Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г.В.Плеханова

(технический университет)

А.П. Господариков, Г.А. Колтон, С.А. Хачатрян

**Ряды Фурье. Интеграл Фурье. Операционное исчисление**

Учебно-методическое пособие

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2005

УДК 512 + 517.2 (075.80)

ББК 22.161.5

Г723

Учебно-методическое пособие дает возможность получить практические навыки анализа функций с помощью разложения в ряд Фурье или представления интегралом Фурье и предназначено для самостоятельной работы студентов дневной и заочной форм обучения специальностей.

В пособии рассмотрены основные вопросы операционного исчисления и широкий класс технических задач с применением основ операционного исчисления.

Научный редактор проф*. А.П. Господариков*

Рецензенты: кафедра высшей математики № 1 Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета; доктор физ.-мат. наук *В.М. Чистяков* (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет).

**Господариков А.П.**

Г723. Ряды Фурье. Интеграл Фурье. Операционное исчисление: Учебно-методическое пособие / *А.П. Господариков*, *Г.А. Колтон*, *С.А. Хачатрян*; Санкт-Петербургский государственный горный институт (технический университет). СПб, 2005. 102 с.

ISBN 5-94211-104-9

**УДК 512 + 517.2 (075.80)**

**ББК 22.161.5**

**Введение**

Из теории Фурье известно, что при некотором воздействии на физические, технические и другие системы, его результат повторяет форму начального входного сигнала, отличаясь только масштабным коэффициентом. Понятно, что на такие сигналы (их называют собственными) система реагирует наиболее простым образом. Если произвольный входной сигнал есть линейная комбинация собственных сигналов, а система линейна, то реакция системы на этот произвольный сигнал есть сумма реакций на собственные сигналы. И поэтому полную информацию о системе можно получить по «кирпичикам» – откликам системы на собственные входные сигналы. Так поступают, например, в электротехнике, когда вводят частотную характеристику системы (передаточную функцию). Для наиболее простых линейных, инвариантных во времени систем (например, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами) в некоторых случаях собственными функциями являются гармоники вида . Таким образом можно получить и результат произвольного воздействия на систему, если последний будет представлен в виде линейной комбинации гармоник (в общем случае, в виде ряда Фурье или интеграла Фурье). Вот одна из причин, по которой в теории и приложениях возникает потребность применения понятия тригонометрического ряда (ряда Фурье) или интеграла Фурье.

**Глава 1. Ряды Фурье**

**§ 1. Векторные пространства**

Здесь приведены краткие сведения из векторной алгебры, необходимые для лучшего понимания основных положений теории рядов Фурье.

Рассмотрим множество Ω геометрических векторов (векторное пространство), для которого обычным образом введены понятие равенства векторов, линейные операции (сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число) и операции скалярного умножения векторов.

Введем в пространстве Ω ортогональный базис, состоящий из трех попарно ортогональных векторов ,  и . Произвольный вектор  является линейной комбинацией векторов базиса:

. (1.1)

Коэффициенты λ*i* (*i* = 1, 2, 3), называемые координатами вектора  относительно базиса , могут быть определены следующим образом. Скалярное произведение вектора  и одного из векторов базиса 

.

В силу ортогональности базиса скалярные произведения  при , следовательно, в правой части последнего равенства отлично от нуля лишь одно слагаемое, соответствующее , поэтому , откуда

, (1.2)

где .

Если векторы  и  заданы своими координатами  и , то их скалярное произведение

.

Так как при скалярное произведение , то в двойной сумме отличны от нуля лишь слагаемые с равными индексами, поэтому

. (1.3)

В частности при  из (1.3) следует

. (1.4)

**§ 2. Скалярное произведение и норма функций**

Обозначим символом  множествофункций, кусочно-непрерывных на промежутке [*a*, *b*], т.е. функций, имеющих на промежутке [*a*, *b*] конечное число точек разрыва первого рода и непрерывных во всех остальных точках этого промежутка.

Скалярным произведением функций  называется число

.

***Свойства скалярного произведения функций*** полностью совпадают со свойствами скалярного произведения векторов:

1. .

2. .

3. .

4. ; .

Таким образом, скалярное произведение линейно зависит от своих компонентов. Это свойство называется билинейностью скалярного произведения.

Функцииназываются ортогональными ** на [*a, b*], если*.*

Нормой функции  на промежутке[*a*, *b*] называется неотрицательное число , квадрат которого равен скалярному произведению функции  на себя:

.

***Свойства нормы функции*** во многом совпадают со свойствами модуля вектора:

1. .

2. Если функция  непрерывна на [*a*, *b*] и , то . Так как , то при 

,

откуда . Дифференцируя последнее соотно- шение по  и применяя теорему Барроу, получим  и, сле-довательно, .

3. **теорема косинусов**

.  .

*Следствие.* Если , то  (теорема Пифагора).

4. **Обобщенная теорема Пифагора.** Если функции (*k* = = 1, 2, …, *n*) попарно ортогональны на промежутке , то

.

Используя свойство билинейности скалярного произведения, получим

.

В силу ортогональности функций  скалярные произведения  при , поэтому

.

5. **неравенство Коши – Буняковского** , или, что то же самое,

.

При любых вещественных 

.

Таким образом, квадратный трехчлен в левой части последнего неравенства сохраняет знак на всей вещественной оси, следовательно, его дискриминант .

Упражнение 1. Доказать свойства скалярного произведения функций 1-3.

Упражнение 2. Показать справедливость следующих утверждений:

а) функция  ортогональна функциям  и  на промежутке  при любых целых *k* и *m*;

б) при любых целых *k* и *m* функции  и ортогональны на промежутке ;

в) функции  и , а также  и  при  ортогональны на промежутках  и ;

г) функции  и  не ортогональны на промежутке .

Упражнение 3. Используя свойство нормы 5, доказать неравенство треугольника

.

**§ 3. Ортогональные системы функций. Коэффициенты Фурье. Ряд Фурье**

Счетное множество непрерывных на промежутке  функций  образуют на этом промежутке ортогональную систему, если

1. , 2.  при .

Пусть  – ортогональная система функций на промежутке  и . По аналогии с (1.2) образуем величины

, (3.1)

где .

Числа  называются коэффициентами Фурье функции  относительно ортогональной системы .

Ряд

 (3.2)

называется рядом Фурье для функции .

В отличие от того, что имеет место в векторной алгебре [см. (1.1)], здесь нельзя утверждать ни того, что суммой ряда Фурье (3.2) является заданная функция , ни даже того, что ряд (3.2) вообще сходится. Тем не менее, частичные суммы ряда (3.2), называемые полиномами Фурье, играют важную роль в задаче аппроксимации функции  линейными комбинациями функций .

Термином аппроксимация будем обозначать замену заданной функции  другой, близкой к , функцией , более простой или более удобной для исследования. При этом, естественно, возникает вопрос о величине погрешности, связанной с такой заменой. Погрешность аппроксимации обычно оценивается с помощью среднего квадратического отклонения

,

или более простой величины

.

Ясно, что чем меньше величина δ, тем ближе располагаются друг к другу графики функций  и , тем лучше функция  аппроксимирует функцию .

Определим, при каком наборе коэффициентов  линейная комбинация



первых *п* функций ортогональной системы  наилучшим образом аппроксимирует функцию , или, иначе говоря, при каких  величина  принимает наименьшее значение.

Преобразуем выражение для δ*п*, используя последовательно теорему косинусов, свойство билинейности скалярного произведения, обобщенную теорему Пифагора и формулу (3.1) для коэффициентов Фурье:



.

Применив тождество , получим



Из последнего выражения сразу следует, что  принимает наименьшее значение

, (3.3)

при 

Таким образом, именно частичная сумма ряда Фурье является наилучшей аппроксимацией функции  по сравнению с другими линейными комбинациями функций 

Упражнение. Показать, что, во-первых, система функций  ортогональна на промежутке , и, во-вторых, системы функций   и  ортогональны на промежутке .

Указание. Воспользоваться свойствами скалярного произведения функций.

**§ 4. Сходимость в среднем. Равенства Парсеваля**

Из формулы (3.3) с учетом того, что величина  по определению не отрицательна, следует

. (4.1)

Левая часть неравенства (4.1) представляет собой частичную сумму положительного числового ряда

. (4.2)

Положительный ряд с ограниченными в совокупности частичными суммами сходится, следовательно, сходится и ряд (4.2). Переходя в (4.1) к пределу при , получим неравенство Бесселя

. (4.3)

Возвращаясь к формуле (3.3), заметим, что с увеличением *п* величина  уменьшается, оставаясь неотрицательной. Следовательно, монотонно убывающая неотрицательная последовательность  сходится. из (3.3) получим ее предел

. (4.4)

Если , где  – частичная сумма ряда Фурье (3.2), то говорят, что ряд (3.2) сходится в среднем к функции . В этом случае из (4.4) следует

 (4.5)

Соотношение (4.5) называется равенством Парсеваля. Это аналог формулы (1.4) для квадрата модуля вектора.

**Замечание**. Из сходимости ряда в среднем, вообще говоря, не следует его сходимость в обычном смысле слова.

Если равенство Парсеваля выполняется для всех функций из множества , или, что то же самое, для любой функции из  ряд Фурье сходится в среднем к этой функции, то ортогональная система  называется замкнутой, а соотношение (4.5) – уравнением замкнутости. Замкнутыми системами, например, являются системы функций из упражнения в §3. Доказательство этого факта выходит за рамки настоящего пособия.

***Свойства замкнутых систем*** следующие:

1. Если непрерывная функция  ортогональна всем функциям замкнутой системы, то она тождественно равна нулю. Действительно, в этом случае все коэффициенты Фурье равны нулю. Из (4.5) следует, что , и тогда (см. § 2,свойство нормы 2) 

Таким образом, к замкнутой системе функций нельзя присоединить никакой новой функции, отличной от тождественного нуля, которая была бы ортогональна ко всем . Это свойство замкнутой системы функций называют ее полнотой.

*Следствие*. Если две непрерывные функции  и  имеют одни и те же коэффициенты Фурье, то они тождественно совпадают. Доказательство этого утверждения следует найти самостоятельно.

2. Пусть  и  – коэффициенты Фурье функций  и  относительно замкнутой ортогональной системы . Тогда

 (4.6)

где, как и ранее, 

Соотношение (4.6) называется обобщенным равенством Парсеваля. Это аналог формулы (1.3) для скалярного произведения векторов.

Так как для функций  коэффициенты Фурье, очевидно, равны , в силу замкнутости системы из (4.5) следует



Вычитая почленно эти равенства и используя тождества



получим равенство (4.6).

3. Если  – замкнутая ортогональная система функций, то

, (4.7)

т.е. интеграл от функции  можно получить почленным интегрированием ее ряда Фурье. Для доказательства достаточно применить формулу (4.6) к функциям  и



и учесть, что в этом случае . Тогда



Отметим, что справедливость формулы (4.7) установлена даже без предположения о сходимости ряда Фурье.

Упражнение. Доказать, что если ряд Фурье сходится равномерно на промежутке [*а*, *b*] к функции , то он сходится в среднем к этой функции.

**§ 5. Тригонометрический ряд Фурье на промежутке [–*L*, *L*]**

Система функций

 (5.1)

ортогональна на промежутке [–*L*, *L*] (см. упражнение в § 3).

Показать, что  следует самостоятельно.

Каждой функции , кусочно-непрерывной на промежутке [–*L*, *L*], сопоставим ее ряд Фурье:

. (5.2)

Коэффициенты Фурье , в соответствии с (3.1), определятся формулами





 (5.3)

Ряд (5.2) называется тригонометрическим рядом Фурье.

Как отмечалось в § 4, система функций (5.1) является замкнутой. Поэтому для любой кусочно-непрерывной функции  ее ряд Фурье (5.2) сходится в среднем к этой функции. Равенство Парсеваля (4.5) в принятых теперь обозначениях примет вид

. (5.4)

Левая часть последнего равенства, как легко видеть, представляет собой удвоенное среднее значение квадрата функции  на промежутке [–*L*, *L*].

Частичные суммы



тригонометрического ряда (5.2) называются тригонометрическими полиномами Фурье. Из формулы (3.3) следует, что средняя квадратическая погрешность, возникающая при замене функции  ее тригонометрическим полиномом Фурье,

. (5.5)

**§ 6. Сходимость тригонометрического ряда Фурье. Теорема Дирихле**

Функция  называется кусочно-монотонной на промежутке , если этот промежуток можно разделить на конечное число частей, на каждой из которых функция монотонна.

Если функция кусочно-непрерывна и кусочно-монотонна на промежутке , то говорят, что на этом промежутке она удовлетворяет условиям Дирихле. Для таких функций справедлива принимаемая нами без доказательства следующая теорема.

**Теорема Дирихле.** Если функция  удовлетворяет условиям Дирихле на промежутке [–*L*, *L*], то ее ряд Фурье (5.2) сходится во всех точках этого промежутка. При этом во внутренних точках промежутка сумма ряда Фурье , если в точке *х* функция непрерывна; в точках разрыва ; на концах промежутка , где  – односторонние пределы в точке *а*.

Если доопределить (или переопределить) функцию , полагая  в точках разрыва и *f*(–*L*) = = на концах промежутка, то в соответствии с теоремой Дирихле

, (6.1)

где коэффициенты  по-прежнему определяются формулами (5.3).

Соотношение (6.1) обычно называется разложением функции  в тригонометрический ряд Фурье. Члены ряда (6.1)

 (6.2)

называются гармониками. Введем в рассмотрение величины  и , связанные с коэффициентами Фурье  и  соотношениями  и . Тогда гармоника (6.2) запишется в виде , где  – амплитуда гармоники;  – ее частота;  – начальная фаза. Множество частот  образует дискретный частотный спектр функции  на промежутке [–*L*, *L*]. Формула (6.1) примет вид

, (6.3)

т.е. функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, представляет собой результат сложения бесконечного числа гармоник. При этом амплитуды и начальные фазы слагаемых гармоник зависят от разлагаемой функции, а частотный спектр одинаков для всех функций, заданных на одном и том же промежутке.

Из равенства Парсеваля (5.4) следует

, (6.4)

где .

Таким образом, сумма квадратов амплитуд гармоник равна удвоенному среднему значению квадрата функции  на промежутке [–*L*, *L*]. Соотношение (6.4) часто называют энергетическим равенством.

В силу периодичности гармоник из сходимости ряда (6.3) на промежутке [–*L*, *L*] следует его сходимость всюду, т.е. на всей числовой оси. Суммой этого ряда, очевидно, будет 2*L-*периодическая функция , которая на промежутке [–*L*, *L*] совпадает с заданной функцией . Функция , определенная указанным образом, называется периодическим продолжением.

**Теорема Дирихле (другая формулировка).** Если функция  удовлетворяет условиям Дирихле на промежутке [–*L*, *L*], то тригонометрический ряд Фурье (6.1) сходится всюду к ее периодическому продолжению.

Замечание. Если функция , заданная для всех , является 2*L-*периодической, то ее периодическое продолжение совпадает с самой функцией, и, следовательно, ряд Фурье (6.1) представляет функцию  на всей числовой оси. В этом случае можно

получить другие, иногда более удобные по сравнению с (5.3), формулы для коэффициентов Фурье:



, (6.5)

где *с* – любое число.

Вместо того, чтобы устанавливать справедливость формул (6.5), докажем более общее утверждение: если функция  имеет период *Т*, то интеграл  не зависит от *а*. Действительно,





Выполнив в среднем интеграле замену переменной  и воспользовавшись периодичностью подынтегральной функции, получим





Последний интеграл не зависит от *а*, что, собственно, и требовалось доказать.

Таким образом, интегралы в (6.5) не зависят от *с*. Полагая в этих формулах , убеждаемся в тождественности выражений (5.3) и (6.5).

Если функция  не является периодической, то в формулах (6.5) в подынтегральные выражения вместо функции  должно входить ее периодическое продолжение .

Упражнение. Доказать, что гармоники (6.2) являются периодическими функциями с периодом 2*L*, т.е.  .

**§ 7. Разложение в тригонометрические ряды четных и нечетных функций**

Функция , область определения  которой симметрична относительно начала координат, называется четной (нечетной), если . Тогда  или []. Так, например, функции  и  нечетны, а  и  четны. Легко видеть, что произведение двух четных или двух нечетных функций – четная функция, а произведение четной и нечетной функций – нечетная функция.

Предлагаем доказать самостоятельно следующие свойства определенного интеграла:

а) если функция  четна, то

; (7.1)

б) если функция  нечетна, то

. (7.2)

Указание. Представить интеграл  в виде суммы интегралов:  и в первом из них выполнить замену .

Пусть четная функция  удовлетворяет условиям Дирихле на промежутке [–*L*, *L*]. Произведение  будет нечетной функцией, и, поэтому, в силу (7.2)

.

Таким образом, ряд Фурье четной функции содержит только косинусы:

. (7.3)

Так как  – четная функция, то вследствие (7.1)

 . (7.4)

Подобным же образом получим, что ряд Фурье нечетной функции содержит только синусы:

 (7.5)

где

. (7.6)

**§ 8. Ряд Фурье для функции, заданной на промежутке [0, *L*]**

Пусть функция удовлетворяет на промежутке [0, *L*] условиям Дирихле. Построим четное продолжение данной функции на промежуток [–*L*, 0], полагая  для . Полученную четную функцию разложим в тригонометрический ряд Фурье (7.3), содержащий только косинусы:

. (8.1)

Коэффициенты разложения можно вычислять по формулам (7.4), в которые входят только значения первоначально заданной функции:

. (8.2)

Аналогично, если функцию  продолжить на промежуток [–*L*, 0] нечетным образом, полагая  для , и разложить полученную функцию в ряд Фурье на промежутке [–*L*, *L*], то в этом разложении будут содержаться только синусы:

 (8.3)

где

. (8.4)

На промежутке [0, *L*] ряды (8.1) и (8.3) представляют одну и ту же функцию , но вне этого промежутка эти ряды ведут себя по-разному. Так на промежутке [–*L*, 0] ряд (8.1) сходится к четному, а ряд (8.3) к нечетному продолжению функции .

Функции

; (8.5)

, (8.6)

участвующие в разложениях (8.1) и (8.3), образуют ортогональные системы на промежутке [0, *L*]. Кроме того, как нетрудно проверить, . Поэтому величины  и , определяемые формулами (8.2) и (8.4), представляют собой коэффициенты Фурье функции  относительно ортогональных систем (8.5) и (8.6) соответственно, и, следовательно, ряды (8.1) и (8.3) являются рядами Фурье на промежутке [0, *L*] для этой функции.

Замечание. Если функцию , заданную на [0, *L*], продолжить произвольным образом на промежуток [0, *L*], например, просто положив  для , то ее разложение в тригонометрический ряд будет содержать и синусы, и косинусы:

. (8.7)

На промежутке [0, *L*] этот ряд будет представлять заданную функцию, но, в отличие от рядов (8.1) и (8.3), ряд (8.7), вообще говоря, не является рядом Фурье для функции  на указанном промежутке, так как система функций

,

участвующая в разложении (8.7), не ортогональна на [0, *L*] (см § 2, упражнение 2, д).

**§ 9. Ряды Фурье для комплексных функций**

Рассмотрим элементы теории рядов Фурье для комплексных функций, т.е. функций вида , где *i* – мнимая единица,  – вещественные функции вещественного аргумента. Обозначим символом  множество комплексных кусочно-непрерывных функций, определенных на промежутке .

Скалярным произведением функций  назовем комплексное число

,

где  – функция, комплексно сопряженная с функцией .***свойства скалярного произведения комплексных функций*** следующие:

1. 

2. билинейность

, .

Доказать свойства 1 и 2 предлагаем самостоятельно.

Как и ранее, функции *f* и *g* будем называть ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

Определение нормы функции оставим прежним, так что

.

Свойства нормы, претерпевшие изменения при переходе от вещественных функций к комплексным, следующие:

1. **теорема косинусов.** 

или в более общем виде

. (9.1)

2. **Обобщенная теорема Пифагора.** Если , то

.

Доказать свойства 1 и 2 следует самостоятельно.

3. **Неравенство Коши – Буняковского.** Если функции  и  непрерывны, то .

В самом деле, если , то  на , и доказываемое неравенство выполняется. Пусть . Число  очевидно, не отрицательно. С другой стороны, по формуле (9.1), где  и , имеем



.

Таким образом, , а так как , то , что и требовалось доказать.

Пусть теперь система комплексных функций

 (9.2)

ортогональна на промежутке . Сопоставим функции  ее ряд Фурье

 (9.3)

где коэффициенты Фурье

.

Введем обозначения:  – частичная сумма ряда Фурье;  – произвольная линейная комбинация функций  где .

Тогда, так же, как для вещественных функций (см. § 3), выполняется неравенство

 (9.4)

где , причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда , т.е. среди всех функций  функция  дает наилучшее среднеквадратическое приближение к функции .

Сходимость ряда в среднем и замкнутость системы функций определяются точно так же, как в § 3:

а) если для некоторой функции  выполняется равенство Парсеваля

, (9.5)

то ряд (9.3) сходится в среднем к , т.е. ;

б) ортогональная система функций (9.2) называется замкнутой на промежутке , если равенство Парсеваля выполняется для каждой функции из .

Введем в рассмотрение систему комплексных функций

. (9.6)

***Свойства системы функции*** (9.6) следующие:

1. .

2. Функции  являются 2*L*-периодичными:  .

3. Система функций (9.6) ортогональна на промежутке [–*L*, *L*]. Действительно, при 



.

Здесь использована формула .

4. .

Ряд Фурье для функции  по системе функций (9.6) имеет вид

, (9.7)

где коэффициенты Фурье

. (9.8)

Система функций (9.6) замкнута на [–*L*, *L*] (принимаем без доказательства), поэтому для нее справедливы следующие утверждения:

а) ряд (9.7) сходится в среднем к ,

б) для любой функции из  выполняется равенство Парсеваля ,

в) среднеквадратическая погрешность, возникающая при замене функции  частичной суммой  ее ряда Фурье,

.

**Теорема Дирихле.** Если вещественная и мнимая части функции  удовлетворяют на промежутке [–*L*, *L*] условиям Дирихле, то функция  является суммой своего ряда Фурье:

. (9.9)

При этом предполагается, что действуют прежние соглашения относительно значений функции в точках разрыва и на концах промежутка (см. § 3).

Упражнение 1. Доказать справедливость формулы (9.4). Доказать, что из (9.4) следует неравенство Бесселя .

Упражнение 2. Доказать справедливость утверждений 1, 2 и 4.

**§ 10. Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье**

Пусть вещественная функция  удовлетворяет условиям Дирихле на промежутке [–*L*, *L*]. Запишем ее разложение в тригонометрический ряд Фурье:

, (10.1)

где



. (10.2)

Если в (10.1) выразить  и  через показательную функцию от мнимого аргумента:

 

то получим ряд

, (10.3)

где в силу (10.2)

;

;



=

Последние три формулы можно объединить:

. (10.4)

Ряд (10.3) с коэффициентами (10.4) называется тригонометрическим рядом Фурье в комплексной форме.

**Пример 1.** Разложить функцию , где  – комплексное число, в ряд Фурье на промежутке .

***Решение***. Найдем коэффициенты Фурье:



.

Поскольку , то

, 

=.

Искомое разложение будет иметь вид

, (10.5)

где учтено, что

.

Применяя к ряду (10.5) равенство Парсеваля

, (10.6)

можно найти сумму еще одного числового ряда. Действительно, в нашем случае

;

.

Тогда из (10.6) следует

.

Упражнение 1. Доказать, что

; .

Указание. Положить в (10.5) *х* = 0 и *х* = π.

Упражнение 2. Доказать, что при 

; .

**Глава 2. Интеграл Фурье**

**§ 11. Сходимость интеграла Фурье**

Пусть функция  определена на всей числовой оси. Считая, что на произвольном конечном промежутке [–*L*, *L*] заданная функция удовлетворяет условиям Дирихле, представим ее тригонометрическим рядом Фурье в комплексной форме:

, (11.1)

где

; (11.2)

 *–* частота *k*-й гармоники;  .

Введя в (11.1) выражения (11.2), получим

. (11.3)

При  величина . Правая часть формулы (11.3) аналогична интегральной сумме для функции  по переменной ω в промежутке . Поэтому можно ожидать, что после перехода в (11.3) к пределу при  вместо ряда получим интеграл

. (11.4)

Формула (11.4) называется интегральной формулой Фурье, а ее правая часть – интегралом Фурье.

Рассуждения, с помощью которых получена формула (11.4), не являются строгими и имеют лишь наводящий характер. Условия, при которых справедлива интегральная формула Фурье, устанавливает теорема, принимаемая нами без доказательства.

**Теорема.** Пусть функция , во-первых, абсолютно интегрируема на промежутке , т.е. интеграл  сходится, и, во-вторых, удовлетворяет условиям Дирихле на каждом конечном промежутке (–*L*, *L*). Тогда интеграл Фурье сходится (в смысле главного значения) всюду к , т.е. равенство (11.4) выполняется при всех *х* из промежутка . Здесь, по-прежнему, предполагается, что в точке разрыва значение функции равно полусумме ее односторонних пределов в этой точке.

**§ 12. Преобразование Фурье**

Интегральную формулу Фурье (11.4) преобразуем следующим образом. Положим

. (12.1)

Если функция  непрерывна и абсолютно интегрируема на всей оси, то функция непрерывна на промежутке . Действительно, так как , то

, (12.2)

и, поскольку интеграл справа сходится, то сходится интеграл слева. следовательно, интеграл в (12.1) сходится абсолютно. Равенство (12.2) выполняется одновременно для всех , поэтому интеграл (12.1) сходится равномерно относительно ω. Отсюда и следует, что функция  непрерывна (точно так же, как из равномерной сходимости ряда, составленного из непрерывных функций, следует непрерывность его суммы).

Из (11.4) получим

. (12.3)

Комплексная функция , определяемая формулой (12.1), называется преобразованием Фурье или Фурье-образом функции . В свою очередь, формула (12.3) определяет  как обратное преобразование Фурье, или прообраз функции . Равенство (12.3) при заданной функции  можно рассматривать, как интегральное уравнение относительно функции , решение которого дается формулой (12.1). И, наоборот, решение интегрального уравнения (12.1) относительно функции  при заданной  дает формула (12.3).

В формуле (12.3) выражение  задает, условно говоря, пакет комплексных гармоник с частотами, непрерывно распределенными на промежутке  и суммарной комплексной амплитудой . Функция   называется спектральной плотностью. Формулу (12.2), записанную в виде

,

можно трактовать, как разложение функции  в сумму пакетов гармоник, частоты которых образуют сплошной спектр, распределенный на промежутке .

**Равенства Парсеваля.** Пусть и  – Фурье-образы вещественных функций  и  соответственно. Тогда

; (12.4)

, (12.5)

т.е. скалярные произведения и нормы функций являются инвариантами преобразования Фурье. Докажем это утверждение. по определению скалярного произведения имеем . Заменив функцию  ее выражением (12.3) через Фурье-образ , получим

.

В силу (12.1)

.

Поэтому , т.е. формула (12.4) доказана. Формула (12.5) получается из (12.4) при .

**Косинус- и синус-преобразования Фурье.** Если вещественная функция  четна, то ее Фурье-образ, который здесь будем обозначать , также является вещественной четной функцией. Действительно,



.

Последний интеграл, вследствие нечетности подынтегральной функции, обращается в нуль. Таким образом,

. (12.6)

Здесь использовано свойство (7.1) четных функций.

Из (12.6) следует, что функция  вещественна и четным образом зависит от ω, так как ω входит в (12.6) только через косинус.

Формула (12.3) обратного преобразования Фурье в этом случае дает



=.

Так как и  – соответственно четная и нечетная функции переменной ω, то

. (12.7)

Формулы (12.6) и (12.7) определяют косинус-преобразование Фурье.

Аналогично, если вещественная функция  нечетна, то ее преобразование Фурье , где  – вещественная нечетная функция от ω. При этом

; (12.8)

. (12.9)

Равенства (12.8), (12.9) задают синус-преобразование Фурье.

Заметим, что в формулы (12.6) и (12.8) входят значения функции  только для . Поэтому косинус- и синус-преобразования Фурье можно применять и к функции, определенной на полубесконечном промежутке . В этом случае при  интегралы в формулах (12.7) и (12.9) сходятся к заданной функции, а при  к ее четному и нечетному продолжениям соответственно.

Покажем, как с помощью преобразования Фурье вычисляются некоторые несобственные «неберущиеся» интегралы.

**Пример 1.** Вычислить интеграл Лапласа .

***Решение.*** Найдем Фурье-образ функции  где :





.

С помощью формулы обратного преобразования Фурье



получим



или

.

Здесь первое слагаемое представляет собой удвоенный интеграл Лапласа, а второе равно нулю вследствие нечетности подынтегральной функции. Поэтому

.

**Пример 2.** Вычислить разрывной множитель Дирихле , если .

***Решение.*** Применив косинус-преобразование Фурье к четной функции



получим

;

.

Таким образом,



В частности интеграл Дирихле

.

**Пример 3.** Вычислить интеграл Эйлера-Пуассона .

***Решение.*** Сначала вычислим интеграл , применив к функции , где , преобразование Фурье и введя замену 



=;



.

Отсюда , и, следовательно, с заменой  можно записать

.

Упражнение 1. Используя равенство Парсеваля, вычислить интегралы

; .

Упражнение 2. Доказать, что

,

используя равенство Парсеваля.

**§ 13. Основные сведения из теории преобразования Фурье**

Тот факт, что функция  является Фурье-образом функции , будем обозначать в дальнейшем одним из следующих способов: .

***Свойства преобразования Фурье:***

1. **Теорема линейности.**  , где . Это свойство сразу следует из определения (12.1) и линейности операции интегрирования.

2. **Теорема подобия.** , где . Обозначив , получим



3. **Теорема смещения.** , где . Введя замену , получим



.

*Следствие*.

, (13.1)

где . Действительно,



.

4. **Теорема о свертке.** Напомним, что сверткой абсолютно интегрируемых функций  и  называется функция

.

Фурье-образ свертки функций *f* и *g* равен произведению их Фурье-образов, умноженному на : .

Так как по определению



,

то, выполнив во внутреннем интеграле замену , получим

=

==,

что и требовалось доказать.

5. **Теорема об образе производной.** Пусть функция  и ее производная  абсолютно интегрируемы на промежутке . По формуле Ньютона – Лейбница

.

Так как производная  интегрируема на всей оси, интеграл в правой части последнего равенства имеет конечный предел при . Следовательно, существует конечный предел  . При этом , ибо в противном случае функция  была бы неинтегрируемой на промежутке . Точно также доказывается, что .

Введем в рассмотрение Фурье-образ производной

.

Выполнив интегрирование по частям, получим

.

Так как внеинтегральный член равен нулю, то

.

Таким образом, операции дифференцирования функции  соответствует операция умножения ее Фурье-образа на множитель . Аналогично, если функция  имеет абсолютно интегрируемые производные до *n-*го порядка включительно, то



, .

*Следствия*. 1. Обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами преобразованием Фурье переводится в линейное алгебраическое уравнение.

2. Линейное уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами и с двумя независимыми переменными преобразованием Фурье по одной из переменных переводится в обыкновенное линейное дифференциальное уравнение.

**Пример 1.** Доказать, что

, (13.2)

где .

***Решение.*** Положим



Тогда





Таким образом,

,

и по теореме о свертке



.

**Пример 2.** Найти решение уравнения

 (13.3)

при , удовлетворяющее начальному условию

. (13.4)

Замечание. Уравнение (13.3) называется уравнением теплопроводности. Уравнениями такого вида описываются одномерные процессы диффузии, переноса тепла и т.п.

***Решение.*** Применим к уравнению (13.3) преобразование Фурье. Для этого, умножив обе части уравнения на , проинтегрируем его по *х* от  до . Тогда



или

, (13.5)

где  – Фурье-образ функции .

Здесь использовалась формула для Фурье-образа производной второго порядка:

.

Равенство (13.5) – это обыкновенное линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции  переменной *t*, где ω – параметр.

Переходя к Фурье-образам в равенстве (13.4), получим начальное условие для уравнения (13.5):

. (13.6)

Решением задачи Коши (13.5), (13.6) является функция

.

С помощью (12.3) находим  – прообраз функции :

. (13.7)

Последний интеграл в (13.7) равен . Поэтому

.

По теореме о свертке

,

или

. (13.8)

Решение уравнения теплопроводности, записанное в виде (13.8), называется интегралом Пуассона.

**Пример 3.** Найти решение волнового уравнения

, (13.9)

удовлетворяющее начальным условиям

. (13.10)

Замечание. Задача Коши (13.9),(13.10) является математической моделью одномерных волновых процессов в сплошных безграничных средах. Поле возмущений в среде, выведенной из равновесного состояния, описывается функцией , физический смысл которой определяется спецификой рассматриваемой задачи. В задаче о малых поперечных колебаниях струны  – это отклонение струны от ее равновесного положения, функции ϕ(*х*) и  задают соответственно форму струны и распределение скоростей ее точек в начальный момент времени. Константа , где и ρ – натяжение и плотность струны в положении равновесия. В задачах акустики  – скорость возмущенного движения в точке  в момент времени ;  – скорость звука в невозмущенной среде и т.д.

***Решение.*** Преобразуя по Фурье уравнение (13.9) и начальные условия (13.10), получим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:



где ω – параметр.

Решение задачи имеет вид



Используя (13.1) и (13.2), получим формулу Эйлера – Даламбера

 (13.11)

Для выяснения физического смысла полученного решения преобразуем формулу (13.11). Положим

.

Тогда

. (13.12)

При  возмущение  сохраняет постоянное значение , если переменные  и  связаны зависимостью: . Иными словами, возмущенное состояние  переносится в положительном направлении оси абсцисс со скоростью . Поэтому говорят, что функция  определяет бегущую волну, перемещающуюся вправо со скоростью *а*. Аналогично, функция  задает волну, распространяющуюся влево с той же скоростью *а*. Таким образом, выяснен физический смысл постоянной величины *а* в уравнении (13.9): *а* – это скорость распространения возмущений в среде.

Из формулы (13.12) следует, что возмущение в точке *х* в момент времени  есть результат сложения волн  и , вышедших в момент времени  из точек с координатами  и  соответственно.

Итак, при весьма общих предположениях установлено следующее:

1. Произвольную функцию  можно представить в виде «суммы» гармоник; если  задана на конечном интервале (или периодическая), то эта сумма представляет собой ряд Фурье; если  задана на всей числовой оси (но непериодическая), то эта сумма – интеграл Фурье. С точки зрения приложений, это означает, что самые разнообразные физические зависимости, скажем, давления, тока, напряжения и т.д. от времени можно представить в виде линейной суперпозиции гармонических колебаний.

2. В представлении формулы  в виде ряда или интеграла Фурье естественно возникает ее спектр, который однозначно определяется по функции  и который, в свою очередь, однозначно определяет саму функцию .

3. Результаты спектрального анализа, т.е. процесса нахождения спектра той или иной зависимости, используются при исследовании линейных систем, так как в этом случае достаточно изучить поведение системы при воздействии на нее гармонических колебаний, а затем просуммировать результаты этих воздействий с учетом спектра рассматриваемого (уже произвольного) воздействия.

Упражнение. Доказать, что, если на всей оси функция ψ(*х*) дифференцируема, а ϕ(*х*) – дважды дифференцируема, то функция (13.11) действительно удовлетворяет уравнению (13.9) и начальным условиям (13.10).

**Глава 3. Операционное исчисление**

**§ 14. Преобразование Лапласа**

**Понятие оригинала.** Кусочно-непрерывная функция  называется оригиналом, если выполняются следующие условия:

1)  для всех отрицательных *t*;

2) при  растет не быстрее экспоненты, т.е. существуют такие постоянные *M* > 0 и *c* > 0, что  для всех *t*.

Число *с* называется показателем роста . очевидно, что для ограниченных оригиналов показатель роста можно считать равным нулю.

Простейшим оригиналом является единичная функция Хевисайда



Если функция  удовлетворяет условию 2 и не удовлетворяет 1, то произведение будет удовлетворять и условию 1, т.е. будет оригиналом. Для упрощения записи будем, как правило, множитель *Η*(*t*) опускать, считая, что все рассматриваемые в этой главе функции равны нулю при отрицательных значениях *t*.

Легко видеть, что оригиналами являются такие функции, как  и т.п.

Можно доказать, что сумма, разность и произведение оригиналов являются оригиналами и что оригиналом является функция  при  (доказательства следует найти самостоятельно).

**Замечание.** Из этих утверждений следует, что многочлены произвольной степени , а также функции вида  являются оригиналами.

**Интеграл Лапласа.** Интегралом Лапласа для оригинала *f*(*t*) называется несобственный интеграл вида

, (14.1)

где  – комплексный параметр.

**Теорема.** Интеграл Лапласа абсолютно сходится в полуплоскости П*с*: , где *с* – показатель роста *f*(*t*). В самом деле, по определению оригинала имеем . Таким образом, интеграл (14.1) мажорируется сходящимся интегралом , и, следовательно, сходится абсолютно в П*с*.

**Замечание.** При доказательстве теоремы получено используемое в дальнейшем неравенство:

 (14.2)

**Преобразование Лапласа.** Интеграл Лапласа

 (14.3)

представляет собой функцию параметра *p*, определенную в полуплоскости П*с*:. Функция  называется Лаплас-образом (изображением по Лапласу) оригинала . Тот факт, что  есть Лаплас-образ , обозначается  или .

Соотношение (14.3), устанавливающее связь между оригиналом и его Лаплас-образом, называется преобразованием Лапласа.

***Свойства преобразования Лапласа*** следующие:

1. **Теорема линейности.** При любых постоянных  и 

.

Это утверждение вытекает из определения (14.3) и свойств интегралов.

2. Имеет место , что непосредственно следует из неравенства (14.2).

3. **Теорема подобия.** Для любого 

.

Действительно, полагая , получим

.

4. **теорема смещения.** Для любого *а* . Действительно,

.

5. **теорема запаздывания.** Для любого   . По определению преобразования Лапласа имеем

.

Здесь учтено, что  при . Выполнив в последнем интеграле замену , получим

.

**Обратное преобразование Лапласа.** Установим связь между преобразованиями Лапласа и Фурье. Так как при  оригинал , то



где   – показатель роста .

Интеграл в правой части последней формулы есть интеграл Фурье для . Таким образом, Лаплас-образ функции  является Фурье-образом функции . Из формулы обратного преобразования Фурье получим, что в точках непрерывности 

.

Отсюда

 (14.4)

Если в точке *t* функция  терпит разрыв, то значение интеграла в (14.4) равно полусумме односторонних пределов  в этой точке.

Формула (14.4) определяет обратное преобразование Лапласа, с помощью которого оригинал однозначно восстанавливается по своему изображению с точностью до значений в точках разрыва.

**§ 15. Изображения простейших функций**

**Единичная функция Хевисайда.** Имеем:



Так как при , то

.

Для функции Хевисайда с запаздывающим аргументом по теореме запаздывания получим



**Экспонента.** По теореме смещения



**Гиперболические и тригонометрические функции.** В силу линейности преобразования Лапласа имеем

;

;

;

.

**Степенная функция с натуральным показателем.** Положим , где . Тогда при 

.

При , поэтому



Отсюда

.

Так как , то



Упражнение 1. Найти, используя теорему смещения, Лаплас-образы оригиналов 

**Периодические функции.** Если оригинал  является Т-периодической функцией, то его изображение по Лапласу

 (15.1)

Действительно, в этом случае

.

Выполнив замену , в силу периодичности  будем иметь



.

Ряд в правой части последнего равенства представляет собой сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем  Так как при  , то ряд сходится, и его сумма равна , откуда и следует доказываемое утверждение.

**Пример.** Найти Лаплас-образ оригинала  с периодом *Т* = 1).

***Решение.*** Имеем



Следовательно, в силу (15.1)

.

**Ступенчатые (кусочно-постоянные) функции.** Ступенчатая функция , где , а числа  образуют возрастающую последовательность, может быть представлена в виде

, ,

где 

Тогда



Упражнение 2. Найти изображение кусочно-постоянной функции 

**Импульсные функции.** Импульсной функцией будем называть функцию вида



где  – функция, определенная для всех 

Используя функцию Хевисайда с запаздывающим аргументом, можем записать

.

Введем функции , где . Тогда  , и по теореме запаздывания

.

**Пример.** Найти Лаплас-образ импульсной функции



***Решение.*** Так как

;

;

,

то

.

**Дельта-функция Дирака.** Рассмотрим семейство ступенчатых импульсных функций

 (15.2)

и семейство их изображений по Лапласу

. (15.3)

При  семейство функций  расходится, так как



Введем условную функцию  – дельта-функцию Дирака, которую будем считать пределом семейства (15.2): . Таким образом, дельта-функция равна нулю всюду, кроме точки , где она равна .

Изображением дельта-функции условимся считать предел семейства (15.3) при :

.

Далее по определению положим

; .

Можно доказать (и это следует сделать самостоятельно) справедливость следующих утверждений:

 (15.4)

 (15.5)

  (15.6)

Выражения (15.5) и (15.6) корректны только при условии непрерывности функции *f*(*t*).

Замечание 1. Из утверждения (15.6) следует, что



что полностью соответствует теореме запаздывания.

Замечание 2.В силу (15.4) имеем

.

Таким образом, дельта-функцию формально можно рассматривать как производную единичной функции Хевисайда.

В прикладных дисциплинах дельта-функции широко используются для моделирования ударных сил, сосредоточенных нагрузок и тому подобных явлений.

**§ 16. Основные теоремы операционного исчисления**

**Свертка оригиналов.** Сверткой оригиналов  и  называется функция

.

Функции *f* (*t*) и *g*(*t*) называются компонентами свертки.

Найдем для примера свертку произвольного оригинала  и единичной функции  Имеем . Так как  при  то

. (16.1)

Доказать, что свертка оригиналов – оригинал и что свертка коммутативна, т.е. , следует самостоятельно.

**Теорема 1.** Если  и , то

.

Действительно, по определению (14.3) имеем



,

где *D* – треугольная область, задаваемая системой неравенств



Изменив порядок интегрирования в двойном интеграле, получим

.

Введем вместо *t* новую переменную . Тогда



,

что и требовалось доказать.

**Пример 1.** Найти оригинал , если его Лаплас-образ .

***Решение.*** Представим данный Лаплас-образ в виде произведения двух изображений, для которых известны оригиналы:

.

Так как

,

то по теореме 1 имеем



.

Упражнение 1. Доказать, что свертка линейна по каждой компоненте:

,

где *а* и *b* – постоянные.

Упражнение 2. Найти свертку функций  и .

**Интегрирование и дифференцирование оригиналов.** Для интегрирования и дифференцирования оригиналов справедливы следующие теоремы.

**Теорема 2.** Если  то .

Для доказательства используем формулу (16.1) и теорему 1. Тогда

.

**Теорема 3.** Если и  – оригиналы и, то

. (16.2)

В самом деле, исходя из формулы Ньютона – Лейбница, в силу (16.1) будем иметь

.

Тогда по теореме 1

.

Отсюда , что и требовалось доказать.

Применив формулу (16.2) дважды, получим





и т.д. В частности, если , то , т.е. в этом случае дифференцирование оригинала сводится к умножению его изображения на *p*.

**Дифференцирование и интегрирование изображений.** Без доказательства примем следующие свойства преобразования Лапласа:

1. Если  – оригинал с показателем роста , то его изображение  имеет в области  производные любых порядков.

2. При том же условии пределы, производные и интегралы от  в области  можно находить, выполняя соответствующие операции под знаком интеграла (14.3).

**Теорема 4.** Если , то , т.е. дифференцирование изображения сводится к умножению оригинала на . Действительно, дифференцируя (14.3) по параметру *p*, получим

.

Справа стоит интеграл Лапласа для функции , следовательно,

,

что и требовалось доказать.

Применив несколько раз теорему 4, получим

.

**Теорема 5.** Если  – оригиналы и , то

,

т.е. интегрирование изображения в указанных пределах сводится к делению оригинала на . Так как в силу (14.3) имеем , то



.

Поскольку при  и , то

.

Рассмотрим функции

.

По теореме 4 имеем



.

Так как , то по теореме 5

.

Точно так же получим

.

Применяя теорему 2, найдем изображение интегрального синуса

.

Следствия из теорем 1-5 приведем с доказательствами.

*Следствие* 1. Если сходится интеграл

, (16.3)

то

. (16.4)

Из сходимости интеграла (16.3) следует, что изображение  непрерывно в замкнутой области . Переходя к пределу в (14.3) при , приходим к требуемому результату.

*Следствие* 2. Если сходится интеграл , то

.

Так как , то в силу (14.4)

.

Для  справедливо равенство

.

*Следствие* 3. Если  – оригиналы, то . Действительно, по теореме 3

. (16.5)

С другой стороны,  (см. § 14). Переходя к пределу в (16.5) при , получим требуемый результат.

*Следствие* 4. Если  – оригиналы и существует конечный предел , то

. (16.6)

Исходим из равенства

. (16.7)

В силу (14.4) и теоремы 3

. (16.8)

Из (16.7) и (16.8) получаем (16.6).

Формула (16.6) позволяет исследовать поведение оригиналов при , имея в своем распоряжении только их изображения.

Упражнение. Вычислить несобственный интеграл , где .

**§ 17. Формула разложения Хевисайда**

Пусть изображение функции представляет собой дробно-рациональную функцию.

**Теорема.** Пусть, где и  – дифференцируемые функции. Введем  как полюсы функции , т.е. корни (нули) ее знаменателя. Тогда, если  , получим формулу Хевисайда:

. (17.1)

Доказательство проведем для случая, когда  и  – многочлены степеней *т* и *п* соответственно, при этом *т* < *п*. Тогда  – правильная рациональная дробь. Представим  в виде суммы простейших дробей:

. (17.2)

Отсюда  Коэффициенты  найдем из тождества (17.2), переписав его в виде

,

где

.

Умножим обе части последнего равенства на  и перейдем к пределу при . Учитывая, что  и , получим

,

откуда и следует (17.1). Теорема доказана.

Замечание 1. Если коэффициенты многочленов  и  вещественны, то комплексные корни многочлена  попарно сопряжены. Следовательно, в формуле (17.1) комплексно сопряженными величинами будут слагаемые, соответствующие комплексно сопряженным корням многочлена , и формула Хевисайда примет вид

, (17.3)

где первая сумма распространена на все вещественные корни многочлена , вторая – на все его комплексные корни с положительными мнимыми частями.

Замечание 2. Каждый член формулы (17.1) представляет собой записанное в комплексной форме колебание , где . Таким образом, вещественным корням () соответствуют апериодические колебания, комплексным корням с отрицательными вещественными частями  – затухающие колебания, чисто мнимым корням  – незатухающие гармонические колебания.

Если знаменатель  не имеет корней с положительными вещественными частями , то при достаточно больших значениях  получим установившийся режим:

, (17.4)

где

;

 – чисто мнимые корни многочлена с положительными мнимыми частями.

Колебания, соответствующие корням с отрицательными вещественными частями, экспоненциально затухают при и поэтому не входят в установившийся режим.

**Пример 1.** Найти оригинал изображения

.

***Решение.*** Имеем . Выпишем корни многочлена : .

По формуле (17.1)

.

Здесь , , так как числа  – корни уравнения . Следовательно,

.

**Пример 2.** Найти оригинал изображения

,

где *а* > 0;.

***Решение.*** Здесь функция , помимо очевидного корня , имеет бесконечно много корней, являющихся нулями функции . Решая уравнение , получим , откуда

.

Таким образом, корни знаменателя  имеют вид  и , где 

Далее запишем

;



;



По формуле (17.3) находим оригинал



**§ 18. Операторный метод решения дифференциальных уравнений**

**Дифференциальные уравнения.** Рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения

 (18.1)

(здесь ) с начальными условиями

. (18.2)

Переходя в (18.1) к изображениям, в силу линейности преобразования Лапласа будем иметь

. (18.3)

Изображения производных, используя теорему 3 § 16 и начальные условия (18.2), запишем в виде

. (18.4)

Подставив (18.4) в (18.3), после несложных преобразований получим операторное уравнение

, (18.5)

где  (характеристический многочлен);  .

Из уравнения (18.5) найдем операторное решение

. (18.6)

Решением задачи Коши (18.1), (18.2) является оригинал операторного решения (18.6):



Для задачи Коши  в принятых обозначениях можно записать

;

;

.

Операторное уравнение имеет вид

.

разложим операторное решение на простейшие дроби:



.

С помощью формул, полученных в § 15, получим оригиналы:

.

Таким образом, решение задачи Коши будет иметь вид

.

**Пример 1.** Решить задачу Коши для дифференциального уравнения с начальными условиями , где .

***Решение.*** Запишем операторное уравнение

.

Его решение имеет вид

.

Используя теорему 2 § 16, последовательно найдем:





.

**Пример 2.** Решить задачу Коши для дифференциального уравнения  с нулевыми начальными условиями, где  – ступенчатая импульсная функция.

***Решение.*** Запишем операторное уравнение



и его решение

.

Из теоремы 2 § 16 следует

;

в соответствии с теоремой запаздывания (§ 15)

.

Окончательно,

.

**Пример 3.** На точку массой *т*, прикрепленную к пружине жесткостью *с* и находящуюся на гладкой горизонтальной плоскости, действует периодически меняющаяся сила . В момент времени τ точка подверглась удару, несущему импульс . Пренебрегая сопротивлением, найти закон движения точки, если в начальный момент времени она покоилась в начале координат.

***Решение.*** Уравнение движения запишем в виде

,

где  – упругая сила;  – функция Дирака. Решим операторное уравнение

,

где . При 



.

Если  (случай резонанса), то

.

По теореме запаздывания

.

Окончательно,



**Интеграл (формула) Дюамеля.** Рассмотрим задачу Коши для уравнения (18.1) при начальных условиях  . Операторное решение в этом случае имеет вид

.

Пусть весовая функция  – оригинал для . тогда по теореме 1 § 16 получим

. (18.7)

Соотношение (18.7) называется интегралом (формулой) Дюамеля.

Замечание. При ненулевых начальных условиях формула Дюамеля непосредственно неприменима. В этом случае необходимо предварительно преобразовать исходную задачу к задаче с однородными (нулевыми) начальными условиями. Для этого введем новую функцию , полагая

 (18.8)

где  – начальные значения искомого решения .

Как легко видеть, , и следовательно, .

Таким образом, функция  – решение уравнения (18.1) с правой частью , полученной в результате подстановки (18.8) в (18.1), при нулевых начальных данных.

Используя (18.7), найдем  и  .

**Пример 4.** С помощью интеграла Дюамеля найти решение задачи Коши



с начальными условиями .

***Решение.*** Начальные данные ненулевые. Полагаем, в соответствии с (18.8), . Тогда  , и для определения  получим уравнение  с однородными начальными условиями.

Для рассматриваемой задачи характеристический многочлен , весовая функция . По формуле Дюамеля



.

Окончательно,

.

**Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** Задача Коши для системы линейных дифференциальных уравнений в матричной записи имеет вид

, (18.9)

где  – вектор искомых функций;  – вектор правых частей;  – матрица коэффициентов;  – вектор начальных данных.

Переходя в (18.9) к изображениям, получим операторную систему

, (18.10)

где  – Лаплас-образы векторов искомых функций и правых частей соответственно.

Из (18.10) находим операторное решение

, (18.11)

где ; *Е* – единичная матрица.

Оригинал  операторного решения(18.11) является решением исходной задачи Коши (18.9).

Обозначим  весовую матрицу, т.е. матрицу-оригинал для , где  Тогда из (18.11) в соответствии с теоремой 1 § 16 будем иметь

. (18.12)

При нулевых начальных условиях

. (18.13)

Соотношение (18.13) представляет собой матричный аналог интеграла Дюамеля.

**Пример 5.** Найти решение задачи Коши



с начальными условиями .

***Решение.*** Запишем систему и начальные условия в матричной форме:

,

где . Тогда



;





.

Окончательно, по формуле (18.12) получим



или



Замечание. Формулы (18.12) и (18.13) имеют большое теоретическое значение, поскольку позволяют исследовать поведение решения системы дифференциальных уравнений в зависимости от начальных данных и правых частей. Однако для практического применения эти формулы мало пригодны, так как зачастую требуют проведения громоздких выкладок, связанных с вычислением обратных матриц, матричных сверток и т.п. Поэтому на практике обычно применяют операторный метод, не переходя к матричной записи системы уравнений, а при решении операторной системы используют конкретные особенности исследуемой задачи.

**Пример 6.** Решить задачу Коши:



с начальными условиями .

***Решение.*** Перейдем в данной системе к изображениям. С учетом начальных условий будем иметь



Запишем решение операторной системы

.

Тогда

.

**§ 19. Приложения**

**Электрические цепи.** Основными элементами электрических цепей являются сопротивления, индуктивности и емкости (конденсаторы). Каждый из этих элементов называются двухполюсником, поскольку он обладает двумя контактами (полюсами), которые соединяются с полюсами других элементов цепи. Электрическое состояние двухполюсника в каждый момент времени  определяется двумя величинами: силой тока (током) , проходящего через двухполюсник, и падением напряжения (напряжением) на его полюсах. Для каждого двухполюсника функции  и  связаны некоторым соотношением, представляющим собой физический закон, управляющий работой двухполюсника.

Для сопротивления имеет место закон Ома

,

где  – сопротивление двухполюсника.

Для индуктивности справедливо соотношение

,

где  – индуктивность двухполюсника.

Для конденсатора выполняется соотношение

,

где *С* – емкость конденсатора;  – начальный заряд на его обкладках.

В дальнейшем будем считать, что в начальный момент времени  цепь была свободна от токов и зарядов, что соответствует задачам включения.

Если ввести операторный ток  и операторное напряжение  как изображения функций  и  соответственно, то вышеприведенные уравнения, управляющие работой двухполюсников, перейдут в следующие:

.

Последние соотношения могут быть записаны в виде операторного закона Ома

,

где операторное сопротивление (импеданс) в случае активного сопротивления, индуктивности и емкости принято в виде соответственно . Величину, обратную ,  называют операторной проводимостью (адмитансом) двухполюсника.

При последовательном соединении двух двухполюсников с операторными сопротивлениями  и  имеем ;  и , откуда , и следовательно, импеданс цепи . Аналогично, при параллельном соединении двух элементов с адмитансами  и  получим , , , откуда , и следовательно, адмитанс цепи .

Таким образом, в задачах включения операторные сопротивления и проводимости цепей рассчитываются по обычным правилам соединения активных сопротивлений. Например, если цепь состоит из последовательно соединенных сопротивления , индуктивности  и емкости , шунтированной сопротивлением , то ее импеданс .

Если электрическая цепь с адмитансом  включена на эдс , то операторный ток в ней определяется соотношением , .

Как правило, операторная проводимость цепи  представляет собой рациональную дробь, полюсы (корни знаменателя) которой расположены в левой полуплоскости , что, как следует из теоремы Хевисайда, гарантирует устойчивость системы, т.е. исключает возможность возникновения в такой системе незатухающих свободных колебаний.

Если эдс  является ограниченной функцией времени, то полюсы функции  имеют неотрицательные вещественные части, и следовательно (см. замечание 2 к теореме Хевисайда), по истечении достаточно длительного промежутка времени в системе устанавливается стационарный режим, при котором ток

,

где ;  – чисто мнимые полюсы функции  с положительными мнимыми частями;  – мнимая единица. Здесь, как и ранее, предполагаем, что функция  не имеет кратных полюсов.

Представим эдс тригонометрическим рядом Фурье . Тогда

;

;,

следовательно,

.

Положим

,

где  – амплитуда гармоники с частотой , β*k* – ее начальная фаза;

; γ. Тогда

. (19.1)

Функции  и  называются амплитудно-частотной (АЧХ) и фазочастотной характеристиками (ФЧХ) системы.

Будем трактовать функции  и , как входной и выходной сигналы соответственно. Из формулы (19.1) следует, что, если на вход системы поступает сигнал с частотой ω, амплитудой *а* и начальной фазой β, то по завершении переходных процессов на выходе формируется сигнал той же частоты ω с амплитудой  и с фазой, сдвинутой относительно фазы входного сигнала на величину. Таким образом, амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики представляют собой соответственно коэффициент усиления (ослабления) и сдвиг фазы сигнала при его прохождении через систему. То значение ω, при котором АЧХ  достигает максимума, называется резонансной частотой системы.

**Пример.** Колебательный контур состоит из последовательно соединенных активного сопротивления , индуктивности  и емкости *C*. Найти резонансную частоту.

***Решение.*** Импеданс контура, его адмитанс . Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики соответственно



;

. (19.2)

Из формулы (19.2) следует, что АЧХ достигает наибольшего значения, если .

Таким образом, колебательный контур резонирует на частоту , наибольший коэффициент усиления сигнала равен , сдвиг фазы на резонансной частоте равен нулю.

**Расчет длинных электрических линий.** Обозначим  – удельные сопротивление, индуктивность и емкость провода соответственно;  – коэффициент утечки тока;  и  – ток и напряжение в точке с координатой *х* в момент времени . Тогда для участка линии между точками *х* и  по известным законам физики будем иметь

;

. (19.3)

Разделив уравнения (19.3) на Δ*х* и перейдя к пределу при Δ*х* → 0, получим систему уравнений в частных производных (телеграфную систему) для определения функций  и :

;

. (19.4)

Для завершения постановки задачи систему (19.4) необходимо дополнить начальными и краевыми условиями. В задаче включения начальные условия имеют вид

. (19.5)

Далее примем, что правый конец провода заземлен, а на левом его конце поддерживается заданное напряжение . Тогда краевые условия запишутся в виде

, (19.6)

где  – длина линии.

Применяя к системе (19.4) преобразование Лапласа по переменной  с учетом начальных условий (19.5), получим операторную систему

, (19.7)

где  и  – изображения напряжения и тока соответственно. Краевые условия (19.6) перейдут в

, (19.8)

где .

Применяя снова преобразование Лапласа, на этот раз по переменной *х*, вместо (19.7) запишем алгебраическую систему

; , (19.9)

где ; ; ;  – параметр преобразования Лапласа по переменной *х*.

В дальнейшем, чтобы избежать громоздких выкладок, ограничимся исследованием установившегося режима в линии без искажений, т.е. линии, параметры которой удовлетворяют условию .

Решение системы (19.9) для линии без искажений имеет вид

,

где .

Возвратимся к оригиналам:

;

. (19.10)

С помощью второго из краевых условий (19.8) найдем

. (19.11)

Из (19.10) и (19.11) следует, что

;

. (19.12)

При отыскании функций  и  будем использовать теорему разложения Хевисайда, для чего необходимо найти полюсы изображений (19.12). Нули гиперболического синуса определяются из уравнения , откуда  и ,  Следовательно, нули функции  – это числа , расположенные в левой полуплоскости . Поэтому, если  – ограниченная функция, то, как следует из (19.12), напряжение и ток в установившемся режиме соответственно





где  – чисто мнимые полюсы функции  с положительными мнимыми частями.

В частности, если , то , и следовательно, в установившемся режиме

;

.

**Примеры для самостоятельного решения**

**Задание 1**. Разложить в ряд Фурье функции, заданные на интервале [–π, π]:

1. 2.

3.. 4..

5. 6.

7. 8.

9.

10.

11.  12.

13.  14.

15.  16. 

17.  18. 

19. 20. 

21. 

22. 

23. 

24. 

25. 26.

27.  28.

29. 30.

31. 

**Задание 2**. Разложить в ряд Фурье функции, заданные на интервале :

1.  2.

3.  4. 

5.  6. 

7.  8. 

9. 

10. 

11. 

12. 

13. 14.

15. 16.

17. 18.

19. 20.

21.  22. 

23.  24. 

25. 26. 

27.  28. 

29  30. =

Указание. Для решения примера 15 воспользоваться формулами [6]





**Задание 3**. Представить интегралом Фурье следующие функции:

1. 2.

3. 4.

5. 6.

7. 8.

9. 10.

11. 12.

13.. 14.. 15..

16.. 17.. 18..

Указание. При решении следует воспользоваться формулами

;

;

 ;

 ;

;

.

**Задание 4**. Найти косинус-преобразование Фурье  следующих функций:

1. 2.. 3..

4.. 5..

**Задание 5**. Найти синус-преобразование Фурье  следующих функций:

1.  2.

3. 4..

5. . 6. . 7. .

**Ответы**

**Задание 1**

1. . 2. .

3. . 4. .

5. . 6. .

7. .

8. .

9. .

10. .

11. .

12. .

13. . 14. .

15. . 16. .

17. . 18. .

19. .

20. .

21. .

22. .

23. .

24. . 25. .

26..

27. .

28. .

29. .

30. .

31. .

**Задание 2**

.

2. .

3. .

4. .

5. . 6. . 7. .

8. 

.

9. .

10. . 11. .

12. .

13. .

14. .

15. .

16. . 17. 

18. . 19. .

20. .

21. .

22. . 23. .

24. . 25. .

26. .

27. .

28. .

29. .

30. .

**Задание 3**

1. .

2. .

3. .

4. .

5. .

6. . 7. .

8. . 9. . 10. .

11. . 12. . 13. .

14. . 15. . 16. .

17. . 18. .

**Задание 4**

1. . 2. .

3. . 4. . 5. .

**Задание 5**

1. . 2. .

3. . 4. .

5. . 6.. 7..

**Рекомендательный библиографический список**

**Основной:**

1. *Демидович Б.П*. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1972.

2. *Пискунов Н.С*. Дифференциальное и интегральное исчисления. Часть II. М.: Наука, 1985.

3. *Шипачев В.С*. Высшая математика. М.: Высшая школа, 1998.

**Дополнительный:**

4. *Данко П.В*. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.В.Данко, А.Г.Попов, Г.Н.Кожевникова. М.: Высшая школа, 1997. т.2.

5. *Минорский В.П*. Сборник задач по высшей математике. М.: Наука, 1987.

6. *Прудников А.П.* Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. М.: Наука, 1981.

**Оглавление**

Введение

Глава 1. Ряды Фурье

§ 1. Векторные пространства

§ 2. Скалярное произведение и норма функций

§ 3. Ортогональные системы функций. Коэффициенты Фурье. Ряд Фурье

§ 4. Сходимость в среднем. Равенства Парсеваля

§ 5. Тригонометрический ряд Фурье на промежутке [–*L*, *L*]

§ 6. Сходимость тригонометрического ряда Фурье. Теорема Дирихле

§ 7. Разложение в тригонометрические ряды четных и нечетных функций

§ 8. Ряд Фурье для функции, заданной на промежутке [0, *L*]

§ 9. Ряды Фурье для комплексных функций

§ 10. Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье

Глава 2. Интеграл Фурье

§ 11. Сходимость интеграла Фурье

§ 12. Преобразование Фурье

§ 13. Основные сведения из теории преобразования Фурье

Глава 3. Операционное исчисление

§ 14. Преобразование Лапласа

§ 15. Изображения простейших функций

§ 16. Основные теоремы операционного исчисления

§ 17. Формула разложения Хевисайда

§ 18. Операторный метод решения дифференциальных уравнений

§ 19. Приложения

Примеры для самостоятельного решения

Ответы

Рекомендательный библиографический список