Задача 1. *Даны векторы* $a = 3i + j$ *и* $b = 2i + 3j$.

(a) *Построить вектор единичной длины того же направления, что и* a.

(b) *Построить вектор* $a/2 - b$.

Решение:

(a) *Если* a *- вектор, а* $|a|$ *- длина вектора* a, *то длина вектора* $a/|a|$ *равна единице, и он сонаправлен с* a. *Длина вектора равна корню из суммы квадратов координат:* $|a| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$, *поэтому искомый вектор*

$$\frac{3\sqrt{10}}{10}i + \frac{\sqrt{10}}{10}j.$$

(b)

$$a/2 - b = (3i + j)/2 - (2i + 3j) = 3i/2 - 2i + j/2 - 3j = -\frac{1}{2}i - \frac{5}{2}j.$$

Задача 2. *Даны вектора*

$$a = \begin{bmatrix} t \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 8 \\ t - 10 \\ -8 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} -8 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Найто все значения параметра t, *при которых*

(a) *Вектора* a *и* b *коллинеарны.*

(b) *Вектора* a *и* c *перпендикулярны.*

(c) *Вектора* a, b *и* c *компланарны.*

(d) *Вектора* a, b *и* c *образуют правый базис.*

Решение:

(a) Вектора a и b коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны. Поскольку отношение последних координат -4, то таким же должно быть и отношение первых и вторых координат:

$$8/t = -4 \iff t = -2,\ (-2 - 10)/3 = -4.$$

(b) Вектора a и c перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное прозведение равно 0. Скалярное произведение (равно сумме попарных произведений одноимённых координат):

$$(a, b) = -8t - 3 + 2 = -8t - 1 = 0 \iff t = -1/8.$$

(c) Вектора a, b и c компланарны тогда и только тогда, когда определитель матрицы, составленной из координат векторов, равен 0:

$$\begin{vmatrix} t & 3 & 2 \\ 8 & t - 10 & -8 \\ -8 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= t \cdot (t - 10) \cdot 1 + 3 \cdot (-8) \cdot (-8) + 8 \cdot (-1) \cdot 2 - (-8) \cdot (t - 10) \cdot 2 - (-1) \cdot (-8) \cdot t - 8 \cdot 3 \cdot 1 =$$

$$= t^2 - 10t + 192 - 16 + 16t - 160 - 8t - 24 = t^2 - 2t - 8 = (t - 4)(t + 2).$$

Равенство нулю выполнено при $t = 4$ или $t = -2$.

(d) Вектора a, b и c образуют правый базис тогда и только тогда, когда определитель матрицы, составленной из координат векторов в порядке их следования положителен. Этот определитель подсчитан в предыдущем пункте и равен $(t - 4)(t + 2)$. Это выражение положительно при $t < -2$ или $t > 4$.

Задача 3. *Длина вектора* a, $|a| = 2$. *Длина вектора* b, $|b| = 3$. *Угол между векторами* a *и* b, $\varphi = 60°$. *Найти*

(a) *Длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах* a *и* b.

(b) *Площадь параллелограмма, построенного на векторах* $2a - b$ *и* $a + 3b$.

Решение:

(a) Диагонали параллелограмма, построенного на векторах a и b, в векторном виде можно записать как $a - b$ и $a + b$. Длину вектора можно посчитать как квадратный корень из его скалярного произведения на себя. Скалярное произведение двух векторов можно посчитать как произведение их длин на косинус угла между ними, поэтому скалярное произведение диагоналей параллелограмма на себя можно посчитать таким образом:

$$(a-b, a-b) = (a, a) - 2(a, b) + (b, b) = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\varphi = 4 + 9 - 12\frac{1}{2} = 7,$$

$$(a+b, a+b) = (a, a) + 2(a, b) + (b, b) = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos\varphi = 4 + 9 + 12\frac{1}{2} = 19,$$

поэтому длины диагоналей равны $\sqrt{7}$ и $\sqrt{19}$.

(b) Площадь параллелограмма, натянутого на 2 вектора, равна длине векторного произведения этих двух векторов. Векторное произведение двух векторов по модулю равно произведению их длин на синус угла между ними, а по направлению перпендикулярно им обоим и образует с ними правую тройку векторов, поэтому:

$$(2a - b) \times (a + 3b) = 2a \times a + 6a \times b - b \times a - 3b \times b = 0 + 6a \times b + a \times b - 0 = 7a \times b,$$

длина последнего вектора равна $7 \cdot 2 \cdot 3 \sin 60^\circ = 21\sqrt{3}$.

Задача 4. *Даны точки* $A(3, 5, 4)$, $B(-1, -3, 5)$, $C(-5, -3, 0)$ *и* $O(0, 0, 0)$.

(a) *Найти косинус угол между отрезками* AB *и* AC.
(b) *Найти площадь* $\triangle ABC$.
(c) *Найти объём треугольной пирамиды* $OABC$.
(d) *Найти длину высоты пирамиды, опущенной из вершины* O.

Решение:

(a)

$$\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

С геометрической точки зрения скалярное произведение двух векторов равно произведению их длин на косинус угла между векторами.

Длина вектора

$$\left|\vec{AC}\right| = \sqrt{(-8)^2 + (-8)^2 + (-4)^2} = 12.$$

Длина вектора

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + 1^2} = 9.$$

Скалярным произведением двух векторов является число, равное сумме попарных произведений одноимённых координат.

Скалярное произведение векторов

$$\left(\vec{AB}, \vec{AC}\right) = (-4) \cdot (-8) + (-8) \cdot (-8) + 1 \cdot (-4) = 92$$

$$\cos\angle\left(\vec{AB}, \vec{AC}\right) = \frac{\left(\vec{AB}, \vec{AC}\right)}{\left|\vec{AB}\right| \cdot \left|\vec{AC}\right|} = \frac{92}{108} = 23/27.$$

(b) Векторное произведение двух векторов является вектором, длина которого равна площади параллелограмма, натянутого на первые два.

Так как на те же 2 вектора вместо параллелограмма можно натянуть треугольник, и его площадь будет в 2 раза меньше, то в качестве ответа можно взять половину длины векторного произведения сторон треугольника.

Подсчитаем векторное произведение сторон:

$$\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Вычислить векторное произведение в трёхмерном пространстве можно, подсчитав псевдоопределитель матрицы, в которой в первой строчке стоят координатные орты, а во второй и третьей - координаты первого и второго векторов соответственно.

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -8 & 1 \\ -8 & -8 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -8 & 1 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -4 & -8 \\ -8 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,((-8)\cdot(-4) - (-8)\cdot 1) - \vec{j}\,((-4)\cdot(-4) - (-8)\cdot 1) + \vec{k}\,((-4)\cdot(-8) - (-8)\cdot(-8)) =$$

$$= 40\vec{i} - 24\vec{j} - 32\vec{k}.$$

Длина вектора

$$\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \sqrt{40^2 + (-24)^2 + (-32)^2} = 40\sqrt{2}.$$

Отсюда площадь треугольника равна $20\sqrt{2}$.

(c) Смешанным произведением трёх векторов является число, по модулю равное объёму параллелепипеда, натянутого на эти три вектора. Знак числа "$+$", если эти три вектора образуют правую тройку векторов, и "$-$", если левую.

Объём параллелепипеда иначе можно посчитать как площадь основания, умноженную на длину высоты. На те же три вектора вместо параллелепипеда можно натянуть треугольную пирамиду. У пирамиды объём составляет $1/3$ площади основания пирамиды, умноженной на высоту пирамиды. В этой ситуации длины высот пирамиды и параллелепипеда равны, а основание пирамиды по площади в 2 раза меньше (треугольник – половина параллелограмма). Поэтому объём пирамиды будет в 6 раз меньше объёма соответствующего параллелепипеда. Поэтому для нахождения объёма пирамиды достаточно разделить на 6 модуль смешанного произведения трёх векторов из одной её вершины в остальные.

$$\vec{OC} = \vec{C} - \vec{O} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{OB} = \vec{B} - \vec{O} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{OA} = \vec{A} - \vec{O} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Вычислить смешанное произведение трёх векторов можно, подсчитав определитель матрицы, в которой в первой строчке стоят координаты первого вектора, во второй – второго, а в третьей - координаты третьего вектора.

Подсчитаем определитель соответствующей матрицы:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -1 & -3 & 5 \\ -5 & -3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-3) \cdot 0 + 5 \cdot 5 \cdot (-5) + (-1) \cdot (-3) \cdot 4 - (-5) \cdot (-3) \cdot 4 - (-1) \cdot 5 \cdot 0 - (-3) \cdot 5 \cdot 3 =$$
$$= 0 - 125 + 12 - 60 + 45 = -128.$$

Поэтому смешанное произведение $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}) = -128$. Отсюда объём пирамиды равен $64/3$.

(d) Чтобы найти длину высоты в пирамиде, опущенной из вершины O достаточно спроектировать вектор

$$\vec{OA} = \vec{A} - \vec{O} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

на вектор, перпендикулярный основанию, на которое опускается высота, или на вектор нормали к плоскости, проходящей через основание. А он считается так. Рассмотрим вектора

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

и

$$\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Чтобы получить вектор нормали (перпендикулярный) к плоскости, проходящей через три точки, можно взять два вектора, лежащие в этой плоскости и их векторное произведение.

Векторным произведением двух векторов является третий вектор, направленный перпендикулярно обоим векторам и образующий с ними правую тройку векторов.

Вычислить векторное произведение в трёхмерном пространстве можно, подсчитав псевдоопределитель матрицы, в которой в первой строчке стоят координатные орты, а во второй и третьей - координаты первого и второго векторов соответственно.

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -8 & 1 \\ -8 & -8 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -8 & 1 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -4 & -8 \\ -8 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,((-8) \cdot (-4) - (-8) \cdot 1) - \vec{j}\,((-4) \cdot (-4) - (-8) \cdot 1) + \vec{k}\,((-4) \cdot (-8) - (-8) \cdot (-8)) =$$
$$= 40\vec{i} - 24\vec{j} - 32\vec{k}.$$

Одна из геометрических интерпретаций скалярного произведения двух векторов заключается в том, что его модуль равен длине одного вектора, умноженной на длину проекции на него второго вектора. Отсюда получаем, что чтобы узнать длину проекции, надо модуль скалярного произведения разделить на длину вектора, на который происходит проекция.

Скалярным произведением двух векторов является число, равное сумме попарных произведений одноимённых координат.

Скалярное произведение векторов

$$\left(\vec{OA}, \vec{AB} \times \vec{AC}\right) = 3 \cdot 40 + 5 \cdot (-24) + 4 \cdot (-32) = -128$$

Длина вектора

$$\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \sqrt{40^2 + (-24)^2 + (-32)^2} = 40\sqrt{2}.$$

Длина проекции вектора $\vec{OA}$ на вектор $\vec{AB} \times \vec{AC}$:

$$\left|\vec{OA}_{\vec{AB}\times\vec{AC}}\right| = \frac{\left|\left(\vec{OA}, \vec{AB} \times \vec{AC}\right)\right|}{\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right|} = \frac{128}{40\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}/5.$$

Задача 5. *Даны вектора*

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

(a) *Даказать, что векторы a, b и c образуют базис.*
(b) *Найти координаты вектора d в этом базисе.*

Решение:

(a) Тройка векторов в пространстве $\mathbb{R}^3$ образует базис тогда и только тогда, когда определитель матрицы, составленной из координат этих векторов, не равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 7 & -3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 7 + (-1) \cdot (-3) \cdot 3 - 7 \cdot 3 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 2 \cdot 1 =$$
$$= 15 + 28 + 9 - 63 + 10 + 6 = 5.$$

(b) Чтобы найти координаты вектора d в этом базисе, необходимо найти такие вещественные числа x_1, x_2 и x_3, что $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$, иначе говоря, надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 10 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 17 \end{cases}.$$

Расширенной матрицей этой системы уравнений является

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & | & 6 \\ 2 & 3 & -3 & | & 10 \\ 3 & -2 & 5 & | & 17 \end{pmatrix}.$$

Напоминание: для нахождения решения системы линейных уравнений с данной расширенной матрицей последнюю следует подвергать элементарным преобразованиям над строками. При этом множества решений систем уравнений, соответствующих матрице до применения элементарного преобразования и после - совпадают.

Элементарные преобразования над строчками матрицы бывают трёх типов:
(a) Обмен местами рядов с номерами i и j (сокращённо $R_i \leftrightarrow R_j$),
(b) Умножение ряда с номером i на ненулевое число r (сокращённо $R_i \to rR_i$),
(c) Замена ряда с номером i на него минус кратное ряда j (сокращённо $R_i \to R_i - rR_j$),

Цель заключается в приведении расширенной матрицы системы к трапециевидной форме, причём так, чтобы в каждой строчке первым ненулевым элементом была единица, и все элементы матрицы над этой единицей были нулями. Из такой приведённой трапециевидной формы расширенной матрицы системы легко получается её решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & -3 & 10 \\ 3 & -2 & 5 & 17 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & 5 & -17 & -2 \\ 3 & -2 & 5 & 17 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & 5 & -17 & -2 \\ 0 & 1 & -16 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & -16 & -1 \\ 0 & 5 & -17 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 5R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & -16 & -1 \\ 0 & 0 & 63 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3/63} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & -16 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{21} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 16R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{21} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{21} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 7R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{21} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{21} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{38}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{21} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{21} \end{array}\right)$$

Систему уравнений с последней матрицей в качестве расширенной можно записать как

$$\begin{cases} x_1 = 38/7 \\ x_2 = -5/21 \\ x_3 = 1/21 \end{cases}.$$

Это и будут координаты вектора d.