**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ**

**Кафедра информатики**

**РЕФЕРАТ**

**На тему:**

**«Переключательные функции одного и двух аргументов»**

**МИНСК, 2008**

**1.Переключательные функции одного аргумента.**

Существует четыре переключательные функции одного аргумента, которые приведены в табл. 1.

Таблица 1

Переключательные функции одного аргумента

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *x*  *f(x)* | 0 | 1 | Условное обозначение | Название функции |
| *f0(x)* | 0 | 0 | 0 | Константа нуль |
| *f1(x)* | 0 | 1 | *x* | Переменная *x* |
| *f2(x)* | 1 | 0 |  | Инверсия *x* |
| *f3(x)* | 1 | 1 | 1 | Константа единица |

Функция *f0(x)* тождественно равна нулю. Она называется *константой нуль* и обозначается *f0(x)=*0.

Функция *f1(x)* повторяет значения аргумента и поэтому тождественно равна переменной *x*.

Функция *f2(x)* принимает значения, противоположные значениям аргумента: если *x*=0, то *f2(x)*=1; если *x*=1, то *f2(x)*=0. Эту функцию называют *инверсией x* или *отрицанием x* и вводят для нее специальное обозначение *f2(x)*= .

Функция *f3(x)* тождественно равна единице. Она называется *константой единица* и обозначается *f3(x)=*1.

**2. Переключательные функции двух аргументов.**

Существует шестнадцать различных переключательных функций двух аргументов, каждая из которых определена на четырех наборах. Эти функции представлены в табл. 2.

В число шестнадцати переключательных функций входят функции, рассмотренные в п.1:

*f0(x,y) =* 0 — константа нуль;

*f15(x,y) =* 1 *—* константа единица;

*f3(x,y) = x —*переменная *x*;

*f5(x,y) = y —*переменная *y*;

*f12(x,y) =  —*инверсия *x;*

*f10(x,y) = —*инверсия *y*;

Таблица 2

Переключательные функции двух аргументов

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 0 | 0 | 1 | 1 | Название функции | Обозначение |
| *y* | 0 | 1 | 0 | 1 |
| *f0(x,y)* | 0 | 0 | 0 | 0 | Константа нуль | 0 |
| *f1(x,y)* | 0 | 0 | 0 | 1 | Произведение (конъюнкция) | *x∙y; x∧y;x&y* |
| *f2(x,y)* | 0 | 0 | 1 | 0 | Функция запрета по *y* | *xΔy* |
| *f3(x,y)* | 0 | 0 | 1 | 1 | Переменная *x* | *x* |
| *f4(x,y)* | 0 | 1 | 0 | 0 | Функция запрета по *x* | *yΔx* |
| *f5(x,y)* | 0 | 1 | 0 | 1 | Переменная *y* | *y* |
| *f6(x,y)* | 0 | 1 | 1 | 0 | Сумма по модулю 2 (логическая неравнозначность) | *x⊕y* |
| *f7(x,y)* | 0 | 1 | 1 | 1 | Логическое сложение (дизъюнкция) | *x+y; x∨y* |
| *f8(x,y)* | 1 | 0 | 0 | 0 | Операция Пирса (стрелка Пирса) | *x↓y* |
| *f9(x,y)* | 1 | 0 | 0 | 1 | Эквивалентность (логическая равнозначность) | *x~y* |
| *f10(x,y)* | 1 | 0 | 1 | 0 | Инверсия *y* |  |
| *f11(x,y)* | 1 | 0 | 1 | 1 | Импликация от *y* к *x* | *y→x* |
| *f12(x,y)* | 1 | 1 | 0 | 0 | Инверсия *x* |  |
| *f13(x,y)* | 1 | 1 | 0 | 1 | Импликация от *x* к *y* | *x→y* |
| *f14(x,y)* | 1 | 1 | 1 | 0 | Операция Шеффера (штрих Шеффера) | *x⏐y* |
| *f15(x,y)* | 1 | 1 | 1 | 1 | Константа единица | 1 |

Рассмотрим некоторые переключательные функции двух аргументов.

Функция *f1(x,y)* называется конъюнкцией, или логическим умножением. Таблица истинности этой функции совпадает с таблицей умножения двух одноразрядных двоичных чисел. Можно ввести функцию n аргументов, соответствующую произведению n одноразрядных двоичных чисел. Такая переключательная функция равна единице тогда и только тогда, когда все ее аргументы равны единице. Для конъюнкции справедливы следующие соотношения:

*x* ⋅ 0 = 0;

*x* ⋅ 1 = *x*;

*x ⋅ x* = *x*;

*x ⋅ y* = *y ⋅ x*;

*x* ⋅ = 0.

Функция *f7(x,y)* называется дизъюнкцией или логическим сложением. Эта функция равна нулю только в том случае, когда все ее аргументы равны нулю. Можно ввести функцию n аргументов, соответствующую логическому сложению n одноразрядных двоичных чисел. Такая переключательная функция равна нулю тогда и только тогда, когда все ее аргументы равны нулю. Для конъюнкции справедливы следующие соотношения:

*x* ∨ 0 = *x*;

*x* ∨ 1 = 1;

*x ∨ x* = *x*;

*x ∨ y* = *y ∨ x*;

*x* ∨ = 1.

Таблица истинности функции *f6(x,y)* совпадает с таблицей сложения двух одноразрядных двоичных чисел по модулю два. Можно ввести функцию n аргументов, соответствующую сумме по модулю два n одноразрядных двоичных чисел. Такая переключательная функция определяется следующим условием: она равна единице, если число аргументов, равных единице, нечетно, и равна нулю, если число таких аргументов четно. Приведем некоторые соотношения для суммы по модулю два:

*x* ⊕ 0 = *x*;

*x* ⊕ 1 = ;

*x* ⊕ *x* = 0;

*x* ⊕ *x* ⊕ *x* = *x*;

*x* ⊕ *y* = *y* ⊕ *x*.

Рассмотренные шестнадцать функций двух аргументов (будем называть их элементарными) позволяют строить новые переключательные функции следующим образом:

* путем перенумерации аргументов;
* путем подстановки в функцию новых функций вместо аргументов.

Функцию, полученную из функций *f1, f2, …, fk* путем применения (возможно многократного) этих двух правил, будем называть *суперпозицией* функций *f1, f2, …, fk*. Например, имея элементарные функции инверсии, конъюнкции, дизъюнкции, импликации, запрета, сложения по модулю два, можно составить новую переключательную функцию:

*f (x,y,z) = ((∨y)Δz)⊕((y→z)⋅x).*

Используя таблицы, определяющие элементарные функции, можно задавать в виде таблицы любую переключательную функцию, являющуюся суперпозицией этих функций.

Пример 1. Представить в виде таблицы функцию

*f (x,y,z) = ((∨y)Δz)⊕((y→z)⋅x).*

Решение. Функцию *f (x,y,z)* будем представлять последовательно, записывая в столбцы табл. 1.5 промежуточные результаты, получаемые после выполнения каждой операции:

Таблица 3

Таблица истинности функции *f (x,y,z) = ((∨y)Δz)⊕((y→z)⋅x).*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | *y* | *z* |  | *(∨y)* | *(∨y)Δz)* | *(y→z)* | *(y→z)⋅x* | *((∨y)Δz)⊕((y→z)⋅x)* |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

# 3. Представление переключательной функции в виде многочленов.

1. **Конституенты.** В п. 2 был рассмотрен один из возможных способов представления переключательной функции – задание ее в виде таблицы истинности. В этом разделе будем решать обратную задачу, а именно представление переключательной функции, заданной таблицей истинности, через элементарные функции, образующие базис.

Рассмотрим переключательные функции, называемые конституентами.

Определение 1. ***Конституентой единицы называют переключательную функцию n аргументов, которая принимает значение, равное единице на одном единственном наборе аргументов.***

Из определения следует, что число различных конституент единицы среди функций n аргументов равно 2n. Конституенты единицы обозначаются так: *Ki(x1, …, xn)*, где *i* – номер набора, на котором конституента равна единице. Например, запись *K7(x1, x2, x3, x4)* означает функцию четырех аргументов, равную единице на наборе (0111).

Конституента единицы может быть выражена через конъюнкцию всех аргументов, каждый из которых входит в произведение со знаком отрицания или без него. Приведенную выше конституенту единицы можно представить через конъюнкцию аргументов следующим образом:

*K7(x1, x2, x3, x4) = *.

Чтобы записать в виде произведения конституенту *Ki(x1, …, xn),* можно воспользоваться следующим правилом: записать *n*-разрядное двоичное число (*n* – число аргументов), равное *i*, и конъюнкцию *n* переменных; над переменными, места которых совпадают с позициями нулей в двоичном числе *i*, поставить знак отрицания.

Пример 2. Записать конституенту, равную единице на двенадцатом наборе для функции пяти переменных.

Решение. Пятиразрядное двоичное число, равное двенадцати, записывается в виде: 01100. Запишем произведение пяти аргументов, располагая их в порядке возрастания индексов: *x1⋅x2⋅x3⋅x4⋅x5*. Сопоставляя это произведение с двоичным числом 01100, определяем, что знаки отрицания необходимо поставить над первым, четвертым и пятым аргументами:

*K12(x1, x2, x3, x4, x5) =*.

Определение 3. ***Конституентой нуля называют переключательную функцию n аргументов, которая принимает значение, равное нулю, на одном единственном наборе аргументов.***

Из определения следует, что число различных конституент нуля среди функций n аргументов равно 2n. Конституенты нуля обозначаются так: *Mi(x1, …, xn)*, где *i* – номер набора, на котором конституента равна нулю. Конституента нуля может быть выражена через дизъюнкцию всех аргументов, каждый из которых входит в произведение со знаком отрицания или без него.

Чтобы записать в виде произведения конституенту *Mi(x1, …, xn),* можно воспользоваться следующим правилом: записать *n*-разрядное двоичное число (*n* – число аргументов), равное *i*, и дизъюнкцию *n* переменных; над переменными, места которых совпадают с позициями единиц в двоичном числе *i*, поставить знак отрицания.

Пример 3. Записать конституенту нуля, равную нулю на двадцать пятом наборе для функции пяти переменных.

Решение. Пятиразрядное двоичное число, равное двадцати пяти, записывается в виде: 11001. Запишем дизъюнкцию пяти аргументов, располагая их в порядке возрастания индексов: *x1∨x2∨x3∨x4∨x5*. Сопоставляя это произведение с двоичным числом 11001, определяем, что знаки отрицания необходимо поставить над первым, вторым и пятым аргументами:

*M25(x1, x2, x3, x4, x5) =*.

2. **Представление переключательной функции в виде полинома Жегалкина.**

Теорема Жегалкина**.** ***Любая переключательная функ­ция может быть представлена в виде полинома (много­члена), т. е. записана в форме***

*f(x1, . . . , xn) = ао ⊕ a1x1 ⊕ a2x2 ⊕ …⊕ anxn ⊕ an+1x1 x2⊕ … ⊕ aNx1…xn ,*

(1)

где *a0, a1x1, … aN**—* константы, равные нулю или единице;

*⊕ —*операция сложения по модулю два.

При записи конкретной переключательной функции в виде многочлена коэффициенты *a0, a1x1, … aN* выпа­дают, так как члены, при которых коэффициенты рав­ны нулю, можно опустить, а коэффициенты, равные еди­нице, не писать.

Для доказательства теоремы Жегалкина предположим, что задана произвольная переключатель­ная функция *п* аргументов *f(x1, . . . , xn),* равная еди­нице на некотором числе наборов с номерами *m1, … mp.*

Покажем, что переключательная функция *f(x1, . . . , xn)* равна сумме конституент единицы, ко­торые равны единице на тех же наборах, что и данная функция:

*f(x1, . . . , xn) = Km1 ⊕ Km2 ⊕ . . . ⊕ Kmp.*(2)

Действительно, на каждом из наборов с номерами *m1, … mp* равна единице только одна конституента, стоящая в правой части выражения (2), а осталь­ные равны нулю. Следовательно, на этих наборах и только на них правая часть выражения (2) принимает значение, равное единице.

Для того чтобы перейти от выражения (2) к виду (1), достаточно представить конституенты едини­цы в виде произведений и, используя соотношение *,* заменить все переменные с отрицаниями (так как отрицания в выражение (3.1) не входят). Пусть на­пример, конституента единицы записана в виде

.

Тогда получим

*Ki= (1 ⊕ x1)x2(1⊕x3)x4x5.*

Раскрывая скобки и приводя подобные члены в соответствии со свойствами операции сложения по модулю два, получаем запись заданной функ­ции в форме (1), что и доказывает теорему.

Приведенное доказательство теоремы позволяет сформулировать правило представления любой пере­ключательной функции в виде многочлена.

Чтобы переключательную функцию, заданную таблицей истинности, представить в виде полинома Жегалкина, доста­точно записать функцию в виде суммы конституент еди­ницы, равных единице на тех же наборах, на которых равна единице заданная функция. Затем все аргументы, входящие в полученное выражение с отрицанием, заме­нить с помощью соотношения , раскрыть скобки и привести подобные члены с учетом тождества;

*x,* если *п* нечетно,

*x ⊕ x ⊕ . . . ⊕ x =* 0, если *п* четно.

Пример 3. Представить в виде полинома Жегалкина функцию *f58(x1,x2,x3)*.

Функция *f58(x1,x2,x3)* равна единице на втором, третьем, четвертом и шестом наборах, и может быть записана в виде суммы соответствующих конституент единицы:

*f58(x1,x2,x3) =K2⊕ K3⊕ K4⊕ K6 =.*

Используя соотношение , получаем

*f58(x1,x2,x3)=(1⊕x1)x2(1⊕x3)⊕(1⊕x1)x2x3⊕ x1(1⊕x2)(1⊕x3)⊕x1x2(1⊕x3).*

Приводя подобные члены, окончательно находим

*f58(x1,x2,x3)= x1⊕ x2⊕ x1x2⊕x1x3.*

3. **Совершенная дизъюнктивная нормальная форма переключательной функции.**

В общем виде пере­ключательная функция *п* аргументов может быть задана таблицей истинности. Обозначим через f(i) (i=0, … ,2n-1) значение функции на i-м наборе аргументов. Напомним, что каждая из величин f(i) принимает значение нуль или единица. В соот­ветствие i-му набору аргументов можно поставить конституенту единицы *Ki,* которая принимает значение, равное единице только на данном *f(i)*наборе. Умножим каждую конституенту единицы *Ki на* значение функ­ции f(i) и рассмотрим дизъюнкцию произведений *fiKi*:

. (3)

Если подставить в выражение (3) значения *f(i),* то получим дизъюнкцию конституент, которые равны еди­нице на тех же наборах, что и заданная функция. Дей­ствительно, ввиду того, что 0⋅*x*=0 и 0∨*х=х,* члены вы­ражения (2), в которых коэффициенты *f(i)*=0, можно опустить, а так как *x⋅1 = x*, то коэффициенты *f(i)=*1можно не писать. Тогда



где j1, …,jm – номера наборов, на которых функция равна единице;

*m* – число таких наборов.

Определение 3. ***Дизъюнкция конституент единицы, равных единице на тех же наборах, что и заданная функция, называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой переключательной функции.***

Любую переключательную функцию *f(x1, . . . , xn)* (кроме константы ноль) можно представить в совершенной дизъюнктивной нормальной форме. Заметим, что любая переключательная функция имеет единственную совершенную дизъюнктивную нормальную форм у: это непосредственно следует из выражения (3).

Совершенную дизъюнктивную нормаль­ную форму переключательной функции удобно находить в такой последователь­ности:

* выписать ряд произведений всех аргументов и соединить их знаками дизъюнкции; количество произведений должно равняться числу наборов, на которых заданная функция обращается в единицу;
* записать под каждым произведением набор аргу­ментов, на котором функция равна единице, и над аргу­ментами, равными нулю, поставить знаки отрицания.

Это правило называют иногда правилом запи­си переключательной функции по единицам.

Пример 4. Представить в совершенной дизъюнктивной нормальной форме переключательную функцию четырех аргументов *f23805(x1,x2,x3,x4)* (см. табл. 2).

Решение. Из табл. 2 видно, что переключательная функция принимает значения, равные единице, на следующих наборах аргументов:

0001, 0011, 0100, 0101, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1111.

Таким образом, совершенная дизъюнктивная нормальная форма функции *f23805(x1,x2,x3,x4)* будет состоять из одиннадцати дизъюнкций, каждая из которых представляет собой конъюнкцию четырех элементов:



4. **Совершенная конъюнктивная нормальная форма переключательной функции.**

Если заданная переключательная функция равна единице на большинстве наборов аргументов, то представление функции в совершенной дизъюнктивной нормальной форме может оказаться достаточно громоздким. В этих случаях удобнее использовать другую форму представления функции – совершенную конъюнктивную нормальную форму. Для представления функций в этой форме используется функция конституенты нуля.

Рассмотрим выражение

, (4)

где *f(i)* – значение переключательной функции на *i*-м наборе.

Ввиду справедливости соотношений 1∨ *x* = 1 и *0∨х= х,* при подстановке в выражение (4) значений функ­ции *f(i)*, сомножители, у которых *f(i)*, == 1, можно опустить, а значения функции *f(i)*=0 не писать. Тогда

 (5)

где j1, j2, …,jm –номера наборов, на которых функ­ция равна нулю;

*т -*число таких наборов.

Определение 4.***Произведение конституент нуля, которые равны нулю на тех же наборах, что и заданная функция, называется совершенной конъюнктивной нормальной формой.***

Любая переключательная функция *f(x1, . . . , xn)* (кроме константы единицы) может быть пред­ставлена в совершенной конъюнктивной нормальной форме. Любая переключательная функ­ция имеет единственную совершенную конъюнктивную нормальную форму.

Сформулируем правило представления переключа­тельной функции в совершенной конъюнктивной нор­мальной форме. Чтобы представить переключательную функцию *п* аргументов в совершенной конъюнктивной нормальной форме, достаточно:

* выписать произведение дизъюнкций всех аргументов с количеством сомножителей, равным числу наборов, на которых заданная функция обращается в нуль;
* выписать под каждым сомножителем набор аргу­ментов, на котором функция равна нулю, и над аргу­ментами, равными единице, поставить знаки отрицания;

Это правило иногда называют правилом запи­си переключательной функции по нулям.

Пример 5. Представить в совершенной конъюнктив­ной нормальной форме функцию *f23805(x1,x2,x3,x4)* (см. табл. 2).

Решение. Из табл. 2 видно, что переключательная функция принимает значения, равные нулю, на следующих наборах аргументов:

0000, 0010, 0110, 0111, 1110.

Таким образом, совершенная конъюнктивная нормальная форма функции *f23805(x1,x2,x3,x4)* будет состоять из пяти конъюнкций, каждая из которых представляет собой дизъюнкцию четырех элементов:



**ЛИТЕРАТУРА**

1. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика: Учебник для ВУЗов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко.– М.: изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.– 744 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып XIX).
2. Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика.– М.: Наука, Физматлит, 2000.– 544 с.– ISBN 5-02-015238-2.
3. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике: Учеб. для ВУЗов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко.– М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.– 496 с. (Сер. Математика в техническом университете; вып. XXI, заключительный).