

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ  
“ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ”

**В. А. Еремеев**

**РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ  
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ  
БОЛЬШИХ РАЗРЕЖЕННЫХ МАТРИЦ**

(учебно-методическое пособие)

Ростов-на-Дону

2008

В. А. Еремеев. Решение систем линейных алгебраических уравнений для больших разреженных матриц: Учебно-методическое пособие. – г. Ростов-на-Дону, 2008 г. – 39 с.

В данном пособии в концентрированном виде содержится информация о решении систем линейных алгебраических уравнений для разреженных матриц большой размерности. Пособие состоит из четырех основных модулей:

1. задачи линейной алгебры с разреженными матрицами на примере дискретизации уравнения Пуассона;
2. векторные и матричные нормы;
3. итерационные методы;
4. методы подпространств Крылова.

Пособие предназначено для преподавания дисциплин в рамках магистерской образовательной программы “Математическое моделирование и компьютерная механика”.

Пособие также предназначено для студентов и аспирантов факультета математики, механики и компьютерных наук, специализирующихся в области математического моделирования, вычислительной математики и механики твердого деформируемого тела.

Пособие подготовлено в рамках гранта ЮФУ К-07-Т-41.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Задачи линейной алгебры с разреженными матрицами на примере дискретизации уравнения Пуассона</b>	<b>4</b>
1.1	Решение уравнения $-x'' = f(t)$ . . . . .	4
1.2	Решение уравнения Пуассона . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Векторные и матричные нормы</b>	<b>11</b>
2.1	Векторные нормы . . . . .	11
2.2	Матричные нормы . . . . .	13
2.3	Связь векторных и матричных норм . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Итерационные методы</b>	<b>19</b>
3.1	Определения и условия сходимости итерационных методов	19
3.2	Метод простой итерации . . . . .	23
3.3	Метод Якоби . . . . .	24
3.4	Метод Гаусса-Зейделя . . . . .	25
3.5	Метод последовательной верхней релаксации (SOR) . . .	26
3.6	Метод симметричной последовательной верхней релаксации (SSOR) . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Методы подпространств Крылова</b>	<b>30</b>
4.1	Инвариантные подпространства . . . . .	30
4.2	Степенная последовательность и подпространства Крылова . . . . .	31
4.3	Итерационные методы подпространств Крылова . . . . .	33
	<b>Заключение</b>	<b>38</b>
	<b>Литература</b>	<b>38</b>
	<b>Дополнительная литература</b>	<b>39</b>

# 1 Задачи линейной алгебры с разреженными матрицами на примере дискретизации уравнения Пуассона

Основным источником задач линейной алгебры для матриц большой размерности являются задачи, получаемые в результате дискретизации краевых задач математической физики. Далее рассмотрим два примера, иллюстрирующих особенности получаемых матричных задач.

## 1.1 Решение уравнения $-x'' = f(t)$

Рассмотрим простейшую краевую задачу

$$-x'' = f(t), \quad x(0) = x(1) = 0.$$

Для дискретизации этой краевой задачи воспользуемся методом конечных разностей. Введем равномерную сетку на единичном отрезке

$$t_i = hi, \quad i = 0, \dots, n+1, \quad h = 1/(n+1)$$

так, чтобы  $t_0 = 0$ ,  $t_{n+1} = 1$ . Используем обозначения

$$x_i = x(t_i), \quad f_i = f(t_i).$$

Для дискретизации второй производной воспользуемся центральной конечной разностью

$$x''(t_i) = \frac{x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}}{h^2},$$

которая аппроксимирует  $x''(t_i)$  с точностью  $O(h^2)$ . Тогда исходная краевая задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно

$$-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} = h^2 f_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

или с учетом краевых условий  $x_0 = x_{n+1} = 0$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= h^2 f_1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= h^2 f_2, \\ &\dots \\ -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} &= h^2 f_i, \\ &\dots \\ -x_{n-1} + 2x_n &= h^2 f_n. \end{aligned}$$

Эту СЛАУ можно записать также в матричном виде

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Обратим внимание на следующие свойства матрицы  $\mathbf{A}$ .

- $\mathbf{A}$  – разреженная матрица, она трехдиагональная;
- $\mathbf{A}$  – симметричная и, более того, положительно определенная. Это свойство она унаследовала от свойств оператора исходной краевой задачи;
- Структура  $\mathbf{A}$  достаточно простая, ее элементы вычисляются по простым формулам. Следовательно, для ее хранения в памяти компьютера нет необходимости использовать типы данных, предназначенные для хранения заполненных матриц.

Обсудим размерность полученной СЛАУ. Предположим, что требуемая точность аппроксимации равна  $\epsilon = 10^{-6}$ . Поскольку  $\epsilon \sim h^2$ , то требуемый шаг сетки нужно выбрать порядка  $10^{-3}$ , т.к.  $h \sim \sqrt{\epsilon}$ . Т.е. мы имеем матрицу размерности  $10^3 \times 10^3$ . На практике, размерность должна быть выше, чтобы удовлетворить большей точности.

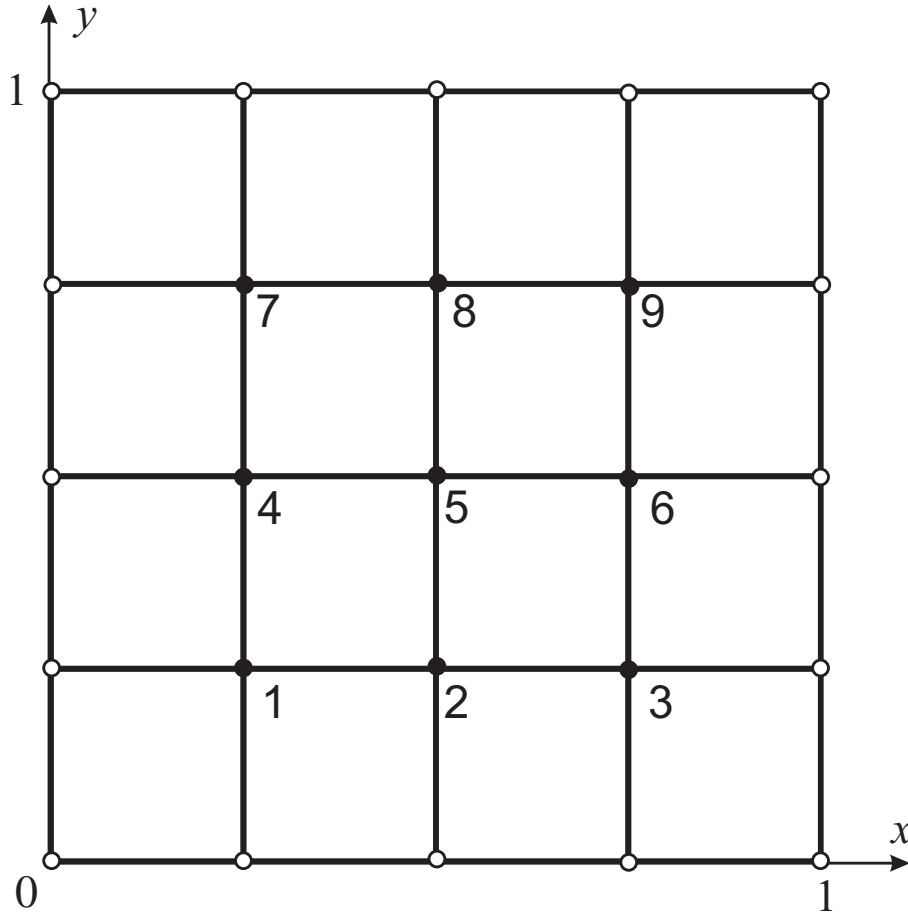


Рис. 1: Конечно-разностная сетка. Естественная нумерация узлов.

## 1.2 Решение уравнения Пуассона

Рассмотрим более сложную краевую задачу

$$-\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad u|_{\Gamma} = 0,$$

где  $u = u(x, y)$  – неизвестная функция,  $f(x, y)$  – известная, заданные на единичном квадрате  $(x, y) \in \Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $\Gamma = \partial\Omega$  – граница  $\Omega$ . Введем на  $\Omega$  равномерную сетку, так что координаты узлов даются

формулами

$$x_i = hi, \quad y_j = hj, \quad i = 0, \dots, N+1, \quad h = 1/(N+1).$$

Используем обозначения

$$u_{i,j} = u(x_i, y_j), \quad f_{i,j} = f(x_i, y_j).$$

Для дискретизации вторых производных в операторе Лапласа  $\Delta$  воспользуемся формулами для центральной конечной разности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2}.$$

Таким образом, исходная краевая задача сводится к СЛАУ

$$-u_{i-1,j} + 4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1} = h^2 f_{i,j} \quad (1)$$

относительно  $u_{i,j}$ . Для того, чтобы свести ее к стандартному виду  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , необходимо преобразовать  $u_{i,j}$  к выражению с одним индексом, т.е. перенумеровать каким-то образом. Выбор нумерации влияет, вообще говоря, на структуру матрицы  $\mathbf{A}$ .

Рассмотрим случай  $N = 3$ . Соответствующая сетка показана на рис. 1, где использована естественная нумерация внутренних узлов. Полые кружки соответствуют граничным узлам, в которых известно значение функции, а сплошные – внутренним.

Если преобразовать конечно-разностное уравнение (1) в матричное уравнение  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , вводя вектор неизвестных по правилу

$$u_{1,1} = x_1, \quad u_{1,2} = x_2, \quad u_{1,3} = x_3, \quad u_{2,1} = x_4, \dots, \quad u_{3,3} = x_9,$$

то матрица  $\mathbf{A}$  принимает вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Видно, что  $\mathbf{A}$  является симметричной ленточной разреженной матрицей с диагональным преобладанием.

В результате нужно отметить, что в целом, матрица  $\mathbf{A}$  обладает теми же свойствами, что и в случае одномерной, задачи, хотя ее структура может не быть ленточной, что зависит от способа нумерации узлов сетки

Обсудим размерность полученной СЛАУ. Предположим как и ранее, что требуемая точность аппроксимации равна  $\epsilon = 10^{-6}$ . Поскольку  $\epsilon \sim h^2$ , то требуемый шаг сетки нужно выбрать порядка  $10^{-3}$ , т.к.  $h \sim \sqrt{\epsilon}$ . Число узлов здесь оказывается равным  $10^3 \times 10^3 = 10^6$ . Такому же числу равно число неизвестных  $n$ . Таким образом, мы имеем матрицу размерности  $10^6 \times 10^6$ .

Нетрудно догадаться, что если рассмотреть, не квадрат, а куб, то число неизвестных будет примерно равно  $n = 10^9$ . В расчетной практике встречаются задачи, где нужно определять не одну функцию, а несколько. Например, в гидродинамике при учете теплопереноса имеем четыре скалярных неизвестных (три компоненты поля скорости и поле температуры). Если рассматривать конечно-разностную аппроксимацию этой задачи с точностью  $\epsilon = 10^{-6}$ , то получим размерность  $n = 4 \cdot 10^9$ .

Рассмотренные выше два примера показывают характерные источники задач линейной алгебры, приводящие к СЛАУ с большими разреженными матрицами. Естественно, что при решении таких СЛАУ необходимо развивать специальные методы вычислительной алгебры.

Рассмотрим другую нумерацию узлов, показанную на рис. 2. Здесь использовано так называемое красно-черное разбиение (или черно-белое). Вначале нумеруются узлы, сумма индексов которых – четное число, а потом узлы, сумма индексов которых дает нечетное число. Таким образом, вектор переменных вводится по правилу вектор неизвестных по правилу

$$u_{1,1} = x_1, \quad u_{1,3} = x_2, \quad u_{2,2} = x_3, \quad u_{3,1} = x_4, \quad u_{3,3} = x_5$$

– это красные неизвестные, а

$$u_{1,2} = x_6, \quad u_{2,1} = x_7, \quad u_{2,3} = x_8, \quad u_{3,2} = x_9$$

– черные неизвестные.



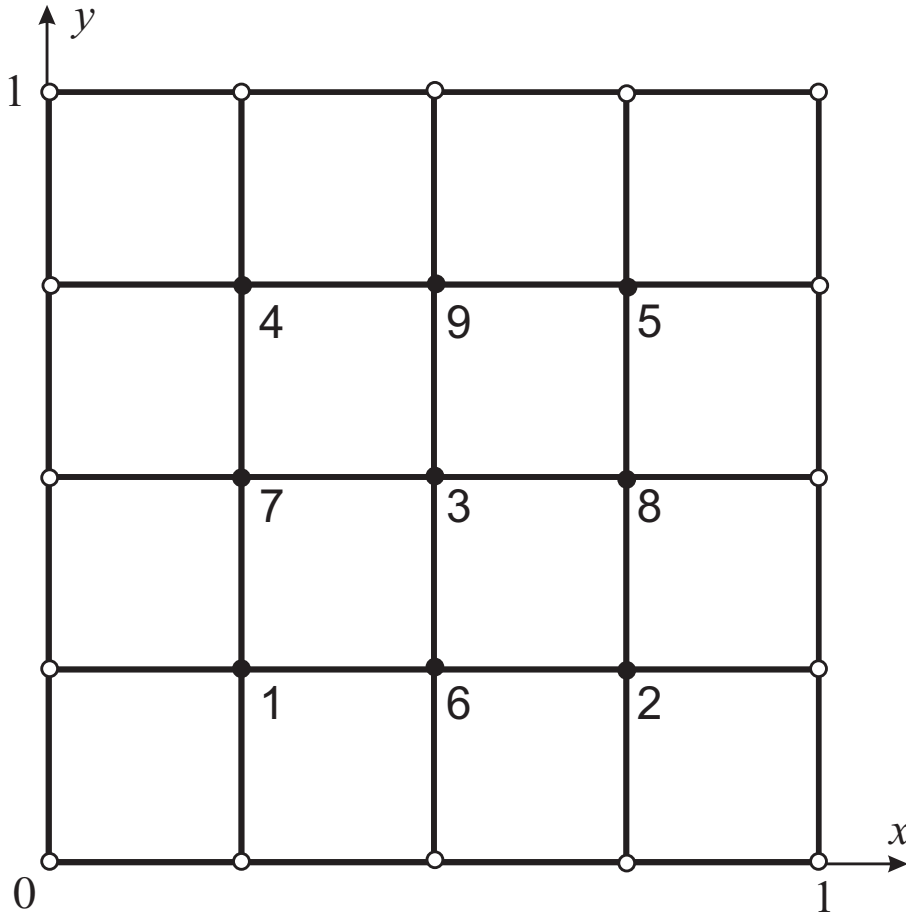


Рис. 2: Конечно-разностная сетка. Красно-черное разбиение.

Соответствующая красно-черному разбиению матрица дается формулой

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
 -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4
 \end{pmatrix}$$

Видно, что  $\mathbf{A}$  является симметричной блочной (состоящей из четырех блоков) разреженной матрицей с диагональным преобладанием.

**ТЕСТ РУБЕЖНОГО КОНТРОЛЯ № 1**

1. Если исходная краевая задача порождает самосопряженный оператор, то какого вида матрицу следует ожидать после дискретизации? (выберите один из ответов)
  - (a) диагональную;
  - (b) верхнюю треугольную;
  - (c) трехдиагональную;
  - (d) симметричную.
  
2. Зависит ли структура матрицы от способа нумерации узлов (выберите один из ответов)
  - (a) зависит;
  - (b) не зависит;
  - (c) не зависит, если оператор краевой задачи самосопряженный;
  - (d) не зависит, если матрица ленточная.
  
3. Выберите из списка все разреженные матрицы
  - (a) диагональная;
  - (b) ленточная;
  - (c) нижняя треугольная;
  - (d) теплицева.
  
4. При аппроксимации конечными разностями второго порядка двумерного уравнения Лапласа потребовалась точность  $10^{-10}$ . Каков порядок матрицы соответствующей СЛАУ получится, т.е. размерность  $n$ ? (выберите один из ответов)
  - (a)  $10^{-10}$ ;
  - (b)  $10^{10}$ ;
  - (c)  $10^5$ ;
  - (d)  $10^{100}$ .

## 2 Векторные и матричные нормы

Напомним некоторые основные определения и утверждения из линейной алгебры. В данном пособии мы будем иметь дело с квадратными вещественными матрицами размерности  $n \times n$ .

### 2.1 Векторные нормы

**Определение 1.** Пусть  $\mathbb{V}$  – векторное пространство над полем  $\mathbb{F}$  ( $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ). Функция  $\|\cdot\|: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$  является векторной нормой, если для всех  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$  выполняются следующие условия:

- (1)  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$  (неотрицательность);
- (1a)  $\|\mathbf{x}\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $\mathbf{x} = 0$  (положительность);
- (2)  $\|c\mathbf{x}\| = |c|\|\mathbf{x}\|$  для всех чисел  $c \in \mathbb{F}$  (абсолютная однородность);
- (3)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$  (неравенство треугольника).

Это привычные свойства евклидовой длины на плоскости. Евклидова длина обладает и другими свойствами, независимыми от приведенных аксиом (например, выполнено тождество параллелограмма). Подобные дополнительные свойства оказываются несущественными для общей теории норм и поэтому не причисляются к аксиомам.

Функцию, для которой выполнены аксиомы (1), (2) и (3), но не обязательно (1a), называют векторной *полунормой*. Это более общее понятие, чем норма. Некоторые векторы, отличные от нулевого, могут иметь нулевую длину в смысле полунормы.

**Определение 2.** Пусть  $\mathbb{V}$  – векторное пространство над полем  $\mathbb{F}$  ( $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ). Функция  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}): \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{F}$  является скалярным произведением, если для всех  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{V}$  следующие условия:

- (1)  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$  (неотрицательность);

(1a)  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$  тогда и только тогда, когда  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  (положительность);

(2)  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$  (аддитивность);

(3)  $(c\mathbf{x}, \mathbf{y}) = c(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  для всех чисел  $c \in \mathbb{F}$  (однородность);

(4)  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$  для любых  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  (эрмитовость).

ПРИМЕРЫ ВЕКТОРНЫХ НОРМ. В конечномерном анализе используются так называемые  $\ell_p$ -нормы

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

Наиболее распространенными являются следующие три нормы

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i|; \\ \|\mathbf{x}\|_2 &= \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad (\text{евклидова норма}); \\ \|\mathbf{x}\|_\infty &= \max_{i=1 \dots n} |x_i|. \end{aligned}$$

Естественно, что существует бесконечно много норм. Например, нормой также является выражение  $\max\{\|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{x}\|_2\}$  или такое

$$\|\mathbf{x}\|_T = \|\mathbf{T}\mathbf{x}\|,$$

где  $\mathbf{T}$  – произвольная невырожденная матрица.

Имеет место теорема, с теоретической точки зрения показывающая достаточность только одной нормы

**Теорема 1.** В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, т.е. для любых двух норм  $\|\cdot\|_\alpha$ ,  $\|\cdot\|_\beta$  и для любого  $\mathbf{x}$  выполняется неравенство

$$\|\mathbf{x}\|_\alpha \geq C(\alpha, \beta, n)\|\mathbf{x}\|_\beta$$

где  $C(\alpha, \beta, n)$  – некоторая постоянная, зависящая от вида норм и от размерности матрицы  $n$ .

Для норм  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$ ,  $\|\cdot\|_\infty$  константа  $C(\alpha, \beta, n)$  определяется таблицей

$\alpha \setminus \beta$	1	2	$\infty$
1	1	$\sqrt{n}$	$n$
2	1	1	$\sqrt{n}$
$\infty$	1	1	1

Проверим выполнение некоторых из неравенств.

Очевидно, что  $\|\mathbf{x}\|_1 \leq n\|\mathbf{x}\|_\infty$ . Это следует из неравенства

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \sum_{i=1}^n \max_{i=1\dots n} |x_i| = n\|\mathbf{x}\|_\infty,$$

которое получается, если в  $\|\mathbf{x}\|_1$  заменить компоненты на максимальное значение. Неравенство достигается, если  $x_i = x_{max}$ , т.е. все компоненты равны друг другу. Тем самым это неравенство является точным, поскольку иногда становится равенством.

Проверку остальных неравенств оставляем читателю (см. также [10]).

Несмотря на теоретическую эквивалентность норм, с практической точки зрения норма вектора большой размерности  $n$  может отличаться от другой нормы того же вектора в  $n$  раз. Поэтому выбор нормы при больших  $n$  имеет значение с практической точки зрения.

Геометрические свойства норм  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$ ,  $\|\cdot\|_\infty$  могут быть прояснены в случае  $\mathbb{R}^2$ . Графики уравнений  $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$ ,  $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ ,  $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$  показаны на рис. 3. .

## 2.2 Матричные нормы

Обозначим пространство квадратных матриц порядка  $n$  через  $\mathbb{M}_n$ .

**Определение 3.** Функция  $\|\cdot\|$ , действующая из  $\mathbb{M}_n$  в  $\mathbb{R}^n$ , называется матричной нормой, если выполнены следующие свойства

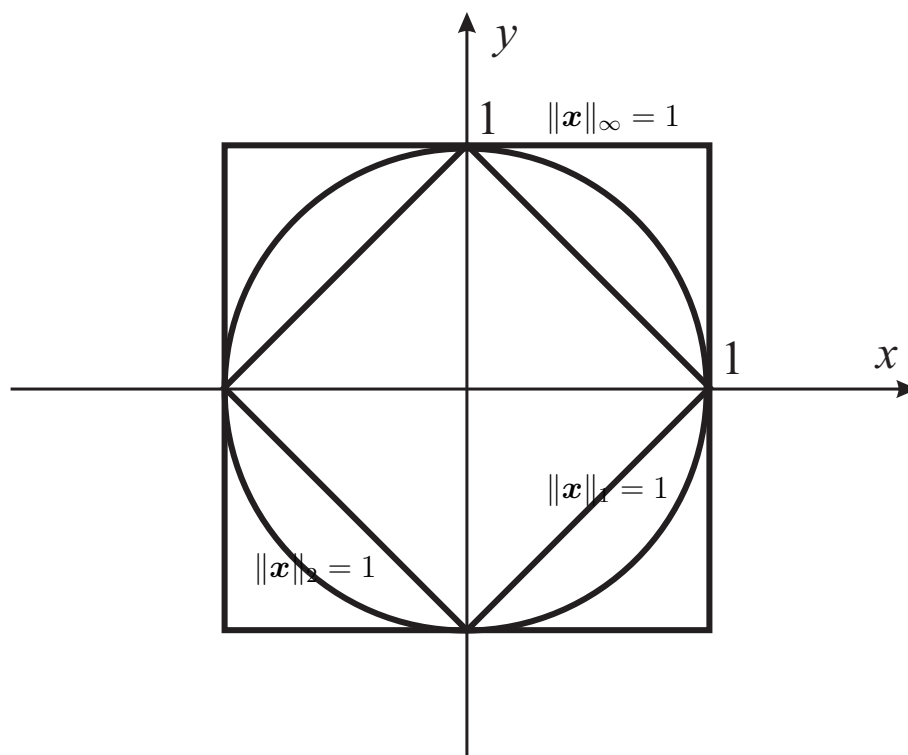


Рис. 3: Графики уравнений  $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$ ,  $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ ,  $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$ .

1.  $\|\mathbf{A}\| \geq 0$ ,  $\|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = 0$ ;
2.  $\|\lambda\mathbf{A}\| = |\lambda|\|\mathbf{A}\|$ ;
3.  $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$  (неравенство треугольника);
4.  $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|$  (кольцевое свойство).

Если последнее свойство не выполнено, то такую норму будем называть *обобщенной матричной нормой*.

Приведем примеры наиболее распространенных матричных норм.

1.  $\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1..n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$  – максимальная столбцовая норма;
2.  $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1..n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$  – максимальная строчная норма;
3.  $\|\mathbf{A}\|_M = n \max_{i,j=1..n} |a_{ij}|$ ;

4.  $\|\mathbf{A}\|_2 = \max_{i=1..n} \nu_i$  – спектральная норма. Здесь  $\nu_i$  – сингулярные числа матрицы  $\mathbf{A}$ , т.е.  $\nu_i^2$  – собственные числа матрицы  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ ;
5.  $\|\mathbf{A}\|_E = \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$  – евклидова норма;
6.  $\|\mathbf{A}\|_{\ell_1} = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$  –  $\ell_1$  норма.

Как и в случае векторных норм, все матричные нормы эквивалентны. Использование различных норм связано с удобством использования, а также с тем фактом, что матриц большой размерности значения нормы могут отличаться весьма значительно.

### 2.3 Связь векторных и матричных норм

Выше были даны примеры векторных и матричных норм, введенные независимо друг от друга. Вместе с тем, эти два понятия могут быть связаны при помощи двух понятий.

**Определение 4.** Матричная норма  $\|\cdot\|$  называется согласованной с векторной нормой  $\|\cdot\|$ , если для любой  $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_n$  и любого  $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$  выполняется неравенство

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|.$$

Заметим, что в этом неравенстве знак нормы относится к разным нормам – векторным и матричной.

**Определение 5.** Матричная норма называется подчиненной (операторной, индуцированной) соответствующей векторной норме, если она определена равенством

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|.$$

Понятие операторной матричной нормы является более сильным, чем подчиненной:

**Теорема 2.** *Операторная норма является подчиненной соответствующей матричной норме.*

*Доказательство.* Действительно, из определения следует,

$$\|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|.$$

□

**Следствие 2.3.1.** *Операторная норма единичной матрицы равна единице:*

$$\|\mathbf{E}\| = 1.$$

*Доказательство.* Действительно,  $\|\mathbf{E}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{Ex}\| = 1.$  □

Существует ряд утверждений, связывающих введенные матричные и векторные нормы.

1. Матричная норма  $\|\cdot\|_1$  являются операторной нормой, соответствующей векторной норме  $\|\cdot\|_1$ .
2. Матричная норма  $\|\cdot\|_\infty$  являются операторной нормой, соответствующей векторной норме  $\|\cdot\|_\infty$ .
3. Спектральная матричная норма  $\|\cdot\|_2$  являются операторной нормой, соответствующей евклидовой векторной норме  $\|\cdot\|_2$ .
4. Матричные нормы  $\|\cdot\|_E$ ,  $\|\cdot\|_M$ ,  $\|\cdot\|_{\ell_1}$  не являются операторными.
5. Матричная норма  $\|\cdot\|_2$  согласована с векторной нормой  $\|\cdot\|_2$ .
6. Матричная норма  $\|\cdot\|_M$  согласована с векторными нормами  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_\infty$ ,  $\|\cdot\|_2$ .



**ТЕСТ РУБЕЖНОГО КОНТРОЛЯ № 2**

1. Вычислите нормы  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_\infty$ ,  $\|\cdot\|_M$ ,  $\|\cdot\|_{\ell_1}$  матриц

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

(b)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix};$$

(c)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Если матричная норма является согласованной, то можно ли построить соответствующую ей векторную норму, чтобы она стала операторной? (выберите один из ответов)

(a) нельзя;

(b) можно;

- (с) можно, если матрица симметрична;
  - (d) можно для евклидовой нормы.
3. Если матричная норма  $\| \cdot \|$  является операторной, то (выберите правильные ответы)
- (a) она согласована;
  - (b) положительна;
  - (c)  $\|\mathbf{E}\| = 1$ ;
  - (d)  $\|\mathbf{E}\| = n$ .
4. Операторная норма единичной матрицы равна (выберите один из ответов)
- (a) чему угодно;
  - (b) единице;
  - (c)  $n$ ;
  - (d)  $n^2$ .
5. Согласованная норма единичной матрицы равна (выберите один из ответов)
- (a) чему угодно;
  - (b) единице;
  - (c)  $n$ ;
  - (d)  $n^2$ .

### 3 Итерационные методы

#### 3.1 Определения и условия сходимости итерационных методов

Различают *прямые* и *итерационные* методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Прямые методы получают решение за конечное число шагов, причем, если предположить, что это решение может быть получено в точной арифметике (когда нет ошибок округления), то это решение является точным. Итерационные методы, вообще говоря, ВСЕГДА дают приближенное решение, для получения точного решения необходимо бесконечное число шагов. Интерес к итерационным методам связан как раз с решением СЛАУ с матрицами большой размерности. Прямые методы для таких матриц не дают требуемой точности. В случае разреженных матриц большой размерности итерационные методы дают заметный выигрыш в точности, быстродействии и экономии памяти.

**Определение 6.** *Итерационный метод дается последовательностью*

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{G}_k \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}_k$$

или

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{Q}_k^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k)}).$$

$\mathbf{G}_k$  называется матрицей перехода, а  $\mathbf{Q}_k$  – матрицей расщепления,  $\mathbf{x}^{(0)}$  предполагается известным начальным приближением.

**Определение 7.** *Метод называется стационарным, если матрица перехода  $\mathbf{G}_k$  (матрица расщепления  $\mathbf{Q}_k$ ) и не зависят от номера итерации  $k$ .*

Далее ограничимся рассмотрением стационарных итерационных методов

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{G} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{E} - \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{b}. \quad (2)$$

В результате выполнения итерационного метода по начальному приближению строится последовательность

$$\mathbf{x}^{(0)}, \quad \mathbf{x}^{(1)}, \quad \mathbf{x}^{(2)}, \dots$$

Рассмотрим погрешность  $k$ -й итерации. Пусть  $\mathbf{x}^{(\infty)}$  – точное решение исходной задачи, т.е.

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^{(\infty)} = \mathbf{b}.$$

С другой стороны,  $\mathbf{x}^{(\infty)}$  должно удовлетворять уравнению

$$\mathbf{x}^{(\infty)} = \mathbf{G}\mathbf{x}^{(\infty)} + \mathbf{g}.$$

Тогда погрешность  $k$ -й итерации дается формулой  $\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(\infty)}$ . Установим для  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$  итерационную формулу. Имеем соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= \mathbf{G}\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{g}, \\ \mathbf{x}^{(2)} &= \mathbf{G}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{g}, \\ \mathbf{x}^{(3)} &= \mathbf{G}\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{g}, \\ &\dots \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{G}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Вычтем из них уравнение  $\mathbf{x}^{(\infty)} = \mathbf{G}\mathbf{x}^{(\infty)} + \mathbf{g}$ . Получим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} &= \mathbf{G}\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} &= \mathbf{G}\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} &= \mathbf{G}\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}, \\ &\dots \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} &= \mathbf{G}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Выражая все через погрешность начального приближения  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$ , получим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} &= \mathbf{G}\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} &= \mathbf{G}\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \mathbf{G}^2\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} &= \mathbf{G}\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \mathbf{G}^2\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \mathbf{G}^3\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}, \\ &\dots \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} &= \mathbf{G}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \mathbf{G}^2\boldsymbol{\varepsilon}^{(k-1)} = \dots = \mathbf{G}^{(k+1)}\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Таким образом, получаем формулу для погрешности на  $k$ -й итерации, которой будем пользоваться в дальнейшем:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \mathbf{G}^k \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}. \quad (3)$$

Рассмотрим сходимость итерационного метода (2). Поскольку сходимость метода состоит в том, чтобы погрешность убывала, нужно исследовать сходимость к нулю последовательности  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}$ . Для анализа сходимости нам потребуется понятие спектрального радиуса.

**Определение 8.** *Спектральным радиусом матрицы  $\mathbf{G}$  называется максимальное по модулю собственное число матрицы  $\mathbf{G}$ :*

$$\rho(\mathbf{G}) = \max_{i=1\dots n} |\lambda_i(\mathbf{G})|.$$

Обратим внимание, что в этом определении участвуют все собственные числа, т.е. вещественные и комплексные.

**Теорема 3** (Достаточное условие сходимости). *Для сходимости итерационного метода достаточно выполнения неравенства*

$$\|\mathbf{G}\| < 1.$$

*Доказательство.* Доказательство повторяет доказательство принципа сжимающих отображений, поскольку эта теорема является частным случаем этого принципа.  $\square$

Отметим, что для сходимости достаточно выполнение неравенства для какой-то одной нормы. Это условие является легко проверяемым, хотя лишь достаточным. Необходимое и достаточное условие сходимости является проверяется более сложным образом и дается следующим утверждением.

**Теорема 4** (Необходимое и достаточное условие сходимости). *Для сходимости итерационного метода необходимо и достаточно выполнения неравенства*

$$\rho(\mathbf{G}) < 1.$$

*Доказательство.* Из соображений краткости, ограничимся случаем, когда собственные векторы матрицы  $\mathbf{G}$  образуют базис в  $\mathbb{R}^n$ . Это всегда так, например, если  $\mathbf{G}$  – симметрична. Очевидно, что сходимость итерационного метода эквивалентна сходимости к нулю последовательности  $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\}$ .

1. Докажем достаточность. Пусть  $\rho(\mathbf{G}) < 1$ . Рассмотрим произвольное начальное приближение и разложим его по базису собственных векторов

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \varepsilon_1^{(0)} \mathbf{e}_1 + \dots + \varepsilon_n^{(0)} \mathbf{e}_n.$$

Тогда

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \mathbf{G}^k \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \lambda_1^k \varepsilon_1^{(0)} \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_n^k \varepsilon_n^{(0)} \mathbf{e}_n.$$

По условиям теоремы все собственные числа по модулю меньше единицы, поэтому с учетом  $|\lambda_i|^k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\| &= \|\lambda_1^k \varepsilon_1^{(0)} \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_n^k \varepsilon_n^{(0)} \mathbf{e}_n\| \leq \\ &\leq |\lambda_1|^k |\varepsilon_1^{(0)}| + \dots + |\lambda_n|^k |\varepsilon_n^{(0)}| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

2. Докажем необходимость. Пусть итерационный метод сходится при любом начальном приближении. Предположим противное, т.е. что  $\rho(\mathbf{G}) \geq 1$ . Это значит, что существует как минимум один собственный вектор  $\mathbf{e}$ , такой, что  $\mathbf{G}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$  с  $|\lambda| \equiv \rho(\mathbf{G}) \geq 1$ . Выберем начальное приближение так:  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \mathbf{e}$ . Тогда имеем

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \mathbf{G}^k \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \lambda^k \mathbf{e}.$$

Поскольку  $|\lambda| \geq 1$ , последовательность  $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\}$  не сходится к нулю при данном начальном приближении, т.к.  $\|\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\| = |\lambda|^k \geq 1$ . Полученное противоречие и доказывает необходимость.

□

Важным свойством итерационного метода является его симметризуемость. В частности, она используется для его ускорения (т.е. модификации, позволяющей достичь той же точности за меньшее число итераций).

**Определение 9.** *Итерационный метод является симметризуемым, если существует такая невырожденная матрица  $\mathbf{W}$  (матрица симметризации), что  $\mathbf{W}(\mathbf{E} - \mathbf{G})\mathbf{W}^{-1}$  является симметричной и положительно определенной.*

Для симметризуемого метода выполняются свойства:

1. собственные числа матрицы перехода  $\mathbf{G}$  вещественны;
2. наибольшее собственное число матрицы  $\mathbf{G}$  меньше единицы;
3. множество собственных векторов матрицы перехода  $\mathbf{G}$  образует базис векторного пространства.

Для симметризуемого метода всегда существует так называемый *экстраполированный метод*, который сходится всегда, независимо от сходимости исходного метода. Он дается формулой

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{G}_\gamma \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}_\gamma, \quad \mathbf{G}_\gamma = \gamma \mathbf{G} + (1 - \gamma) \mathbf{E}, \quad \mathbf{g}_\gamma = \gamma \mathbf{g}.$$

Оптимальное значение параметра  $\gamma$  определяется соотношением

$$\gamma = \frac{2}{2 - M(\mathbf{G}) - m(\mathbf{G})},$$

где  $M(\mathbf{G})$  и  $m(\mathbf{G})$  – максимальное и минимальное собственные числа  $\mathbf{G}$ .

Рассмотрим далее классические итерационные методы.

### 3.2 Метод простой итерации

Метод простой итерации является простейшим примером итерационных методов. Он дается формулой

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{E} - \mathbf{A}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{E}.$$

Сходится при  $M(\mathbf{A}) < 2$ .

Для симметричной положительно определенной матрицы  $\mathbf{A}$ ) симметризуем и экстраполированный метод имеет вид

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{E} - \gamma\mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)} + \gamma\mathbf{b}, \quad \gamma = \frac{2}{m(\mathbf{A}) + M(\mathbf{A})}.$$

### 3.3 Метод Якоби

Метод Якоби определяется формулой

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}b_i. \quad (4)$$

Запишем его в матричных обозначениях (в безиндексном виде). Представим матрицу  $\mathbf{A}$  в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{C}_L - \mathbf{C}_U,$$

где  $\mathbf{D}$  – диагональная матрица,  $\mathbf{C}_L$  – верхняя треугольная, а  $\mathbf{C}_U$  – нижняя треугольная. Если  $\mathbf{A}$  имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{C}_L$  и  $\mathbf{C}_U$  даются формулами

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_L = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_U = - \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$



Используя матричные обозначения, формулу метода Якоби можно записать так:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g},$$

где матрица перехода  $\mathbf{B}$  дается формулой

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{C}_U + \mathbf{C}_L) = \mathbf{E} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}$$

а  $\mathbf{g} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$ .

Достаточным условием сходимости метода Якоби является диагональное преобладание. Если  $\mathbf{A}$  – положительно определенная симметричная матрица, то метод Якоби симметризуем.

### 3.4 Метод Гаусса-Зейделя

Запишем последовательность формул метода Якоби более подробно

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^{(k+1)} &= -a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1, \\ a_{22}x_2^{(k+1)} &= -a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2, \\ a_{33}x_3^{(k+1)} &= -a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} - \dots - a_{3n}x_n^{(k)} + b_3, \\ &\dots \\ a_{nn}x_n^{(k+1)} &= -a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \dots - a_{n-1n}x_{n-1}^{(k)} + b_n. \end{aligned}$$

Если посмотреть внимательно на них, то видно, что при вычислении последних компонент вектора  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  уже известны предыдущие компоненты  $\mathbf{x}^{(k+1)}$ , но они не используются. Например, для последней компоненты имеется формула

$$x_n^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{nn}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^n a_{nj}x_j^{(k)} + \frac{1}{a_{nn}}b_n.$$

В ней в левой части присутствует  $n - 1$  компонент  $x_1^{(k)}$ ,  $x_2^{(k)}$ , ...,  $x_{n-1}^{(k)}$  предыдущей итерации, но к этому моменту уже вычислены компоненты текущей итерации  $x_1^{(k+1)}$ ,  $x_2^{(k+1)}$ , ...,  $x_{n-1}^{(k+1)}$ . Естественно их использовать при вычислении  $x_n^{(k+1)}$ . Перепишем эти формулы следующим образом, заменяя в левой части уравнений компоненты  $\mathbf{x}^{(k)}$  на уже

найденные компоненты  $\mathbf{x}^{(k+1)}$ :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^{(k+1)} &= -a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1, \\ a_{22}x_2^{(k+1)} &= -a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2, \\ a_{33}x_3^{(k+1)} &= -a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - \dots - a_{3n}x_n^{(k)} + b_3, \\ &\dots \\ a_{nn}x_n^{(k+1)} &= -a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \dots - a_{n-1n}x_{n-1}^{(k+1)} + b_n. \end{aligned}$$

Эти формулы лежат в основе метода Гаусса–Зейделя:

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}b_i. \quad (5)$$

В матричном виде метод Гаусса–Зейделя записывается таким образом:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{L}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g},$$

где  $\mathbf{L} = (\mathbf{E} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{g} = (\mathbf{E} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{L} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}_L$ ,  $\mathbf{U} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}_U$ .

В общем случае метод несимметризуем.

Есть интересный исторический комментарий [Д2]: метод был неизвестен Зейделю, а Гаусс относился к нему достаточно плохо.

**Замечание.** Хотя для положительно определенных симметричных матриц метод Гаусса–Зейделя сходится почти в два раза быстрее метода Якоби, для матриц общего вида существуют примеры, когда метод Якоби сходится, а метод Гаусса–Зейделя расходится.

### 3.5 Метод последовательной верхней релаксации (SOR)

Дается формулами

$$x_i^{(k+1)} = \omega \left( -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}b_i \right) + (1 - \omega)x_j^{(k)}. \quad (6)$$

Здесь  $\omega$  – параметр релаксации,  $\omega \in [0, 2]$ . При  $\omega > 1$  говорят о верхней релаксации, при  $\omega < 1$  – о нижней, а при  $\omega = 1$  метод SOR сводится к методу Гаусса–Зейделя. Удачный выбор параметра релаксации позволяет на порядки понизить число итераций для достижения требуемой точности.

Матричная форма (6) имеет вид

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathcal{L}_\omega \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}_\omega,$$

где  $\mathcal{L}_\omega = (\mathbf{E} - \omega \mathbf{L})^{-1}(\omega \mathbf{U} + (1 - \omega)\mathbf{E})$ ,  $\mathbf{g}_\omega = (\mathbf{E} - \omega \mathbf{L})^{-1}\omega \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$ .

В общем случае метод несимметризуем. Сходимость гарантирована для положительно определенной симметричной матрицы.

### 3.6 Метод симметричной последовательной верхней релаксации (SSOR)

Этот метод по числу итераций сходится в два быстрее, чем предыдущий, но итерации являются более сложными и даются соотношениями

$$\begin{aligned} x_i^{(k+1/2)} &= \omega \left( -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1/2)} - \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} b_i \right) + \\ &+ (1 - \omega) x_j^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ x_i^{(k+1)} &= \omega \left( -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1/2)} - \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k+1)} + \frac{1}{a_{ii}} b_i \right) + \\ &+ (1 - \omega) x_j^{(k+1/2)}, \quad i = n, n-1, \dots, 1; \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $\omega$  – параметр релаксации,  $\omega \in [0, 2]$ .

Если  $\mathbf{A}$  – положительно определенная симметричная матрица, то метод SSOR симметризуем.

*Упражнение.* Найдите матрицу перехода.

**ТЕСТ РУБЕЖНОГО КОНТРОЛЯ № 2**

1. Проверьте сходимость предыдущих методов для матриц

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

(b)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix};$$

(c)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.  $\mathbf{A}$  является симметричной и положительно определенной. Какие из методов являются симметризуемыми?

(a) простой итерации;

(b) Якоби;

(c) Гаусса–Зейделя;

- (d) SOR;
  - (e) SSOR.
3. Необходимым и достаточным условием сходимости итерационного метода является
- (a) положительная определенность матрицы перехода  $\mathbf{G}$ ;
  - (b) симметричность матрицы перехода  $\mathbf{G}$ ;
  - (c) неравенство  $\|\mathbf{G}\| < 1$ ;
  - (d) неравенство  $\rho(\mathbf{G}) < 1$ .
4. Матрица симметризации – это
- (a) симметричная матрица;
  - (b) единичная матрица;
  - (c) такая матрица  $\mathbf{W}$ , что  $\mathbf{W}(\mathbf{E} - \mathbf{G})\mathbf{W}^{-1}$  – положительно определенная и симметричная матрица;
  - (d) такая матрица  $\mathbf{W}$ , что  $\mathbf{W}(\mathbf{G} - \mathbf{E})\mathbf{W}^{-1}$  – положительно определенная и симметричная матрица.
5. При  $\omega = 1$  метод SOR переходит в метод (выберите один из ответов)
- (a) Якоби;
  - (b) SSOR;
  - (c) простой итерации;
  - (d) Гаусса–Зейделя.
6. Параметр релаксации  $\omega$  лежит в диапазоне (выберите один из ответов)
- (a)  $[0, 1]$ ;
  - (b)  $[0, 2]$ ;
  - (c)  $(0, 2)$ ;
  - (d)  $[-1, 1]$ .

## 4 Методы подпространств Крылова

### 4.1 Инвариантные подпространства

Для понижения размерности исходной задачи воспользуемся понятием инвариантного подпространства.

**Определение 10.** Подпространство  $\mathbb{L}$  инвариантно относительно матрицы  $\mathbf{A}$ , если для любого вектора  $\mathbf{x}$  из  $\mathbb{L}$  вектор  $\mathbf{Ax}$  также принадлежит  $\mathbb{L}$ .

Примером инвариантного подпространства, является подпространство, образованное линейными комбинациями нескольких собственных векторов  $\mathbf{A}$ .

Предположим, что нам известен базис  $\mathbb{L}$ , образованный векторами  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m, m \leq n$ . Образует из этих векторов матрицу  $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m]$  размерности  $n \times m$ . Вычислим  $\mathbf{AQ}$ . Это матрица также размерности  $n \times m$ , причем ее столбцы есть линейные комбинации  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m$ . Другими словами, столбцы  $\mathbf{AQ}$  принадлежат инвариантному подпространству  $\mathbb{L}$ . Указанные столбцы удобно записать в виде  $\mathbf{QC}$ , где  $\mathbf{C}$  – квадратная матрица размерности  $m \times m$ . Действительно,

$$\mathbf{AQ} = \mathbf{A}[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m].$$

Вектор  $\mathbf{Aq}_i \in \mathbb{L}$ , следовательно,  $\mathbf{Aq}_i$  представим в виде линейной комбинации  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m$ :

$$\mathbf{Aq}_i = c_{i1}\mathbf{q}_1 + c_{i2}\mathbf{q}_2 + \dots + c_{im}\mathbf{q}_m, \quad i = 1, \dots, m.$$

Таким образом, выполняется равенство

$$\mathbf{AQ} = \mathbf{QC}. \quad (8)$$

Матрица  $\mathbf{C}$  называется *сужением*  $\mathbf{A}$  на подпространстве  $\mathbb{L}$ . Более наглядно (8) можно представить в виде

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{A} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline m \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{Q} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline m \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{Q} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline m \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{C} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline m \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Рассмотрим случай, когда  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m$  – ортонормированы. Тогда

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{E}_m,$$

где  $\mathbf{E}_m$  – единичная матрица размерности  $m \times m$ . Из (8) вытекает, что

$$\mathbf{C} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}.$$

Рассмотрим решение СЛАУ

$$\mathbf{C} \mathbf{y} = \mathbf{d},$$

где  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$ . Умножая это уравнение на  $\mathbf{Q}$  слева получим, что

$$\mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{y} = \mathbf{Q} \mathbf{d}.$$

То есть вектор  $\mathbf{Q} \mathbf{y}$  является решением исходной задачи, если  $\mathbf{b} = \mathbf{Q} \mathbf{d}$ . Таким образом, знание инвариантного подпространства позволяет свести решение СЛАУ для матрицы  $\mathbf{A}$  к двум СЛАУ меньшей размерности, которые могут быть решены независимо друг от друга. Проблема состоит в том, что априори инвариантные подпространства матрицы  $\mathbf{A}$  неизвестны. Вместо инвариантных подпространств можно использовать “почти” инвариантные подпространства, например, подпространства Крылова.

## 4.2 Степенная последовательность и подпространства Крылова

**Определение 11.** *Подпространством Крылова  $\mathbb{K}_m(\mathbf{b})$  называется подпространство, образованное всеми линейными комбинациями векторов степенной последовательности*

$$\mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \mathbf{b}, \quad \mathbf{A}^2 \mathbf{b}, \quad \dots, \quad \mathbf{A}^{m-1} \mathbf{b},$$

*то есть линейная оболочка, натянутая на эти векторы*

$$\mathbb{K}_m(\mathbf{b}) = \text{span}(\mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \mathbf{b}, \quad \mathbf{A}^2 \mathbf{b}, \quad \dots, \quad \mathbf{A}^{m-1} \mathbf{b}).$$

Рассмотрим свойства степенной последовательности

$$\mathbf{b}, \quad \mathbf{A}\mathbf{b}, \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \quad \mathbf{A}^3\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^k\mathbf{b}, \dots,$$

где  $\mathbf{b}$  – некоторый произвольный ненулевой вектор.

Рассмотрим случай, когда  $\mathbf{A}$  – симметричная матрица. Следовательно, ее собственные векторы  $\mathbf{e}_k$  образуют базис в  $\mathbb{R}^n$ . Соответствующие собственные числа  $\mathbf{A}$  обозначим через  $\lambda_k$ :

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_k = \lambda_k\mathbf{e}_k.$$

Для определенности примем, что  $\lambda_k$  упорядочены по убыванию:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Произвольный вектор  $\mathbf{b}$  можно представить в виде разложения по  $\mathbf{e}_k$ :

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \dots + b_n\mathbf{e}_n.$$

Имеют место формулы:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \dots + b_n\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{A}\mathbf{b} &= \lambda_1 b_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2 b_2\mathbf{e}_2 + \dots + \lambda_n b_n\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{A}^2\mathbf{b} &= \lambda_1^2 b_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2^2 b_2\mathbf{e}_2 + \dots + \lambda_n^2 b_n\mathbf{e}_n, \\ &\dots \\ \mathbf{A}^k\mathbf{b} &= \lambda_1^k b_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2^k b_2\mathbf{e}_2 + \dots + \lambda_n^k b_n\mathbf{e}_n, \\ &\dots \end{aligned}$$

Сделаем дополнительное предположение. Пусть  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ . Другими словами,  $\lambda_1$  – максимальное собственное число по модулю:  $\lambda_1 = \lambda_{\max}$ . Тогда  $\mathbf{A}^k\mathbf{b}$  можно записать следующим образом:

$$\mathbf{A}^k\mathbf{b} = \lambda_1^k \left( b_1\mathbf{e}_1 + \frac{\lambda_2^k}{\lambda_1^k} b_2\mathbf{e}_2 + \dots + \frac{\lambda_n^k}{\lambda_1^k} b_n\mathbf{e}_n \right). \quad (9)$$

Поскольку все  $\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right| < 1$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ), то если  $b_1 \neq 0$ , то все слагаемые в скобках в уравнении (9) кроме первого будут убывать при  $k \rightarrow \infty$ :

$$b_1\mathbf{e}_1 + \frac{\lambda_2^k}{\lambda_1^k} b_2\mathbf{e}_2 + \dots + \frac{\lambda_n^k}{\lambda_1^k} b_n\mathbf{e}_n \rightarrow b_1\mathbf{e}_1 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$



Кроме того, также выполняется соотношение

$$\|\mathbf{A}^k \mathbf{b}\| \rightarrow |\lambda_1|^k |b_1| \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Таким образом, при возрастании  $k$  члены степенной последовательности поворачиваются таким образом, что оказываются параллельными собственному вектору  $\mathbf{e}_{\max} \equiv \mathbf{e}_1$ , соответствующему максимальному по модулю собственному значению  $\lambda_{\max}$ .

### 4.3 Итерационные методы подпространств Крылова

Подпространства Крылова обладают замечательным свойством: если  $\mathbf{A}$  – симметрична и если последовательно строить ортонормированный базис в  $\mathbb{K}_m(\mathbf{b})$   $m = 1, 2, \dots, n$ , то вектора базиса для  $\mathbb{K}_n(\mathbf{b})$  образуют такую ортогональную матрицу  $\mathbf{Q}$ , что выполняется равенство

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{T}, \quad (10)$$

где  $\mathbf{T}$  является трехдиагональной матрицей

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \vdots \\ 0 & \beta_1 & \alpha_3 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ 0 & \cdots & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Если  $\mathbf{A}$  – несимметричная матрица, то вместо (10) получаем

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{H}, \quad (11)$$

где  $\mathbf{H}$  – матрица в верхней форме Хессенберга, т.е. имеет структуру

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \cdots & \times \\ \times & \times & \times & & \vdots \\ 0 & \times & \times & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & & \times & \times \end{pmatrix}$$

(крестиком помечены ненулевые элементы).

Ясно, что если построено представление (10) или (11), то решение СЛАУ  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  можно провести в три шага. Например, если выполнено (10), то решение  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  эквивалентно трем СЛАУ

$$\mathbf{Qz} = \mathbf{b}, \quad (12)$$

$$\mathbf{T}\mathbf{y} = \mathbf{z}, \quad (13)$$

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{x} = \mathbf{y}, \quad (14)$$

причем системы (12) и (14) решаются элементарно, поскольку обратная к ортогональной матрице  $\mathbf{Q}$  является транспонированная  $\mathbf{Q}^T$ . Система (13) также решается гораздо проще исходной, поскольку  $\mathbf{T}$  – трехдиагональная матрица, для которых развиты быстрые и эффективные методы решения СЛАУ.

Рассмотрим алгоритм, приводящий симметричную матрицу  $\mathbf{A}$  к трехдиагональному виду.

АЛГОРИТМ ЛАНЦОША.

$\mathbf{v} = 0; \beta_0 = 1; j = 0;$

*while*  $\beta_j \neq 0$

*if*  $j \neq 0$

*for*  $i = 1..n$

$t = w_i; w_i = v_i/\beta_j; v_i = -\beta_j t$

*end*

*end*

$\mathbf{v} = +\mathbf{Aw}$

$j = j + 1; \alpha_j = (\mathbf{w}, \mathbf{v}); \mathbf{v} = \mathbf{v} - \alpha_j \mathbf{w}; \beta_j := \|\mathbf{v}\|_2$

*end*

Для приведения матрицы к трехдиагональному виду нужна только процедура умножения матрицы на вектор и процедура скалярного произведения. Это позволяет не хранить матрицу как двумерный массив.

Алгоритм Ланцоша может быть обобщен на случай несимметричных матриц. Здесь матрица  $\mathbf{A}$  приводится к верхней форме Хессенберга  $\mathbf{H}$ . Компоненты  $\mathbf{H}$  обозначим через  $h_{i,j}$ ,  $h_{i,j} = 0$  при  $i < j - 1$ . Соответствующий алгоритм носит названия алгоритма Арнольди.

АЛГОРИТМ АРНОЛЬДИ.

$\mathbf{r} = \mathbf{q}_1; \beta = 1; j = 0;$

*while*  $\beta \neq 0$

$h_{j+1,i} = \beta; \mathbf{q}_{j+1} = \mathbf{r}_j/\beta; j = j + 1$

$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{q}_j; \mathbf{r} = \mathbf{w}$

*for*  $i = 1..j$

$h_{ij} = (\mathbf{q}_i, \mathbf{w}); \mathbf{r} = \mathbf{r} - h_{ij}\mathbf{q}_i$

*end*

$\beta = \|\mathbf{r}\|_2$

*if*  $j < n$

$h_{j+1,j} = \beta$

*end*

*end*

Определенным недостатком алгоритмов Ланцоша и Арнольди является потеря ортогональности  $\mathbf{Q}$  в процессе вычислений. Существует ряд реализаций этих алгоритмов, преодолевающих этот недостаток, и делающих эти методы весьма эффективными для решения СЛАУ с большими разреженными матрицами.

**ТЕСТ РУБЕЖНОГО КОНТРОЛЯ № 4**

1. Что такое инвариантное подпространство? (выберите один из ответов)
  - (a) линейная оболочка, натянутая на столбцы матрицы  $\mathbf{A}$ ;
  - (b) подпространство, не изменяющееся при действии на него матрицы  $\mathbf{A}$ ;
  - (c) нульмерное-подпространство;
  - (d) подпространство Крылова.
  
2. Что такое степенная последовательность? (выберите один из ответов)
  - (a) последовательность  $\mathbf{E}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3, \dots$ ;
  - (b) последовательность  $\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \mathbf{A}^3\mathbf{b}, \dots$ ;
  - (c) последовательность  $1, x, x^2, x^3, \dots$ ;
  - (d) последовательность  $1, 2, 4, 8, \dots$ .
  
3. Недостатком метода Ланцоша является (выберите один из ответов)
  - (a) медленная сходимость;
  - (b) потеря ортогонализации;
  - (c) невозможность вычисления собственных векторов;
  - (d) необходимость вычисления степеней.
  
4. В методе Ланцоша используются
  - (a) подпространства Крылова;
  - (b) линейная оболочка, натянутая на столбцы матрицы  $\mathbf{A}$ ;
  - (c) подпространство, образованное собственными векторами матрицы  $\mathbf{A}$ ;
  - (d) подпространство, образованное собственными векторами матрицы  $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}$ .
  
5. Метод Ланцоша приводит матрицу к

- (a) диагональной;
  - (b) трехдиагональной;
  - (c) верхней треугольной;
  - (d) верхней треугольной в форме Хессенберга.
6. Метод Ланцоша применим для матриц
- (a) диагональных;
  - (b) трехдиагональных;
  - (c) симметричных;
  - (d) произвольных.
7. Метод Арнольди приводит матрицу к
- (a) диагональной;
  - (b) трехдиагональной;
  - (c) верхней треугольной;
  - (d) верхней треугольной в форме Хессенберга.
8. Метод Арнольди применим для матриц
- (a) диагональных;
  - (b) трехдиагональных;
  - (c) симметричных;
  - (d) произвольных.

## Заключение

Выше дано описание некоторых методов решения систем линейных алгебраических уравнений для симметричных разреженных матриц большой размерности.

При написании данного пособия в основном использовались материалы [3, 4, 7, 9, 10]. Более подробные сведения о можно получить в приведенной ниже основной и дополнительной литературе.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *В. В. Воеводин*. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977. 304 с.
- [2] *В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов*. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.
- [3] *Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун*. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. 548 с.
- [4] *Дж. Деммель*. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. М.: Мир, 2001. 430 с.
- [5] *Х. Д. Икрамов*. Численные методы для симметричных линейных систем. М.: Наука, 1988. 160 с.
- [6] *Б. Парлетт*. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.: Мир, 1983. 384 с.
- [7] *С. Писсанецки*. Технология разреженных матриц. М.: Мир, 1988. 410 с.
- [8] *Дж. Х. Уилкинсон*. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970. 564 с.
- [9] *Л. Хейнгеман, Д. Янг*. Прикладные итерационные методы. М.: Мир, 1986. 448 с.
- [10] *Р. Хорн, Ч. Джонсон*. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [Д1] *Х. Д. Икрамов.* Несимметричная проблема собственных значений. М.: Наука, 1991. 240 с.
- [Д2] *Дж. Райс.* Матричные вычисления и математическое обеспечение. М.: Мир, 1984. 264 с.
- [Д3] *Y. Saad.* Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems. Halsted Press: Manchester, 1992. 347 p.
- [Д4] *Дж. Форсайт, К. Молер.* Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. М.: Мир, 1969. 167 с.