**Решение игр в смешанных стратегиях.**

Если игра не имеет седловой точки, то применение чистых стратегий не дает оптимального решения игры. Так, в примере 1 **α ≠ β**, седловая точка отсутствует. В таком случае можно получить оптимальное решение, случайным образом чередуя чистые стратегии.

**Смешанной стратегией** **SA** игрока **А** называется применение чистых стратегий **A1, A2, ..., Am** с вероятностями **p1, p2, ..., pi, ..., pm** причем сумма вероятностей равна 1:

Смешанные стратегии игрока **А** записываются в виде матрицы

или в виде строки **SA = (p1, p2, ..., pi, ..., pm)**

Аналогично смешанные стратегии игрока **В** обозначаются:

 , или, SB = (q1, q2, ..., qi, ..., qn),

где сумма вероятностей появления стратегий равна 1:

Чистые стратегии можно считать частным случаем смешанных и задавать строкой, в которой **1** соответствует чистой стратегии. На основании принципа минимакса определяется **оптимальное решение** (или **решение**) игры: это пара оптимальных стратегий **S\*A , S\*B** в общем случае смешанных, обладающих следующим свойством: если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то другому не может быть выгодно отступать от своей. Выигрыш, соответствующий оптимальному решению, называется **ценой игры v**. Цена игры удовлетворяет неравенству:

 **α ≤ v ≤ β**

где **α** и **β** — нижняя и верхняя цены игры. Справедлива следующая основная теорема теории игр — теорема ***Неймана****. Каждая конечная игра имеет по крайней мере одно оптимальное решение*, *возможно, среди смешанных стратегий*. Пусть **S\*A = (p\*1, p\*2, ..., p\*i, ..., p\*m)** и **S\*B = (q\*1, q\*2, ..., q\*i, ..., q\*n)** — пара оптимальных стратегий. Если чистая стратегия входит в оптимальную смешанную стратегию с отличной от нуля вероятностью, то она называется **активной.**

Справедлива **теорема** об активных стратегиях*: если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры* ***v****, если второй игрок не выходит за пределы своих активных стратегий*.

Эта теорема имеет большое **практическое значение** — она дает конкретные модели нахождения оптимальных стратегий при отсутствии седловой точки.

Рассмотрим **игру размера 2×2**, которая является простейшим случаем конечной игры. Если такая игра имеет седловую точку, то оптимальное решение — это пара чистых стратегий, соответствующих этой точке.

Игра, в которой отсутствует седловая точка, в соответствии с основной теоремой теории игр *оптимальное решение существует и определяется парой смешанных стратегий* **S\*A = (p\*1, p\*2)** и **S\*B = (q\*1, q\*2).**

Для того чтобы их найти, воспользуемся теоремой об активных стратегиях. Если игрок **А** придерживается своей оптимальной стратегии **S'A**, то его средний выигрыш будет равен цене игры **v**, какой бы активной стратегией ни пользовался игрок **В**. Для игры **2×2** любая чистая стратегия противника является активной, если отсутствует седловая точка. Выигрыш игрока **А** (проигрыш игрока **В**) — случайная величина, математическое ожидание (среднее значение) которой является ценой игры. Поэтому средний выигрыш игрока **А** (оптимальная стратегия) будет равен **v** и для **1**-й, и для **2**-й стратегии противника.

Пусть игра задана платежной матрицей

Средний выигрыш игрока **А**, если он использует оптимальную смешанную стратегию

 ,

а игрок **В** — чистую стратегию **B1** (это соответствует **1**-му столбцу платежной матрицы **Р**), равен цене игры **v**: **a11 p\*1+ a21 p\*2= v**. Тот же средний выигрыш получает игрок **А**, если **2**-й игрок применяет стратегию **B2**, т.е. **a12 p\*1+ a22 p\*2= v**. Учитывая, что **p\*1+ p\*2= 1**, получаем систему уравнений для определения оптимальной стратегии **S'A** и цены игры **v**:

Решая эту систему, получим оптимальную стратегию

и цену игры

Применяя теорему об активных стратегиях при отыскании **S\*B**- оптимальной стратегии игрока **В**, получаем, что при любой чистой стратегии игрока **А** (**А1** или **А2**) средний проигрыш игрока **В** равен цене игры **v**, т.е.

Тогда оптимальная стратегия определяется формулами:

 **Пример 1.**

Игра «поиск»

Игрок **А** может спрятаться в одном из двух убежищ (**I** и **II**); игрок **В** ищет игрока **А**, и если найдет, то получает штраф **1** ден. ед. от **А**, в противном случае платит игроку **А 1** ден. ед. Необходимо построить платежную матрицу игры.

**Решение**. Для составления платежной матрицы следует проанализировать поведение каждого из игроков. Игрок **А** может спрятаться в убежище **I** – обозначим эту стратегию через **A1** или в убежище **II** — стратегия **A2** .

Игрок **В** может искать первого игрока в убежище **I** — стратегия **B1** , либо в убежище **II** — стратегия **B2**. Если игрок **А** находится в убежище **I** и там его обнаруживает игрок **В**, т.е. осуществляется пара стратегий **(A1, B1),** то игрок **А** платит штраф, т.е. **a11 = - 1**. Аналогично получаем **a22 = - 1 (A2, B2)**. Очевидно, что стратегии **(A1, B2**) и **(A2, B1**) дают игроку **А** выигрыш **1**, поэтому **a12 = a21 =** 1. Таким образом, для игры "поиск" размера **2×2** получаем платежную матрицу

Применим полученные результаты для отыскания оптимальных стратегий для игры, рассмотренной в примере 1.

**Пример 2.**

Найти оптимальные стратегии игры, приведенной в примере 1.

**Решение**. Игра "поиск" задана платежной матрицей без седловой точки:

Поэтому ищем решение в смешанных стратегиях; для игрока **А** средний выигрыш равен цене игры **v** (при **B1** и **B2)**; для игрока **В** средний проигрыш равен цене игры **v** (при **A1** и **B2**). Системы уравнений в данном случае имеют вид:



Решая эти системы, получаем

Это означает, что оптимальная стратегия каждого игрока состоит в том, чтобы чередовать свои чистые стратегии случайным образом, выбирая каждое из убежищ с вероятностью ***1/2***, при этом средний выигрыш равен ***0***.

РЕФЕРАТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»

НА ТЕМУ: «Решение игры в смешанных стратегиях».