Содержание

1. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1.1 Понятие множества и подмножества

1.2 Графическая интерпретация множеств и операций над ними

1.3 Свойства операций

1.4 Тождества и их доказательство

1.5 Отношения на множествах

1.6 Свойства отношений

1.7 Отношение порядка

1.8 Отношение эквивалентности

2 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА. АЛГЕБРА ЛОГИКИ

3. БУЛЕВА АЛГЕБРА

3.1 Совершенные нормальные формы

3.1.1 Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

3.1.2 Разложение по переменным

3.1.3 Алгоритм преобразования формулы в СДНФ

3.2 Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ)

3.2.1 Алгоритм преобразования формулы в СКНФ

4 ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

4.1 Равносильные формулы и их доказательство

4.2 Равносильные формулы

4.3 Доказательство равносильностей

5. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

5.1 Полнота системы булевых функций

6. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

5.1 Операции над предикатами

5.2 Кванторы

5.3 Формулы

6. ТЕОРИЯ ГРАФОВ

6.1 Понятие смежности

6.2 Матрица инцидентности и списки ребер

6.3 Матрица смежности графа

6.4 Операции над членами графов

7 ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

8. ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ

9. ЛИТЕРАТУРА

Приложение I

##### 1. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

###### 1.1 Понятие множества и подмножества

В дискретной математике любое понятие можно определить с помощью понятия множества, с рассмотрения которого мы и начнем наш курс.

Множество – совокупность объектов, различаемых нашей интуицией.

Объекты, составляющие множество называются элементами этого множества.

Множества обозначаются большими латинскими буквами, а элементы – маленькими латинскими буквами.

Если элемент а принадлежит множеству А, то будем использовать запись , в противном случае используется запись .

Множество, содержащее конечное число элементов называется конечным. Если множество не содержит ни одного элемента, оно называется пустым. Если множество содержит все элементы, присутствующие в задаче, то оно называется универсальным и обозначается Е.

Множество можно задать различными способами. Самые распространенные это: перечисление элементов: ; указание свойств элементов: , (после двоеточия указаны свойства х).

Множество А называется подмножеством множества В только тогда, когда любой элемент множества А принадлежит множеству В. записывается это так:  если .

 - знак нестрогого включения (говорят В содержит или покрывает А).

 - знак строгого включения.

 - не включение.

Очевидно: если  и , то эти множества состоят из одних и тех же элементов и А=В.

###### 1.2 Графическая интерпретация множеств и операций над ними

Для графической интерпретации множеств используют диаграммы Венна, которые имеют следующий вид:

А

Е

Рис. 1 



Над множествами выполняются три двуместные операции:

* Пересечение;
* Объединение;
* Разность множеств.

Пересечением множеств А и В (мультипликативная операция) называется новое множество С , которое включает в себя элементы принадлежащие и множеству А и множеству В.

Е

В

А

Рис. 2 АВ

АВ

Пример: 





Объединением множеств А и В (аддитивная операция) называется новое множество С, состоящее из элементов множества А и из элементов множества В.

Е

В

А

Рис. 3 АВ

АВ

Пример: 





Разностью множеств А и В называется новое множество С, состоящее из элементов, принадлежащих множеству А и не принадлежащих множеству В.

Е

В

А

Рис. 4 А\ В

А\ В из А вычесть В

Пример: 



.

Кроме рассмотренных двухместных операций существует одна одноместная операция – дополнение. Дополнением множества М является множество  (не М) = .

Порядок выполнения операций: сначала выполняется одноместная операция дополнения, затем операция пересечения, затем операция объединения и операция разности. Для изменения этого порядка в выражении используют скобки.

###### 1.3 Свойства операций

1. Ассоциативность;
2. Коммутативность;
3. Дистрибутивность.

Операция называется ассоциативной, если выполняется равенство:

.

Выполнение этого условия (свойства ассоциативности) означает, что скобки в выражении можно не расставлять. Сложение и умножение чисел - ассоциативные операции, что и позволяет не ставить скобки (пример: a+b+c; abc) пример неассоциативной операции: возведение в степень (ab)c здесь скобки необходимы.

Операция называется коммутативной, если выполняется условие: . Сложение и умножение являются коммутативными (от перемены мест слагаемых сумма не меняется). Вычисление и деление – некоммутативные, некоммутативной так же является операция умножения матриц.

Операция называется дистрибутивной, если выполняется условие: .

###### 1.4 Тождества и их доказательство

При выполнении операций над множествами часто приходиться доказывать равенства, т. е. тождества. (В частности, условия приведенные выше являются тождествами, которые необходимо доказать).

Доказать, что M=N, где M и N – выражения с множествами.

Доказательство производится в два этапа: 1) «в одну сторону», 2) «в обратную сторону».

1. Сначала предположим, что некий элемент х принадлежит левой части равенства:  эта запись звучит следующим образом:

«если , то ».

1. На втором этапе предполагается, что элемент х принадлежит правой части равенства: .

Пример №1

Доказать тождество:

.

Решение:

1. ;
2. .

###### 1.5 Отношения на множествах

Отношения бывают одноместными, двуместными (бинарными) и n-местными. Одноместное отношение– это просто подмножество. Мы остановимся на бинарных отношениях.

1. упорядоченная пара (x, y) есть совокупность двух элементов записанных в определенном порядке.
2. Две пары (x, y) и (x1, y1) считаются равными тогда и только тогда x1 = х, y1 = y.
3. Прямым произведением x y называется совокупность пар (x,y)таких, что .

Можно привести следующие примеры бинарных отношений:

* Отношение «иметь общий делитель отличный от 1» выполняется для пар (6,9); (4,2); (2,4); (4,4), но не выполняется для пар (7,9); (4,7).
* Отношение «быть делителем», т. е. x делит y выполняется для пар (2,4); (4,4), но не выполняется для пар (4,2); (7,9).
* Отношение  выполняется для пар (7,9); (7,7), но не выполняется для пары (9,7).

###### 1.6 Свойства отношений

1. Рефлексивность;
2. Симметричность;
3. Транзитивность.

Отношение обозначается R и записывается так: xRy (x и y находятся в отношении R).

Отношение R называется рефлективным, если для любого имеет место aRa. Главная диагональ его матрицы содержит только единицы.

Отношение R называется антирефлективным, если для любого не выполняется aRa. Главная диагональ его матрицы содержит только нули. Отношения = - рефлективные, а отношение < - антирефлективное.

Отношение R называется симметричным, если для пары (а,в)из aRb следует bRa, иначе говоря для любой пары отношение выполняется либо в обе стороны, либо не выполняется вообще. Матрица данного отношения симметрична относительно главной диагонали.

Отношение R называется транзитивным, если для любых a,b,c из aRb и bRс следует aRс отношения = - транзитивны, отношение «пересекаться» – нетранзитивно. (Пример:  пересекается с  пересекается с , однако  и  не пересекаются).

*Задание №2*

Установите какими свойствами обладает каждое из отношений, заданных на R следующими высказывательными формами:

1. x+y=2;

Решение:

в данном случае заданы отношения + и .

Подставим в выражение x+y=2 конкретные значения: 1+1=2, последовательно проверим каждое свойство:

Рефлективность: aRа = а+а = 1+1 – условие выполняется , следовательно данное отношение рефлективно.

Симметричность: из aRb следует bRa = из а+b следует b+а = из 1+1 следует 1+1 – условие выполняется, следовательно данное отношение симметрично.

Транзитивность: из aRb и bRс следует aRс данное условие мы проверит не можем, т. к. оно применимо только для трех или более элементов.

###### 1.7 Декартово произведение множеств

Декартовым произведением – XY множеств X и Y называется множество М вида 

В круглых скобках обозначена последовательность, т. е. множество, в котором зафиксирован порядок элементов.

Подмножество FXY называется функцией, если для каждого элемента xX, найдется не более одного элемента yY вида (x,y) F; при этом, если для каждого элемента х имеется один элемент y вида (x,y) F, то функция называется всюду (полностью) определенной, в противном случае – частично определенной (не доопределенной).

Множество Х образует область определения функции F.

Множество Y образует область значений функции F.

Часто вместо (x,y) F пишут у=F(х), при этом элемент х называется аргументом или переменной, а у – значением функции F.

Сопоставим с декартовым произведением двух множеств х=. и у=. прямоугольную решетку, узлы которой взаимно однозначно соответствуют элементам декартова произведения (рис.5).

Подмножества декартова произведения обозначены штриховкой соответствующих элементов.

На рис.5 а) показано подмножество декартова произведения не являющееся функцией.

На рис.5 б) показано подмножество декартова произведения, являющееся полностью определенной функцией.

На рис. 5 в) показано подмножество декартова произведения, являющееся частично определенной функцией.

Количество аргументов определяет местность функции. До настоящего момента были рассмотрены одноместные функции.

Аналогично понятию декартова произведения двух множеств можно определить понятие декартова произведения n-множеств.

Х4

Х2

Х3

Х1

 У1

У2

У3

Х4

Х2

Х3

Х1

 У1

У2

У3

Х4

Х2

Х3

Х1

 У1

У2

У3

 б)

 в)

Рис. 5. Подмножества декартовых произведений

Декартовым произведением  множеств М1, М2,…., Мn называется множество  Элементами декартова произведения являются всевозможные последовательности, каждая из которых состоит из n элементов, причем первый элемент принадлежит множеству М1, второй – множеству М2, n-ый – множеству Мn.

Если множество Мх в определении функции у=F(x) является декартовым произведением множеств М х1, М х2,…., М хn, то получаем определение n-местной функции у=F(х1, х2,….,хn).

###### 1.8 Функция как отношение

Функцией называется функциональное соответствие.

Если функция f устанавливает соответствие между множествами А и В, то говорят, что функция f имеет тип АВ, обозначается f: АВ. каждому элементу а из своей области определения функция f ставит в соответствие единственный элемент b из области значений. Обозначается f(a)=b.

Элемент а называется аргументом функции, элемент b называется значением функции на а.

Полностью определенная функция f: AB называется отображением А и В.

Областью определения называется выражение D= 

Функция называется инъективной, если из отношений (x1,y)f, (x2,y)f x1=x2

Функция называется сюръективной, если для каждого уY существует хХ.

Инъективная и сюръективная функции образуют биекцию – это взаимнооднозначное отношение множеств.

###### 1.9 Отношение порядка

Отношение называется отношением нестрогого порядка, если оно рефлективное, антисимметрично, транзитивно.

Отношение называется отношением строгого порядка, если оно антирефлективное, антисимметрично, транзитивно. Оба типа отношений называются отношениями порядка.

Элементы a,b сравнимы по отношению порядка, если выполняется aRb или bRa. Множество М, на котором задано отношение порядка называется полностью упорядоченным, если любые два элемента множества М сравнимы, в противном случае – частично упорядоченным.

Пример: отношения  для чисел являются отношениями нестрого порядка, отношения <,> - отношения строгого порядка. Оба отношения полностью упорядочивают множество. Отношение строгого включения задает строгий частичный порядок: .

###### *Отношение эквивалентности*

Отношение называется отношением эквивалентности (эквивалентностью), если оно одновременно рефлективно, симметрично и транзитивно.

Примеры:

1. отношение равенства на любом множестве является отношением эквивалентности;
2. утверждение вида (a+b)(b-a)=a2-b2 – формулы соединенные знаком равенства задают бинарное отношение. Такое отношение называют отношением равносильности. Оно отличается от равенства, т. к. может выполняться для различных формул.
3. Отношение подобия геометрических фигур, «быть соседями по квартире», «быть ровесниками» так же являются отношениями эквивалентности.

Каждое отношение эквивалентности является в определенном смысле равенством, например, отношение «быть ровесником» означает равенство возрастов.

*Задание №3*

Какие из перечисленных отношений являются отношениями эквивалентности, а какие – отношениями порядка: <,  (на множестве действительных чисел), предшествовать (на множестве слов в словаре), быть однофамильцем (на множестве учащихся в данном вузе).

Решение: необходимо проверить каждое из свойств отношений (аналогично заданию №2) и определить эквивалентность или порядок отношений.

##### 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Модель является отображением чего-либо. В науке о природе моделирование используется как метод познания.

2.1 Преобразование к модели

1. Эксперимент на модели должен быть проще эксперимента на оригинале.
2. Информация об объекте, полученная в результате эксперимента на модели должна быть переносима на объект.

Существуют различные модели, которые используют в физике и математике.

В физике под моделью понимается реальный объект, в математике модель не обязательно является реальным объектом. однако суть этих моделей одинакова:

* модель должна отражать характеристики и свойства объекта,
* модель должна прогнозировать поведение объекта,
* модель должна быть более простой, чем оригинал, но с другой стороны она должна как можно полнее отражать свойства объекта.

2.2 Способы моделирования

1. Макетное. Широко применяется в строительстве.
2. Физическое. Основой для такого моделирования является теория подобия.
3. Электрическое моделирование.
4. Математическое моделирование.

Мы остановимся на математическом моделировании. Модель представляет собой совокупность зависимостей, позволяющих прогнозировать заданные свойсвта объекта. В математике термин «модель» применяется наряду с обычным толкованием. Может означать, например, теорию подобную другой теории. Математика использует символические модели. Такая модель охватывает определенное множество абстрактных объектов: это числа, векторы и т. д. И отношения между ними.

Математическое отношение – это гипотетическое правило, связывающее между собой два или несколько символических объектов. Многие отношения могут быть выражены с помощью математических операций.

Математическая операция по определенному правилу любым двум элементам множества ставит в соответствие третий элемент, принадлежащий этому же множеству.

Характерным для математической модели может быть отсутствие объектов в физическом мире. Такие абстрактные модели являются отражением физических процессов, например, счет, упорядочение и т. д. Однако математическая модель будет воспроизводить физические стороны объекта, если будут установлены правила соответствия специфических свойств объекта математическим объектам и отношениям.

2.3 Алгебраические модели

Предположим, что объектом изучения являются элементы некоторого множества, о природе и свойствах которого мы ни чего не знаем. Подчиним элементы этого множества операциям, предварительно будем считать, что мы ни чего не знаем об этих операциях, но

3. ТЕОРИЯ КОДИРОВАНИЯ

В теории передачи информации существует проблема кодирования – декодирования, обеспечивающая надежную передачу информации при наличии помех.

источник

код

Приемник

(декодер)

Помеха или шум

а

b

с

Рис 6. Схема передачи информации при наличии помех

Пусть А и В два конечных алфавита.

Алфавит – это конечное множество, элементами которого являются символы (буквы, цифры, знаки препинания, знаки операций и т. д.).

И R – некоторое множество конечных слов в алфавите А. Однозначное отображение  множества R в некоторое множество слов в алфавите В называется кодированием множества R.

Образ С множества R при отображении  называется кодом множества R. Слова из С называются кодовыми словами; при этом, если слово w из R отображается в слово v из С, то v называется кодом слова w. Слова из R называются сообщениями, алфавит А – алфавитом сообщений, алфавит В – кодирующим алфавитом. Если кодирующий алфавит В состоит из двух букв (в этом случае будем полагать, что ), то кодирование  и соответствующий код С называется двоичным (с ними мы и будем работать).

Код называется равномерным или блочным, если все кодовые слова имеют одинаковую длину.

Блочный двоичный код, в котором каждое кодовое слово имеет длину n, представляет собой подмножество вершин n-мерного куба.

Пример: геометрическая модель трехзначного двоичного кода есть фигура трехзначного пространства, т. е. куб.

 b=b1, b2, b3

*Рис. 7 построение двоичного трехзначного кода на примере куба*

 b=000

 b=001

 b=010

 b=011

 b=100

 b=101

 b=110

 b=111

Каждой вершине куба присвоена кодовая комбинация по принципу: если проекция на ось равна нулю, то в комбинации ставится ноль, а если проекция равна единице, то в комбинации ставится единица. Порядок проекций должен быть одним и тем же: b1, b2, b3. Длина ребра куба равна единице. d – это длина между соседними разрядами или кодовое расстояние.

Данный способ кодирования обозначим (2,3). В этой ситуации невозможно ни обнаружить ошибку ни исправить ее.

Пусть разрешенными кодами являются 000 и 111 , тогда количество возможных кодов – 8, количество разрешенных кодов – 2, расстояние между разрешенными кодами = 3.

Для того чтобы определить кодовое расстояние между двумя комбинациями двоичного кода достаточно просуммировать эти комбинации по модулю 2 и подсчитать число единиц в полученной комбинации. Пример:

000

 111

. 111 число единиц = 3. Значит d=3.

Получаем сообщение с одной ошибкой в разряде. Тогда отнесем ошибочный код к той вершине, которая отстает на единицу. Вместо ошибочного кода запишем координату вершины (0,0,0), получим исправляющийся код тогда возможны три ситуации:

1. (3,3) когда количество сообщений = 8, количество кодов = 8. В этом случае ошибочный код будет совпадать с одним из сообщений и поэтому ошибку обнаружить невозможно.
2. (2,3) количество сообщений = 4, количество кодов = 8, тогда получим 4 разрешенных кода, совпадающих с вершинами (рис. 8).

*Рис. 8двоичный трехзначный код на примере куба*

Ошибку обнаружить можно, но исправить нельзя.

1. (1,3) ошибку можно и обнаружить и исправить.

Если мы хотим построить код, который может обнаружить n ошибок, то расстояние между кодовыми словами d = k + 1.

Если мы хотим исправлять ошибку, то расстояние должно быть d=2s+1

Если мы хотим построить код одновременно обнаруживающий и исправляющий ошибку, то минимальное кодовое расстояние должно быть

d=k+s+1.

Для того, чтобы в принятом сообщении можно было обнаружить ошибку, это сообщение должно обладать некоторой избыточностью информации, позволяющей отличить ошибочный код от правильного. Например, если переданное сообщение состоит из трех абсолютно одинаковых частей, то в принятом сообщении отделение правильных символов от ошибочных может быть осуществлено по результатам накопления посылок одного вида. Для двоичных кодов этот метод можно проиллюстрировать следующим примером:

10110 – переданная кодовая комбинация

10010 – 1-я принятая комбинация

10100 – 2-я принятая комбинация

00110 – 3-я принятая комбинация

10110 – накопленная комбинация

Как видим на всех трех комбинациях, были ошибки, но накопленная комбинация ошибок не содержит.

Еще одним методом обнаружения ошибок является проверка на четность или нечетность, суть которого состоит в том, что к исходным кодам добавляются нули либо единицы таким образом, чтобы их сумма всегда была четной или нечетной. Сбой любого одного символа всегда нарушит условие четности (нечетности) и ошибка будет обнаружена. В этом случае комбинации друг от друга должны отличаться в двух символах. Запрещенными являются все нечетные комбинации при проверке на четность и наоборот).

3.1 Коды с обнаружением ошибок

Имеем кодовое слово а=а1, а2,…, аm; составляем другое кодовое слово с добавлением символа – b=b1, b2…bm, bm+1

ai=bi 

bm+1=………..

получим на входе нечетный код, он является всегда ошибочным. Ошибку обнаружить можно но исправить нельзя. Данный код соответствует разработанному примеру (2,3)

3.2 Корректирующие коды

а=а1, а2,…, аm

b= a1 a1 a1, a2 a2 a2,…am am am

ai=bi, длина кода 3m

а2 а2 а2

если 0 0 0, то ошибки нет

если 1 1 1, то ошибки нет

если 0 1 1, то ошибка есть

Такие корректирующие коды надежность, причем их надежность возрастает с увеличением дублирующих, но не экономичны.

Аксиомы расстояния:

d(a,b)0

d(a,b)=0, если a=b

d(a,b)= d(b,a)

d(a,b)+d(b,c) d(a,c)

3.3 Групповые коды

Рассмотрим множество двоичных кодов с заданной операцией (сложение по модулю).

Запишем таблицу истинности для операции «сложение по модулю»

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| a | b | A+b |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

a+(b+c)=(a+b)+c

a+b=b+a

a+a=0, (a-1=a)

a+0=a

На множестве кодов задана группа (В,+,0) в свою очередь множество принятых сообщений С образуют группу (С,+,0). Для рассмотренного примера множество кодов b= c=. Очевидно, что множество b является подгруппой множества С.

3.4 Классы

b

c

* классы.

Смежным классом В и С называется множество В+С, где С – фиксированный элемент, а b пробегает все значения множества В. для примера построим левый смежный класс.

Два смежных класса пересекаются либо совпадают, а множество левых классов образуют разбиение множества С.

Восемь левых смежных классов:

 b c

000 +000=000 000+111=111

001+000=001 001+111=110

010+000=010 010+111=101

011+000=011 011+111=100

100+000=100 100+111=011

101+000=101 101+111=010

110+000=110 110+111=001

111+000=111 111+111=000

|  |  |
| --- | --- |
| I | II |
| 000 | 111 |
| 001 | 110 |
| 010 | 101 |
| 011 | 100 |

Столбцы данной таблицы есть разбиение множества С. Известно, что разбиение определяет некоторое отношение эквивалентности, тогда процесс декодирования можно производить следующим образом: допустим, что получено сообщение Сi =011. Таким образом теория групп может рассматриваться математической основой теории кодирования.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Вектор (0, 0, ,0) со всеми координатами равными нулю, называется нулевым. Это единственный n-мерный вектор, для которого выполняются условия:

Если r/, то r/+= r/

Если r/, то r/-= r/

Если r/, то r/- r/= 

Если r/, то 0\* r/= 

Если а, то а\*= 

РЕЛЯЦИОННАЯ АЛГЕБРА

Реляционная алгебра широко используется при создании реляционных БД. Носитель реляционной алгебры представляет собой множество отношений, где кроме операций конъюнкции, дизъюнкции, разности и декартового произведения используются операции выбора, проекции и соединения.

Операция выбора представляет собой процедуру построения «горизонтального» подмножества, т. е. подмножества кортежей (строк), обладающими заданными свойствами.

Пример: с помощью операции выбора построим отношение R/5 (расписание экзаменов профессора Иванова). Результатом операции выбора являются строки, в которых домен (столбец) D3 представлен значением профессор Иванов: это 1,6,8-я строки.

Таб.1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| R5 | D1 | D2 | D3 | D4 | D5 |
| 1 | K 5-01 | Теория автоматов | Пр. Иванов | 03.01 | Ауд.210 |
| 6 | K 5-02 | Теория автоматов | Пр. Иванов | 09.01 | Ауд.211 |
| 8 | K 5-04 | Матем. статистика | Пр. Иванов | 10.01 | Ауд.210 |

Для определения проекций отношений множество в реляционной алгебре разбивается на два подмножества в случае бинарного отношения и на n подмножеств в случае n-арного отношения:

, 





Проекцией Пр (R2/A) бинарного отношения R2, R2на А называется множество элементов .

Проекцией Пр (R2/Ai1, Ai2,…Ain) n-арного отношения  называется множество кортежей (аi1, ai2,…,aim), где , каждый из которых является частью элемента n-арного отношения Rn. операция проекции определяет построение «вертикального» подмножества отношения, т. е. множество подмножества кортежей, получаемого выбором одних доменов и исключения других доменов.

Пример: проекция Пр(R5/D2,, D3) порождает множество пар, каждая из которых определяет дисциплину и экзаменатора.

Таб. 2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| R2 | D3 | D3 |
|  | теория автоматов | пр. Иванов |
|  | математическая статистика | пр. Петров |
|  | физика | пр. Сидоров |
|  | алгоритмические языки | пр. Иванов |

одинаковые строки в таблице объединены в одну.

Операция соединения по двум таблицам, имеющим общий домен, позволят построить одну таблицу, каждая строка которой образуется соединением двух строк исходных таблиц. Из заданных таблиц берут строки, содержащие одно и то же значение из общего домена; общему домену сопоставляется один столбец.

Пример: найдем по двум заданным таблицам (таб.3.а, таб.3.б) результат операции соединения по домену D1 (таб.3.в)

Таб. 3.а

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| R5 | D1 | D2 | D3 | D4 | D5 |
|  | K5-01 | теория автоматов | пр. Иванов | 03.01 | ауд. 210 |
|  | K5-02 | математ. статистика | пр. Петров | 03.01 | ауд. 211 |
|  | K5-03 | физика | пр. Сидоров | 05.01 | ауд. 211 |
|  | K5-04 | алгоритмич. языки | пр. Иванов | 05.01 | ауд. 210 |

Таб.3б

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| R5 | D1 | D2 | D3 | D4 | D5 |
|  | K5-01 | физика | пр. Сидоров | 09.01 | ауд. 210 |
|  | K5-04 | математ. статистика | пр. Иванов  | 10.01 | ауд. 210 |
|  | K5-02 | теория автоматов  | пр. Иванов  | 09.01 | ауд. 211 |
|  | K5-03 | алгоритмич. языки | пр. Петров  | 10.01 | ауд. 211 |

Таб.3в

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| R5 | D1 | D2 | D3 | D4 | D5 | D/2 | D/3 | D/4 | D/5 |
|  | K5-01 | теор.автом. | пр. Ив | 03.01 | а.210 | физика | пр.Сид | 09.01 | а.210 |
|  | K5-02 | мат. стат. | пр. Пет | 03.01 | а.211 | т. авт. | пр.Ив | 09.01 | а.211 |
|  | K5-03 | физика | пр. Сид | 05.01 | а.211 | алг.яз. | пр.Пет | 10.01 | а.211 |
|  | K5-04 | алг. языки | пр. Ив | 05.01 | а.210 | мат. ст. | пр.Ив | 10.01 | а.210 |

Аналогично можно определить операцию соединения не только по условию «равенства», но и по другим условиям сравнения: <,>. Определим например операцию соединения по условию > соединение по условию > отношения Rа по атрибуту х и отношения Rb по атрибуту у (атрибуты х, у являются атрибутами одного и тог же домена общего для отношений Rа , Rb ), х>у называется множество всех кортежей , таких, что  - конкатенация кортежа аi, принадлежащего Rb, где х - часть аi, у – часть bi и х>у.

Запрос в реляционной БД будет выполнен тем быстрее, чем меньше операций над отношениями он содержит Таким образом представляет практический интерес рассматриваемая выше задача упрощения представления множества через введенные операции.

##### 2 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА. АЛГЕБРА ЛОГИКИ.

В булевой алгебре рассматривается двухэлементное множество В, элементы которого обозначаются как 0 и 1 и рассматривают их как формальные символы, не имеющие арифметического смысла. Наиболее распространенная интерпретация двоичных переменных – логическая: «да» – «нет», «истина» – «ложь».

Алгебра образованная множеством В вместе со всеми возможными операциями на нем, называется алгеброй логики.

Функцией алгебры логики (или логической функцией) от n-переменных, называется n-арная операция на В.

Логическая функция f (x1,…xn) – это функция принимающая значения 0,1. Множество всех логических функций обозначается Р2, множество всех логических функций от n-переменных обозначается Р2(n). Всякая логическая функция может быть задана таблицей, в левой части которой перечислены все наборы переменных, а в правой части – значения функции на этих наборах.

Переменная хi в функции f(x1,…xi, xi, xi+1,…,xn) называется несущественной (или фиктивной), если f(x1,…xi, 0, xi+1,…,xn) = f(x1,…xi,1,xi+1,…,xn) при любых значениях остальных переменных, т. е. если изменение значения xi в любом наборе значений x1,…xi не меняет значение функции. Говорят, что функция g получена из функции f удалением фиктивной переменной и наоборот, причем эти функции считаются равными.

Пример: f(x1 x2 x3 x4) = g(x1,x2) означает, что при любых значениях x1 и x2 f=g незавасимо от значения x3. Удаляют фиктивные переменные поскольку они не влияют на значение функции и являются с этой точки зрения лишними.

Рассмотрим примеры логических функций:

1. Одна переменная Х имеет 4 логических функции, которые приведены в таблице 1.

Таб.1.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | F0 | F1 | F2 | F3 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Функции F0 и F3 – константы 0 и 1 соответственно;

Функция F1 (х) = х, т. е. функция F1 повторяет х;

Функция F2 (х) является отрицанием х (логическая операция НЕ) и обозначается .

Все перечисленные функции являются унарными (для одной переменной) функциями.

1. Две переменные имеют 16 логических функций (таблица 2).

Таб. 2

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х1 | х2 | F0 | F1 | F2 | F3 | F4 | F5 | F6 | F7 | F8 | F9 | F10 | F11 | F12 | F13 | F14 | F15 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Все функции в таблице 2 являются бинарными (для двух переменных).

Функции F0 и F15 – константы 0 и 1;

Функция F1 (х1, х2) называется конъюнкцией х1 и х2, обозначается: &,,но чаще всего значок конъюнкции опускают, аналогично знаку умножения. Она ровна единице только тогда когда х1 и х2 =1. В остальных случаях она ровна 0. Это функция логического «И» или функция логического умножения.

Функция F7 (х1, х2) называется дизъюнкцией х1 и х2, обозначается +,. Она ровна 1, если хотя бы одна переменная равна 1. Это функция логического «ИЛИ» или функция логического сложения.

Функция F6 (х1, х2) – сложение по модулю 2, обозначается . Она ровна 1 когда значения ее аргументов различны и ровна 0 когда значения ее аргументов ровны, поэтому эта функция называется неравнозначностью.

Функция F9 (х1, х2) – эквивалентность (равнозначность), обозначается «». Она ровна 1 когда аргументы ровны и ровна 0 когда аргументы различны.

Функция F13 (х1, х2) – импликация, обозначается . Звучит данная функция так: “если х1, то х2 “ .

Функция F8 (х1, х2) – стрелка Пирса, обозначается 

Функция F14 (х1, х2) – штрих Шеффера, обозначается х1,  х2

Остальные функции своего названия не имеют, и легко выражаются через перечисленные выше функции.

При построении таблицы для конкретной формулы необходимо «разложить формулу по ее составляющим», т. е. по числу операций следуя изнутри наружу. для каждой операции составляется таблица истинности, а в последнем столбце записывается вся формула (или ставится буква f) и составляется таблица для нее.

*Задание №4*

Построить таблицу истинности для формулы: 

Таб. 3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | Y |  |  |  | f |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

#####

##### 3. БУЛЕВА АЛГЕБРА

Множество В, на котором определены две бинарные операции (конъюнкция и дизъюнкция) и одна унарная операция (отрицание ) и выделены два элемента 0 и 1 называется булевой алгеброй.

Причем для этих операций необходимо выполнение следующих свойств:

1. Ассоциативность
* 
* 
1. Коммутативность
* 
* 
1. Дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции
* 
1. Дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции
* 
1. Идемпотентность
* 
* 
1. Двойное отрицание
* 
1. Свойства констант
* 
* 
* 
* 
* 
* 
1. Правила де Моргана
* 
* 
1. Закон противоречия
* 
1. Закон исключенного третьего
* 

В алгебре логики эти законы называются равносильностями.

###### 3.1 Совершенные нормальные формы

3.1.1 Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

Введем обозначения:

 ; АА=1; ХА=1, если Х=А, ХА=0, если ХА.

Формула ХА1……ХАn, где А=- какой-либо двоичный набор, а среди переменных Хi могут быть совпадающие называется элементарной конъюнкцией.

Всякая дизъюнкция элементарных конъюнкций называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ).

Элементарная конъюнкция называется правильной, если в нее каждая переменная входит не более одного раза (включая ее вхождение под знаком отрицания).

Например: 1)  (значок конъюнкции в данном случае опущен).

1),4) – правильные элементарные конъюнкции;

2)– переменная х входит один раз сама и второй раз под знаком отрицания;

1. – переменная y входит трижды: один раз сама и два раза под знаком отрицания.

Правильная элементарная конъюнкция называется полной относительно переменных х1…..хn, если в нее входит каждая их этих переменных причем только один раз (может быть и пол знаком отрицания).

Например: из перечисленных в предыдущем примере конъюнкций полной является только 4) относительно переменных x,y,z,t; а относительно переменных x,y,z полной является только 1).

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) относительно переменных х1…..хn называется дизъюнктивная нормальная форма, в которой нет одинаковых элементарных конъюнкций и все элементарные конъюнкции правильны и полны относительно переменных х1…..хn

* + 1. Разложение по переменным

Теорема 1. Всякая логическая функция может быть представлена в СДНФ:

, (1)

где m, а дизъюнкция берется по всем 2m наборам значений переменных х1,…хm . Функция f разложена по первым n-переменным. Данное равенство называется разложением по переменным. х1,…хm. Например при n=4, m=2 разложение имеет вид:



теорема доказывается подстановкой в обе части равенства (1) произвольного набора (b1,…,bm, bm+1,…,bn) всех n-переменных.

При m = 1 из (1) получаем разложение функции по одной переменной:

#  (2)

Очевидно, что аналогичное разложение справедливо для любой из n- переменных.

Другой важный случай когда n=m. При этом все переменные в правой части (1) получают фиксированные значения и функции в конъюнкции правой части становятся равными 0 или 1, что дает:

, (3)

где дизъюнкция берется по всем наборам (b1…bn), на которых f=1. При f=0 множество конъюнкций в правой части пусто. Такое разложение называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой. СДНФ функции f содержит ровно столько конъюнкций, сколько единиц получается в таблице истинности f. Каждому единичному набору (b1,…, bn) соответствует конъюнкция всех переменных, в которой xi  взято с отрицанием, если bi =0 b ,и без отрицания, если, bi=1. Таким образом существует взаимно однозначное соответствие между таблицей истинности функции f и ее СДНФ, и ,следовательно, СДНФ для всякой логической функции единственна. Единственная функция не имеющая СДНФ – это константа 0.

Формулы, содержащие кроме переменных и скобок, только знаки дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, называются булевыми формулами.

*Теорема 2*. Всякая логическая функция может быть представлена в виде булевой формулы.

Действительно, для всякой функции, кроме константы 0, таким представлением может служит ее СДНФ. Константу 0 можно представить булевой формулой: 

3.1.3 Алгоритм преобразования формулы в СДНФ

Равенство (3) дает возможность находить СДНФ для функции по ее таблице истинности

Например таблицей задана функция от трех переменных равная 1, если большинство аргументов равно 1.

Таб. 4.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Х1 | Х2 | Х3 | f |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Данная функция имеет следующую СДНФ: . Однако, если функция задана формулой, то строить СДНФ по таблице не рационально, тогда применяют следующий алгоритм: построение СДНФ состоит из двух этапов, каждых из которых состоит их трех шагов. На первом этапе строят ДНФ, а на втором этапе из ДНФ строят СДНФ.

1 шаг. Преобразуем формулу так, чтобы в ней были операции только дизъюнкции, конъюнкции, и отрицания (причем отрицание должно быть простым, т. е. над каждым аргументом). При помощи следующих действий можно устранить импликацию, эквивалентность и произвести перенос отрицания:

* импликация 
* эквивалентность 
* перенос отрицания: из свойств:  и  можно произвести следующие преобразования: 

2 шаг. Преобразуем функцию так, чтобы все конъюнкции выполнялись раньшн, чем дизъюнкции. Достичь этого можно при помощи свойства дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции: .

Например: 

3 шаг. Если в ДНФ имеется несколько одинаковых элементарных конъюнкций, то мы оставляем только одну (используя свойство идемпотентности: ).

4 шаг. Делаем все элементарные конъюнкции правильными путем одним из следующих преобразований:

* если в элементарную конъюнкцию входит некоторая переменная вместе со своим отрицанием, то мы удаляем эту конъюнкцию из ДНФ (используя свойство ).
* Если некоторая переменная входит в элементарную конъюнкцию несколько раз, причем или во всех функциях с отрицанием или во всех случаях без отрицания, то мы оставляем только одно вхождение (используя свойство идемпотентности: хх=х).

5 шаг. Делаем все элементарные конъюнкции полными. Если в некоторую конъюнкцию не входит переменная y , то необходимо рассмотреть равносильное выражение и вновь применить шаг 2. Если недостающих переменных несколько, то нужно добавить несколько конъюнктивных членов вида .

6 шаг. После применения 5-го шага могут вновь появится одинаковые конъюнкции. Поэтому на шестом шаге применяют шаг 3.

*Задание №5.*

Найти СДНФ для следующей формулы:

=

1. шаг. Преобразуем формулу так, чтобы в ней были операции только конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

Используя свойство , получим



используя свойство ,получим

=

1. шаг. Преобразуем формулу так, чтобы конъюнкция выполнялась раньше дизъюнкции.

Используя свойство дистрибутивности получим

=

1. шаг. Все конъюнкции получились правильными, делаем их полными



1. шаг. Одинаковых конъюнкций нет, следовательно оставляем их все.



получили совершенную дизъюнктивную нормальную форму.

(в конце примера опущен знак конъюнкции)

###### 3.2 Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ)

Формула вида , называется элементарной дизъюнкцией.

Всякая конъюнкция элементарных дизъюнкций называется, конъюнктивной нормальной формой

Элементарная дизъюнкция, называется правильной, если в нее каждая переменная входит не более одного раза (включая ее вхождение под знаком отрицания).

Правильная элементарная дизъюнкция, называется полной относительно переменных х1…хn , если в нее входит каждая их этих переменных причем только один раз (может быть и пол знаком отрицания).

Совершенной конъюнктивной нормальной формой относительно переменных х1…хn , называется КНФ, в которой нет одинаковых элементарных дизъюнкций и все элементарные дизъюнкции правильны и полны относительно переменных х1…хn.

Теорема 3: всякую функцию f можно представить в СКНФ

, (4)

где символ означает, что конъюнкция берется по тем наборам, которые находятся под ним.

* + 1. Алгоритм преобразования формулы в СКНФ

# Преобразование формулы в СКНФ производится аналогично преобразованию формулы в СДНФ. Отличие состоит в том, что образовывать нужно не конъюнкции, а дизъюнкции.

Находить СКНФ для функции также можно по ее таблице истинности, но дизъюнкции берутся по тем наборам, где функция =0. С отрицанием берется та переменная, значение которой =1.

Например таблицей задана функция от трех переменных равная 1, если большинство аргументов равно 1.

Таб. 5

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Х | Y | Z | f |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Данная функция имеет следующую СКНФ:

.

Однако, если функция задана формулой, то строить СКНФ по таблице не рационально, тогда применяют следующий алгоритм: построение СКНФ состоит из двух этапов, каждых из которых состоит их трех шагов. На первом этапе строят КНФ, а на втором этапе из КНФ строят СКНФ.

1 шаг. Преобразуем формулу так, чтобы в ней были операции только дизъюнкции, конъюнкции, и отрицания (причем отрицание должно быть простым, т. е. над каждым аргументом). При помощи следующих действий можно устранить импликацию, эквивалентность и произвести перенос отрицания:

* импликация 
* эквивалентность 
* перенос отрицания: из свойств:  и  можно произвести следующие преобразования: 

2 шаг. Преобразуем функцию так, чтобы все дизъюнкции выполнялись раньше, чем конъюнкции. Достичь этого можно при помощи свойства дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции:

.

Например: 

3 шаг. Если в КНФ имеется несколько одинаковых элементарных дизъюнкций, то мы оставляем только одну (используя свойство идемпотентности: ).

4 шаг. Делаем все элементарные конъюнкции правильными путем одним из следующих преобразований:

* если в элементарную дизъюнкцию входит некоторая переменная вместе со своим отрицанием, то мы удаляем эту дизъюнкцию из КНФ (используя свойство ).
* Если некоторая переменная входит в элементарную конъюнкцию несколько раз, причем или во всех функциях с отрицанием или во всех случаях без отрицания, то мы оставляем только одно вхождение (используя свойство идемпотентности: хх = х).

5 шаг. Делаем все элементарные дизъюнкции полными. Если в некоторую дизъюнкцию не входит переменная y , то необходимо рассмотреть равносильное выражение и вновь применить шаг 2. Если недостающих переменных несколько, то нужно добавить несколько дизъюнктивных членов вида .

6 шаг. После применения 5-го шага могут вновь появится одинаковые дизъюнкции. Поэтому на шестом шаге применяют шаг 3.

*Задание №5*

Найти СКНФ для формулы:

=

1. шаг. Преобразуем формулу так, чтобы в ней были операции только конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

Используя свойство , получим

=

используя свойство ,получим =

1. шаг. Преобразуем формулу так, чтобы дизъюнкция выполнялась раньше, чем конъюнкция.

Используя свойство дистрибутивности получим





1. шаг. Делаем дизъюнкции правильными



1. шаг. Делаем дизъюнкции полными



1. шаг. Применяем шаг 2. Получаем



1. шаг. Получили две одинаковые дизъюнкции, оставляем одну из них



получили совершенную конъюнктивную нормальную форму. (в конце примера опущен знак конъюнкции)

##### 4 ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

###### 4.1 Равносильные формулы и их доказательство

Алгебра высказываний также как и булева алгебра использует два элемента: «истина», «ложь». В алгебре высказываний рассматриваются вопросы, связанные с образованием сложных высказываний. Если, у нас есть несколько высказываний, то при помощи логических связок (конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквивалентности) и при помощи операций из них можно образовывать различные, новые высказывания. При этом исходные высказывания называются простыми, а вновь образованные высказывания называются сложными.

Пример: имеются простые высказывания: «на улице светит солнце», «в аудитории идут занятия». При помощи логических связок составим несколько сложных высказываний:

* на улице светит солнце, и в аудитории идут занятия;
* на улице светит солнце, или в аудитории идут занятия;
* если на улице светит солнце, то в аудитории идут занятия. и. т. д.

При этом можно получить абсурдные высказывания, что допускается, т. к. смысловая характеристика высказываний игнорируется.

Рассмотрим некоторые определения.

Алфавит – любое непустое множество.

Символ – элемент алфавита.

Произвольная конечная последовательность символов, называется, словом или выражением.

Выражение называется формулой, если оно удовлетворяет следующим требованиям:

1. любая высказывательная переменная есть формула;
2. если X и Y – формулы, то выражения

…Y

тоже являются формулами.

Упорядоченный набор высказывательных переменных называется списком.

Оценка из списка – это сопоставление каждой переменной ее истинного значения.

###### Равносильные формулы

Пусть X и Y – формулы алгебры высказываний, а х1…..хn – набор простых высказываний, входящих хотя бы в одну из формул. Формулы X и Y будем называть равносильными, если при всех значениях истинности х1…..хn значения истинности совпадают . равносильность обозначается ., но знак = ошибкой не будет.

Отношение равносильности является рефлексивным, симметричным и транзитивным.

Перечислим основные равносильности:

1. Двойное отрицание ;
2. Коммутативность





1. Дистрибутивность





1. Ассоциативность





1. Идемпотентность
* 
* 
1. Свойства констант
* 
* 
* 
* 
* 
* 
1. Правила де Моргана
* 
* 
1. Закон противоречия\
* 
1. Закон исключенного третьего
* 

###### 4.3 Доказательство равносильностей

Доказательство равносильностей можно осуществить двумя способами:

* с помощью таблицы истинности;
* с помощью рассуждений.

Пример (Задание №6): докажем равносильность 

а) с помощью таблицы.

Таб. 6

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | Y | Z |  |  |  |  |  |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Мы видим в 5-ом и 8-ом столбцах получили одинаковые значения, тем самым мы доказали равносильность данной формулы.

б) с помощью рассуждений.

1. допустим истинность левой части
2. установим истинное значение для всех истинностных переменных, входящих в список или оценку списка
3. оценку списка подставим в правую часть равносильности
4. установим истинность для правой части
5. все повторим справа налево.

I. 

х=И или И

если х=И  И, И, 

если  и z = И 

II. 

 и 

х =И или y =И и х=И или z=И

если х=И И

если y=И и z=И =И

(И – «истина», т. е. присваивается истинное значение)

#### В процессе доказательства равносильностей может возникнуть необходимость перехода от одной равносильности к другой. Осуществляется переход можно заменой одних логических связок на другие.

####



*Правила перехода от одних равносильностей к другим*

Пусть , а С - произвольная формула

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. С АС В

*Правила равносильных преобразований*

Пусть , а С - произвольная формула. Пусть х - формула, которая входит в С. тогда Са - формула, которая получается заменой в формуле С формулы х на а.Сb - получается из С заменой x на b, тогда Са=Сb.

До настоящего момента было определено понятие равносильности формул алгебры высказываний.

Понятие равносильности функций алгебры логики определяется аналогично.

Пусть f и g - функции алгебры логики, x1,…,xn - совокупность аргументов, входящих хотя бы в одну из этих функций, говорят, что f и g- равносильны, если при всех значениях x1,…,xn значения f и g - совпадают.

*Тавтологии*

Дана формула А х1 х2 х3.

Формула А называется тождественно истинной, если на любом списке переменных она принимает значение «Истина».

Тавтология – это утверждение, которое всегда истинно, иначе ее определяют как закон.

Формула называется тождественно ложной, если на любом списке переменных она принимает значение «Ложь».

Противоречие – это утверждение, которое всегда ложно. Таблица истинности для противоречия всегда принимает значение «Ложь».

Например

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| А |  |  |
| И | Л | Л |
| Л | И | Л |

Формула А называется выполнимой, если находится такой набор переменных, что она принимает значение «Истина».

Формула А называется опровержимой, если находится такой набор переменных, что она принимает значение «Ложь».

Что касается высказываний, то здесь применяется термин высказывание логически истинно, такое высказывание можно получить путем его подстановки в тавтологию (например: предложение «Если идет дождь или идет снег, и не идет дождь, то идет снег» получим путем подстановки в тавтологию и высказывание логически ложно, если его подставляют в противоречие.

###### *Основные тавтологии*

###### *Доказательство утверждений*

Для доказательства различных математических утверждений используются рассуждения, которые на языке логики могут быть выражены формулами

##### 5. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

###### 5.1 Полнота системы булевых функций

Булевой называется произвольная n-местная функция , где .

Эти функции нам встречались в теме «Математическая логика» при составлении 16-ти функций для двух переменных.

Полная система булевых функций обозначается Е имеет следующий вид:

f1(x1,x2,…xk1)

f2(x1,x2,…xk2)

…………….

Fe(x1,x2,…xke)

Система функций (Е), называется полной, если любая ее булева функция может быть выражена с помощью f1, f2, … fe через суперпозицию.

Суперпозиция – это функция f\*, которая получена из функции f с помощью следующих преобразований:

* замена переменной. f(x1, x2, xj,…,xn) f\*=f(x1, x2, xj-1,y, xj+1,…,xn)
* подстановка вместо хj некоторой функции из системы (1).

f\*=fi(x1, x2, xj-1, fe(x1,x2,…xke) xj+1,…,xki).

Пример: система функций  (Е1) всегда полна, т. к. каждая функция этой системы может быть представлена в виде СДНФ, следовательно СДНФ является суперпозицией, через которую может быть выражена любая из функций системы;

Система функций (Е2) также является полной, т. к. недостающая функция () может быть выражена через остальные две по правилу де Моргана и двойного отрицания: .

*Задание №7*

Доказать полноту системы:

.

Для наглядности эту систему можно записать следующим образом: . То есть нам дана система, состоящая из булевой функции (импликации) и константы 0. С их помощью мы можем выразить операцию отрицания, для этого мы константу 0 подставим вместо одной из переменных:



следовательно данная система является полной.

##### 6. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

При изучении высказываний рассматриваются при одной фиксированной ситуации, после фиксации которой высказывание принимает значение 0 или 1.

В логике предикатов исследуется зависимость высказываний от ситуаций, при этом фиксируется не единственная ситуация, а некоторое множество допустимых ситуаций. В каждой ситуации нас, по прежнему, интересуют значения 0 и 1.

Высказывание как функция на некотором фиксированном множестве допустимых ситуаций, называется предикатом на этом множестве.

Предикатом Р(х1…хn), называется функция P:MnB, где М- призвольное множество, а В – двоичное множество .

Иначе говоря, n-местный предикат, определенный на множестве М – это двузначная функция от n аргументов, принимающих значение в произвольном множестве М.

М называется предметной областью предиката, а элементы этого множества (х1…хn)М, называются предметными переменными.

Если предикат зависит от n аргументов, то это будет n-местный предикат.

Если в предикат поставить конкретное значение аргументов, то предикат становится высказыванием.

Рассмотрим примеры предикатов:

1. Р0: 22+3252 – высказывание

Р1:х2+3252 – одноместный предикат

Р2:х2+y252 – двухместный предикат

Иногда используют более простую запись: x>y – это двухместный предикат, предметной областью которого могут служить любые множества действительных чисел. Высказывание 6>6 – истинно, а 7>7 – ложно. Различные подстановки чисел вместо одной предметной переменной дают различные n – местные предикаты: x>5, x>0, 7>y и т. д.

1. «Прямая Р проходит через точки А и В» – трехместный предикат, у которого предметными областями двух переменных (А и В) являются множества точек, а предметной областью третей переменной Р является множество прямых.

###### 6.1 Операции над предикатами

Над предикатами можно производить те же операции, что и над высказываниями: .

Примеры:

Р1(х): х делится на 2

Q1(х): х делится на 3

Р1(х) Q1(х): 

Р1(х) Q1(х): 

Р1(х) Q1(х): или на 2 и на 3 или ни на 2 и ни на 3

Р1(х) Q1(х): : не делиться на 2 или делиться на 3

 Р1(х): х не делится на 2.

###### 6.2 Кванторы

В программировании квантор определяется как логический оператор, с помощью которого по предикату строится высказывание относительно области истинности предиката.

Пусть Р(х) – предикат, определенный на М, т. е. . Тогда под высказыванием «для всех х из М Р(х) истинно» мы понимаем высказывание, которое является истинным, если Р(х) истинно для любого х. Высказывание записанное в кавычках обозначается , множество М не входит в обозначение, но должно быть ясно из контекста. Знак , называется квантором общности.

А под высказыванием «существует такой х их М, что Р(х) истинно» мы понимаем высказывание, которое является истинным, если найдется хотя бы один х такой, что Р(х) является истинным. Высказывание в кавычках обозначается . Знак , называется квантором существования.

Переход от Р(х) к  или к  называется связыванием переменной х (или квантификацией). Переменная, на которую навешан квантор, называется связанной, несвязанная переменная называется свободной.

Квантору общности соответствует связывание словами «для всех», квантору существования – словом «существует».

Навешивать кванторы можно и на многоместные предикаты. Выражение, на которое навешивается квантор общности или квантор сущности, называется областью действия квантора. Навешивание квантора на многоместный предикат уменьшает в нем число свободных переменных и превращает его в предикат от меньшего числа переменных. Это обуславливается определением смысла связанных и свободных переменных. Свободная переменная – это обычная переменная, которая может принимать различные значения из М, а выражение Р(х) – переменное высказывание, зависящее от значения х. Выражение  не зависит от переменной х и при фиксированных М и Р имеет определенное значение. Это означает, что переход от  к  не меняет истинности выражения.

*Пример кванторов:*

Пусть Р(х) – предикат, х – четное число, тогда высказывание  - истинно на любом множестве четных чисел и ложно на множестве, содержащем хотя бы одно нечетное число. Высказывание  - истинно на любом множестве, содержащим хотя бы одно четное число и ложно на любом множестве нечетных чисел.

###### 6.3 Формулы

Алфавит исчисления предикатов содержит следующие символы:

* х1,х2,…хn – предметные переменные;
* Pt1, Pt2,…, Ptn – предикаты, где t – количество мест;
*  - операции;
*  - кванторы;
* ( ) – скобки.

Последовательность перечисленных символов называется формулой.

При логической интерпретации формул логики предикатов возможны две основные ситуации:

1. Если в области М для формулы F существует такая подстановка констант вместо всех переменных, что F становится истинным высказыванием, то формула f называется выполнимой в области М. Если существует область М, где f выполнима, то f называется просто выполнимой.

Пример: .

1. Если формула f выполнима в М при любых подстановках констант, то она называется тождественно истинной в М. Формула f тождественно истинная в любых М называется тождественно истинной или общезначимой.

Пример: формула  тождественно истинна для всех М, состоящих из одного элемента, а формула  тождественно истинна.

Две (или более ) формулы называются эквивалентными, если при любых подстановках констант они принимают одинаковые значения. В частности все тождественно истинные (тождественно ложные) формулы эквивалентны. Отметим, что если F1 и F2 эквивалентны, то формула F1F2, - тождественно истинна.

*Пример (Задание №8):*

Ввести а) одноместный предикат, б) многоместный предикат на соответствующих областях и записать при их помощи приведенное ниже высказывание в виде формулы логики предикатов.

Всякое натуральное число, делящееся на 12 делиться на 2, 4, 6.

Решение:

Введем на натуральном ряде предикаты:

А(х) – делиться на 12 (т. е. А(х)=1 тогда и только тогда, когда х делиться на 12),

В(х) – делиться на 2 (т. е. В(х)=1 тогда и только тогда, когда х делиться на 2),

С(х) – делиться на 4 (т. е. С(х)=1 тогда и только тогда, когда х делиться на 4),

D(х) – делиться на 6 (т. е. D(х)=1 тогда и только тогда, когда х делиться на 6).

.

##### 7. ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Теория графов разработана для решения задач о геометрических конфигурациях, состоящих из точек и линий. При этом не существенно соединены ли точки прямыми отрезками или криволинейными дугами, какова их длина и т. д. Важно лишь то, что каждая линия соединяет какие-либо точки. Исходя из этого граф определяется как совокупность двух множеств V (множество точек) и Е (множество линий).

Записывается граф следующим образом: G(V,E).

Элементы множества V называются вершинами графа G. Элементы множества Е – ребрами графа G. Вершины и ребра графа G называют его элементами и часто записывают  и .

###### 7.1 Понятие смежности

Пусть v1, v2 – вершины, е1 – соединяющее их ребро. Тогда вершина v1 и ребро е1 – инцидентны, вершина v2 и ребро е1 также инцидентны. Два ребра инцидентные одной вершине (е1,е2 инцидентны v2) называются смежными. А также две вершины инцидентные одному ребру (v1, v2 инцидентны е1 называются смежными.

Пример: обычно граф изображают диаграммой: вершины – точками (или кружками), ребра – линиями. Изобразим граф, имеющий 4 вершины и 5 ребер.

v1

v2

v4

v3

e2

e1

e4

e3

e5

Рис. 6 Граф G

e1

e2

v1

v2

Рис. 5 Граф

Пример: Задание: выписать все смежные и несмежные вершины и ребра.

Решение:

Таб.7

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Смежные вершины | Несмежные вершины | Смежные ребра | Несмежные ребра |
| v1и v2 | v1 и v3 | e1 и е2 | e1 и е3 |
| v2 и v3 |  | e2 и е3 | e4 и е2 |
| v3 и v4 |  | e3 и е4 |  |
| v4 и v1 |  | e4 и е1 |  |
| v4 и v2 |  | e4 и е5 |  |
|  |  | e3 и е5 |  |
|  |  | e1 и е5 |  |
|  |  | e2 и е5 |  |

До настоящего момента мы рассматривали неориентированный граф. Если каждому ребру графа присвоить направление (в виде стрелочки) от одной вершины к другой, то такие ребра называются дугами, а содержащий их граф называется ориентированным (или орграфом).

Первая по порядку вершина инцидентная дуге ориентированного графа, называется его началом, вторая – его концом.

Вершины в ориентированном графе называются узлами.

Рассмотрим некоторые виды графов:

* Если ребро соединяет вершину саму с собой, то такой элемент графа называется петлей, а содержащий его граф называется графом с петлей (или псевдографом):
* Если различные ребра могут быть инцидентными одной паре вершин, то они называются кратными, а содержащий их граф называется мультиграфом:
* Множество ребер Е может быть пустым:
* Линии, изображающие ребра графа могут пересекаться, но точки пересечения не являются вершинами:
* Граф может быть бесконечным:

Каждому неориентированному графу можно поставить в соответствие орграф с тем же множеством вершин заменив лишь ребра неориентированного графа на направленные дуги орграфа. Такое соответствие называется каноническим.

###### 7.2 Матрица инцидентности и списки ребер

Задать граф – значит описать множества его вершин и ребер, а также отношение инцидентности. Когда граф конечен для описания его вершин и ребер достаточно их занумеровать. Отношение инцидентности определяют матрицей ij, имеющей m строк и n столбцов. Столбцы соответствуют вершинам графа, строки – ребрам графа. Если ребро еi инцидентно вершине vj, то ij = 1, в противном случае ij = 0. Это матрица инцидентности для неориентированного графа.

*Пример (Задание №9)*

Обозначим вершины римскими цифрами, а ребра – арабскими. Матрица инцидентности для данного графа выглядит следующим образом:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | I | II | III | IV | V | VI | VII |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

В матрице инцидентности орграфа ij = -1, если вершина vj – начало дуги ai; ij = 1, если vj – конец дуги ai; если ai – петля, а vj – инцидентная ей вершина, то ij = а, где а – любое число отличное от 0, 1, -1. В остальных случаях ij = 0.

Пример (Задание №10): построим ориентированный граф и матрицу инцидентности для нее:

I

III

II

IV

V

VI

VII

2

7

6

5

4

1

3

Рис. 8 Орграф

Из матрицы инцидентности мы видим, что в каждой строке есть только два элемента (или один, если ребро является петлей) отличных от 0. Поэтому такой способ задания графа посчитали неэкономичным. Отношение инцидентности можно задать так же с помощью списков ребер графа. Каждая строка этого списка соответствует ребру, в ней записывают номера вершин, инцидентных ему. Для неориентированного графа порядок вершин в строке произволен, а для орграфа первым записывают номер вершины начала дуги, а вторым – номер вершины конца дуги.

Составим списки ребер для данных графов:

Таб. 8 Списки ребер неориентированного графа

Таб. 9 Списки ребер орграфа

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Ребра | Вершины |  | Ребра | Вершины |
| 1 | I, II |  | 1 | I, II |
| 2 | I, III |  | 2 | I, III |
| 3 | II, IV |  | 3 | II, IV |
| 4 | I, V |  | 4 | III, V |
| 5 | II, VI |  | 5 | III, IV |
| 6 | III, IV |  | 6 | III, VII |
| 7 | III, V |  | 7 | VI, VII |
| 8 | IV, VI |  |  |  |
| 9 | V, VII |  |  |  |
| 10 | VI, VII |  |  |  |

Каждая строка списка ребер соответствует строке матрицы с тем же номером ребра.

###### 7.3 Матрица смежности графа

Матрица смежности – это квадратная матрица ij, строкам и столбцам которой соответствуют вершины графа. Для неориентированного графа ij ровно количеству ребер, инцидентных i-ой и j-ой вершинам. Для орграфа ij ровно количеству ребер с началом в i-ой вершине и концом j-ой вершине. Таким образом матрица смежности неориентированного графа симметрична, а орграфа – необязательно.

Пример: построим матрицы смежности для графов, рассмотренных ранее.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | I | II | III | IV | V | VI | VII |  |  | I | II | III | IV | V | VI | VII |
| I | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |  | I | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| II | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |  | II | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| III | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |  | III | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| IV | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |  | IV | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| V | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |  | V | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| VI | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |  | VI | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| VII | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |  | VII | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Матрица смежности неориентированного графа

Матрица смежности орграфа.

###### 7.4 Операции над членами графов

1. Дополнение Н части Н определяется множеством всех ребер графа G, не принадлежащих Н.
2. Объединение Н1 Н2 определяется:

;

.

1. Пересечение Н1 Н2 частей Н1 и Н2  графа G определяется:

;

.

8 ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Контрольная работа в обязательном порядке должна содержать титульный лист (см. приложение I), условие задачи и подробное описание ее решения. Описание решения должно содержать: используемые при решении формулы и свойства; их название (если таковое имеется); методы или способы решения задачи; результаты вычислений; выводы.

##### 9. ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ

1. Множества и подмножества. Основные понятия. Графическое представление множеств и операций над ними.
2. Множества и подмножества. Основные понятия. Свойства операций над множествами. Тождества. Порядок доказательства тождеств.
3. Отношение на множествах. Декартово произведение.
4. Отношения на множествах. Одноместные, бинарные, n- местные отношения.
5. Отношения на множествах. Свойства отношений.
6. Функция как отношение на множествах. Отношение порядка. Отношение эквивалентности.
7. Математическое моделирование. Понятие модели. Этапы приведения к модели. Способы моделирования.
8. Алгебраические модели. Общие понятия. Алгебраические модели с одной определяющей операцией.
9. Алгебраические модели. Общие понятия. Алгебраические модели с двумя определяющими операциями.
10. Алгебраические модели. Общие понятия. Алгебраические модели, содержащие более одного класса математических объектов.
11. Теория кодирования. Общие понятия. Показать построение трехзначного двоичного кода на примере куба. Описать все возможные ситуации.
12. Теория кодирования. Общие понятия. Кодовые расстояния. Методы обнаружения ошибок.
13. Теория кодирования. Общие понятия. Групповые коды.
14. Линейная алгебра. Общие понятия. Линейные подпространства.
15. Реляционная алгебра. Понятия домена, кортежа. Операции выбора, проекции, объединения.
16. Математическая логика. Общие понятия алгебры логики. Функции алгебры логики и их таблицы истинности.
17. Булева алгебра. Общие понятия. Свойства операций и элементов булевой алгебры.
18. Булева алгебра. Дизъюнктивные нормальные формы. Совершенные дизъюнктивные нормальные формы.
19. Булева алгебра. Алгоритм преобразования формулы в совершенную дизъюнктивную нормальную форму.
20. Булева алгебра. Конъюнктивные нормальные формы. Совершенные конъюнктивные нормальные формы.
21. Исчисление высказываний. Общие понятия. Понятие равносильной формулы.
22. Исчисление высказываний. Равносильности. Способы доказательства равносильностей.
23. Исчисление высказываний. Правила равносильных преобразований. Тавтологии. Основные понятия.
24. Исчисление высказываний. Тавтологии. Методы доказательства тождественной истинности. высказываний.

25. Аксиоматическая система в исчислении. Основные понятия. Выводимые формулы. Правила вывода.

1. Булевы функции. Полнота системы булевых функций. Теорема Поста.
2. Булевы функции. Замкнутые классы. Контактные схемы.
3. Логика предикатов. Основные понятия. Операции над предикатами.
4. Логика предикатов. Основные понятия. Кванторы. Исчисление предикатов.
5. Формальные грамматики. Классификация грамматик. Порождающие грамматики.
6. Языки. Свойства языков. Операции над языками. Анализ грамматик и языков.
7. Теория алгоритмов. Понятие алгоритмической разрешимости. Рекурсивные функции.
8. Теория конечных автоматов. Машины Тьюринга. Формы представления алгоритмов.
9. Теория графов. Основные понятия.
10. Элементы комбинаторики. Основные понятия.

##### ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнкцов О.П., Адельсон – Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера – 2-е иэдание переработанное и доплненное М.: Энергоатомиздат 1988г.- 480с.
2. Горбатов В.А. Основы дискретной математики: учебное пособие для студентов вузов – М.: Высшая школа, 1986Г-311с.
3. Никольская И Л. Математическая логика: Учебник М.: Высшая школа 1981г.-127с.
4. Ершов Ю.А., Палютин Е.А. Математическая логика: учебное пособие для вузов 2-е издание исправленное и дополненное- М.: Наука 1987г.- 336с.
5. Клини С.К. Математическая логика М.: Мир 1973г.
6. Новиков П.С. Элементы математической логики. М.: Наука 1973г.
7. Оре О. Теория графов М.: Наука 1968г.
8. Зыков А.А. Теория конечных графов. Новосибирск: Наука 10969г.
9. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике М.: Наука 1977г.- 368с.
10. Гиндикин С.П. Алгебра логики в задачах М.: Наука 1972г.
11. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике, теории автоматов М.: Наука 1975г.

###### ПРИЛОЖЕНИЕ I

Оформление титульного листа

|  |
| --- |
| Волжский университет им. В.Н. ТатищеваКафедра «Информатика и системы управления»Контрольная работапо дисциплине «Дискретная математика»специальность 071900 «Информационные системы»Выполнил: студент группы ИТЗ-301Сидоров И. И.Проверил: Воронцова Е. В.Дата сдачи 00.00.00Дата проверки 00.00.00Вариант5. Тольятти 2001 |