и вертикальному) изображениям, а также решение различных задач, касающихся пространственных фигур, с помощью их плоских изображений.

Недостатком метода Монжа является малая наглядность. Поэтому во многих вопросах, в частности в школе, наиболее употребительным является более наглядный, аксонометрический метод, основанный на параллельной проекции.

Наиболее наглядное изображение пространственных фигур на плоскости дает центральная проекция – перспектива, требующая, однако, дополнительных условий для решения обратной задачи, о которой говорилось выше. Существуют и другие способы изображения пространственных фигур (проекции с числовыми отметками, федоровские проекции и т. д.).

Первая оригинальная русская книга по начертательной геометрии была опубликована в 1821 г. Я. А. Севастьяновым. Разные прикладные вопросы начертательной геометрии разрабатывались академиком И. И. Сомосовым и профессором В. И. Курдюмовым. Значительный научный вклад в развитие начертательной геометрии внес крупный русский кристаллограф и геометр Е.С. Федоров (1853-1919). Своими трудами он способствовал не только развитию теории групп, но и заложению основ многомерной начертательной геометрии. Со второй половины прошлого столетия на развитие начертательной геометрии стала оказывать значительное влияние проективная геометрия. Понятия проективной геометрии для построения начертательной широко использовали А. К. Власов, Н. А. Рынин и другие советские математики.

(«История математики в школе» Г.И.Глейзер)

### Виды проецирования

Методом начертательной геометрии является графический метод, основанный на операции проецирования - бинарная конструктивная модель пространства, пространственных форм и отношений, т.е. метод плоскостных (бинарных, двумерных) моделей пространств.

Нам необходимо строить плоскостные модели пространств и по ним уметь решать разнообразные пространственные задачи. Если трёхмерные пространственные формы сформированы на двухмерной плоскости - это чертёж. Чертёж - это определённая совокупность точек и линий на плоскости. Начертательная геометрия занимается построением чертежей пространственных форм и отношений. Какие же двухмерные чертежи могут быть моделями, которые бы отображали свойства пространства, пространственные формы и отношения?

Тут возникает два вопроса:

1. Как образовать, как получить такие модели? (Как строить такие чертежи, чтобы они были отображением пространства)
2. Что изображать на этой модели (чертеже), чтобы эта модель могла отражать пространственные формы и отношения?

Отвечая на первый вопрос, можно сказать, что каждый чертёж построен по методу проекций. Существует два вида проецирования: центральное и параллельное.

### Центральное проецирование.

Центральное проецирование - наиболее общий случай получения проекций геометрических фигур. Сущность его состоит в следующем:

|  |  |
| --- | --- |
| Рис.1 | Пусть даны плоскость (тэта) и точка S (рис.1). Возьмём в пространстве произвольную точку A, причём A S A S. Нам нужно построить центральную проекцию точки А. Для этого через заданные точки S и A проведём луч [SA). Центральной проекцией точки А будет точка пересечения луча [SA) с плоскостью .  [SA) = A |

Плоскость называют плоскостью проекций, точку S - центром проекции, полученную точку A - центральной проекцией точки А на плоскость , [SA) - проецирующим лучом.



Аппарат центрального проецирования задан, если задано положение плоскости проекций и центра проекций S. Если аппарат проецирования задан, то всегда можно определить положение центральной проекции любой точки пространства на плоскости проекций.



Например: Дана точка B. Проведём проецирующий луч [SB) и определим точку встречи его с плоскостью . Это и есть центральная проекция B точки B при заданном аппарате проецирования (,S).



Если точка С расположена так, что проецирующий луч [SС) , то он пересечёт плоскость проекций в несобственной точке С.



При заданном аппарате проецирования (,S) каждая точка пространства будет иметь одну и только одну центральную проекцию (т.к. через две различные точки можно провести одну и только одну прямую). Обратное утверждение не имеет смысла, так как точка A может быть центральной проекцией любой точки, принадлежащей прямой (AS) (Например центральные проекции точек A и D совпадают).



Отсюда следует, что одна центральная проекция точки не определяет положение точки в пространстве.

|  |  |
| --- | --- |
| Рис.2 | Для определения положения точки в пространстве необходимо иметь две центральные проекции точки, полученные из двух различных центров проецирования (рис.2). |

Достоинство центрального проецирования - наглядность. Недостаток - степень искажения изображения зависит от расстояния центра проекций до плоскости проекций, поэтому центральное проецирование неудобно для простановки размеров.

В машиностроительном черчении применяется параллельное проецирование.

### Параллельное проецирование.

Параллельное проецирование является частным случаем центрального проецирования, когда центр проекций лежит в несобственной точке S, поэтому все проецирующие лучи параллельны.



|  |  |
| --- | --- |
| Рис.3 | Аппарат параллельного проецирования задан, если задано положение плоскости проекций и направление проецирования S. |

Все свойства центрального проецирования справедливы для параллельного проецирования:

1. При задании аппарата параллельного проецирования каждая точка пространства имеет одну и только одну параллельную проекцию. Обратное утверждение не имеет места.
2. Для задания точки в пространстве необходимо иметь две её параллельные проекции, полученные при двух различных направлениях проецирования.

Параллельное проецирование делится на:

* Прямоугольное - =90° ( - угол падения проецирующего луча к плоскости проекций).



* Косоугольное - 90°.



**Основные инвариантные (независимые) свойства параллельного проецирования.**

При параллельном проецировании нарушаются метрические характеристики геометрических фигур (происходит искажение линейных и угловых величин), причём степень нарушения зависит как от аппарата проецирования, так и от положения проецируемой геометрической фигуры в пространстве по отношению к плоскости проекции.

|  |  |
| --- | --- |
| Рис.4 | Пример: (A,B,C,D)  |AB||AB|, |BC||BC| и т.д. |DAB||DAB|, |ABC||ABC| и т.д. |

Но наряду с этим, между оригиналом и его проекцией существует определённая связь, заключающаяся в том, что некоторые свойства оригинала сохраняются и на его проекции. Эти свойства называются инвариантными (проективными) для данного способа проецирования.

В процессе параллельного проецирования (получения проекций геометрической фигуры по её оригиналу) или реконструкции чертежа (воспроизведения оригинала по заданным его проекциям) любую теорему можно составить и доказать, базируясь на инвариантных свойствах параллельного проецирования, которые в начертательной геометрии играют такую же роль, как аксиомы в геометрии.

Следовательно, можно утверждать, что в начертательной геометрии существуют две системы аксиом:

* одна система используется при параллельном проецировании - это суть инвариантные свойства параллельного проецирования.
* другая система используется, когда проекции построены и решается плоская задача (задача на плоскости) - это аксиомы евклидовой геометрии.

Отсюда ясно, насколько важно выяснить и хорошо усвоить эти инвариантные свойства.

1. Проекция точки есть точка.

2. Проекция прямой линии на плоскость есть прямая линия.

(Для всех прямых, не параллельных направлению проецирования, проекция прямой есть прямая.)

3. Если в пространстве точка инцидентна (принадлежит) линии, то проекция этой точки принадлежит проекции линии.

Следствие: Если прямые пересекаются в точке K, то проекции прямых пересекаются в проекции точки - K.



4. Проекции взаимно параллельных прямых также взаимно параллельны.

5. Отношение отрезков прямой равно отношению проекций этих отрезков.

6. Если плоская фигура параллельна плоскости проекций, то на эту плоскость она проецируется в конгруэнтную фигуру.

При параллельном переносе плоскости проекций величина проекций не изменится, следовательно, мы можем не рисовать положение плоскости проекций.

Для построения обратимого чертежа необходимо иметь две взаимосвязанные проекции оригинала.

Поэтому только прямоугольное (ортогональное) проецирование, по крайней мере, на две взаимно перпендикулярных плоскости проекций является основным методом построения технического чертежа (метод Монжа).

Ортогональное (прямоугольное) проецирование обладает рядом преимуществ перед центральным и параллельным (косоугольным) проецированием.

К ним в первую очередь следует отнести:

* простоту геометрических построений для определения ортогональных проекций точек
* возможность при определённых условиях сохранять на проекциях форму и размеры оригинала.

Поэтому этот метод удобен для простановки размеров.

(http://www.ssau.ru/books/gubanov/lection1.htm)

## Пересечение многогранников плоскостью.

**Многогранником** называется пространственная фигура, ограниченная замкнутой поверхностью, состоящей из отсеков плоскостей, имеющих форму многоугольников.

Стороны многоугольников образуют **рёбра,** а плоскости многоугольников - **грани** многогранника.

Поэтому задачу по определению линии пересечения поверхности многогранника плоскостью можно свести к многократному решению задачи по нахождению:

а) линии пересечения двух плоскостей (граней многогранника и секущей плоскости)   
или  
б) точки встречи прямой (рёбер многогранника) с секущей плоскостью.

(http://www.ssau.ru/books/gubanov/lection1.htm)

|  |  |
| --- | --- |
| Основной типовой задачей на эту тему в школьной программе является построение сечения, по трем, заданным на поверхности многогранника, точкам, принадлежащим секущей плоскости.  Алгоритм построения такого сечения следующий:  1) Выбираем наиболее подходящую грань многогранника для построения на ее плоскости (далее плоскость основания) (т.е. плоскости к которой принадлежит выбранная грань) следа секущей плоскости. Для данных | 1) |

целей наиболее подходящей является грань, на ребра которой можно опустить проекцию от каждой заданной точки.

(На картинке: M∈(ASE); K∈(ESD); N∈(BSC). В данном примере наиболее подходящей является грань (ABCDE))

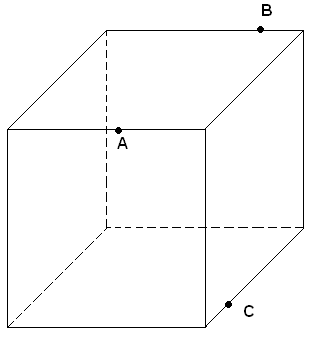
|  |  |
| --- | --- |
| 2)Проецируем каждую заданную точку на плоскость основания. Существует два возможных вида проециро-вания: центральное и параллельное. Центральное проецирование, как правило, используется при построении сечений пирамид, а вершина пирамиды, при этом является центром проекции. Параллельное проецирование используется при построении сечений призм.  (в данном примере используем центральное проецирование. Опускаем из вершины S к плоскости | 2) |

проекций проецирующие лучи:(SM),(SK),(SN). Назовем получившиеся при пересечении проецирующих лучей с ребрами, образованными основанием и боковыми сторонами пирамиды: M’, K' и N’, соответственно.)

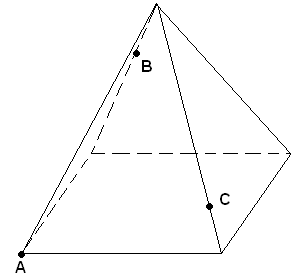
|  |  |
| --- | --- |
| 3)Пересекаем прямую, образованную двумя заданными точками, с прямой образованной проекциями этих же точек.(MK и M’K’). Полученная точка (P1) принадлежит следу секущей плоскости на плоскости основания. Находим вторую точку (P2) и строим прямую (след секущей плоскости). | 3) |
| 4) Далее, для нахождения точек пересечения с ребрами многогранника, от точки пересечения ребра с плоскостью основания проводим прямую, проходящую через проекцию, заданной в условии задачи точки (AK’). От точки пересечения этой прямой со следом секущей плоскости (K”) проводим прямую (K”K), проходящую через точку, проекция которой перед этим использовалась. Пересечение этой прямой с ребром, на котором ищется пересечение с плоскостью сечения, является искомой точкой (A’).  5) соединяем все найденные точки. | 4)  5) |

## Примеры задач.

* 1. Постройте сечение куба плоскостью проходящей через точки, указанные на рисунке



* 1. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, через точки, указанные на рисунке.



* 1. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через точки, указанные на рисунке.
  2. Меньший куб поставлен на больший таким образом, что они имеют общую вершину и их грани параллельны. Постройте сечение полученной фигуры плоскостью, проходящей через три точки, лежащие на скрещивающихся ребрах меньшего куба.

Решение:

1)

|  |  |
| --- | --- |
| А) проводим линию пересечения с гранью куба (АВ)  Б) проводим параллельную ей (АВ)на противолежащей грани (ЕС)  В) проводим ЕА  Г) проводим прямую BD||EA  Д) Соединяем D c C  Сечение (ABDCE) построено. |  |

2)

|  |  |
| --- | --- |
| А) проецируем на плоскость основания, путем центрального проецирования из вершины, точки В и С, получая точки: B’ и C’.  Б) пересекаем прямые B’C’ и BC, находим точку P’  В) пересекаем AP’ и D’C’, находим точку D”.  Г) пересекаем D”C и SD’, находим D  ABDC – сечение. |  |