Министерство образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Расчётно-графическая работа

по предмету «Оптоэлектроника и квантовые приборы»

Автор: Кориков Константин Константинович
Группа: 3093/2
Факультет: Радиофизический
Преподаватель:
Кузьмин Юрий Игоревич

Санкт-Петербург
2010

Оглавление

1 Техническое задане

- Найти энергии и волновые функции третьего и четвертого стационарных состояний электрона в потенциальной яме следующего вида:

$$\begin{cases} U(x) \to \infty, \text{ при } |x| \geq \dfrac{3a}{2} \\ U(x) = 0, \text{ при } \dfrac{a}{2} < |x| < \dfrac{3a}{2} \\ U(x) = 4U_0, \text{ при } |x| < \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

  Здесь $U_o = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$.

- Построить графики волновых функций этих состояний. Вычислить вероятности обнаружения электрона в каждом из секторов ямы для указанных состояний.

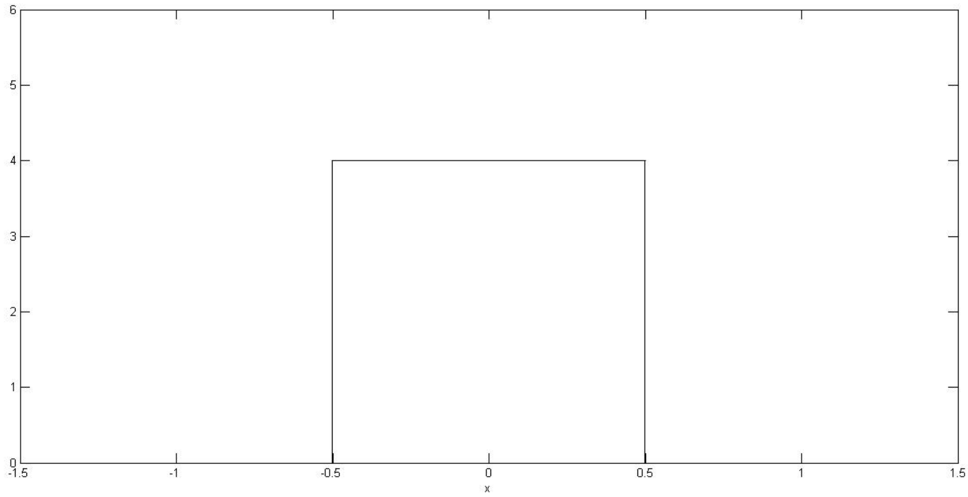

Рис. 1: Потенциальное поле

2 Анализ

Как известно из следствий Лагранжевой механики [2], динамику любой механической системы можно охарактеризовать функцией Гамильтона. Аналогом данной функции в квантовой теории служит оператор $\hat{H}$(Гамильтониан) [3]. При этом состояние физической системы в квантовой механике описывает волновая функция $\Psi(r,t)$ [3], которая в свою очередь определяется волновым уравнением Шрёдингера [4]:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(r,t) = \hat{H}\Psi(r,t) \tag{1}$$

Гамильтониан выражается суммой операторов кинетической и потенциальной энергий электрона в потенциальном поле [3]:

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{U}$$

$$E = \frac{mv^2}{2}\cdot\frac{m}{m} = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow$$

$$\hat{T} = \frac{(\hat{p})^2}{2m} = \{\hat{p} = -i\hbar\nabla\} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$$

$$\hat{U} = U(r)$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(r)$$

Разделим переменные, воспользовавшись методом Фурье:

$$\Psi(r,t) = f(r)\varphi(t)$$

$$i\hbar f(r)\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = \hat{H}f(r)\varphi(t) = \varphi(t)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta f(r) + U(r)f(r)\right) \mid \cdot\frac{1}{f(r)\varphi(t)}$$

$$\frac{i\hbar}{\varphi(t)}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = \frac{1}{f(r)}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta f(r) + U(r)f(r)\right) \tag{2}$$

Поскольку левая часть уравнения (2) зависит только от t, а правая — только от r, обе они должны равняться одной и той же константе разделения:

$$\begin{cases} E = \dfrac{i\hbar}{\varphi(t)}\dfrac{\partial}{\partial t}\varphi(t) \\ E = \dfrac{1}{f(r)}\left(-\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta f(r) + U(r)f(r)\right) \end{cases}$$

В поставленной задаче требуется определить характеристики системы в стационарных состояниях, поэтому практический интерес представляет лишь решение второго уравнения из данной системы, содержащего распределение амплитуды волновой функции.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta f(r) + U(r)f(r) = Ef(r)$$

С учётом того, что потенциальное поле одномерно ($r = x$ и $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$):

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x) + U(x)f(x)}_{\hat{H}f(x)} = Ef(x) \tag{3}$$

Таким образом, решение свелось к известной в матфизике [1] задаче на собственные значения (в одномерном случае: задача Штурма — Лиувилля).

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x) = \big[E - U(x)\big]f(x)$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x) = -\frac{2m}{\hbar^2}\big[E - U(x)\big]f(x)$$
$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\big[E - U(x)\big]f(x) = 0} \tag{4}$$

В квантовой механике на волновую функцию из физических соображений накладывают дополнительные условия [4]:

- Условие нормировки

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2\,dx = 1 \tag{5}$$

Непосредственным интегрированием определим вид функции $\varphi(t)$:

$$\frac{i\hbar}{\varphi(t)}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = E \mid \cdot\frac{\partial t}{i\hbar}$$
$$\int\frac{\partial\varphi(t)}{\varphi(t)} = \int\frac{E}{i\hbar}\partial t$$
$$\ln(\varphi(t)) = \frac{E}{i\hbar}t + C_1$$
$$\varphi(t) = \exp\left(\frac{E}{i\hbar}t\right)\exp\big(C_1\big) = C_2\exp\left(-\frac{iE}{\hbar}t\right)$$

Постоянную интегрирования можно выбрать таким образом, чтобы функция $\Psi(x,t)$ была нормированная.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\varphi(t)|^2\,dx = 1$$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\varphi(t)|^2\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\exp\left(-\frac{iE}{\hbar}t\right)\exp\left(\frac{iE}{\hbar}t\right)dx = 1$$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx = 1 \tag{6}$$

- Условие регулярности

  1. Волновая функция не может принимать бесконечных значений, таких, что интеграл (6) станет расходящимся.

2. Волновая функция должна быть однозначной функцией координат и времени, так как плотность вероятности обнаружения частицы должна определяться однозначно.
3. В любой момент времени волновая функция и её частные производные должны быть непрерывными функциями пространственных координат.

В поставленной задаче потенциальное поле (квантовая яма) аналитически описывается функцией $U(x)$, имеющей симметрию относительно замены $-x$ на x:

$$U(-x) = U(x)$$

При наличии инверсии собственные функции оператора Гамильтона либо автоматически имеют определённую чётность, либо могут быть преобразованы в функции, имеющие определённую чётность [3].

Резюме

1. Решение задачи сводится к решению задачи Штурма — Лиувилля.
2. Решением являются собственные функции $f(x)$ и собственные значения E (энергии) опрератора Гамильтона $\hat{H}$.
3. Однородные граничные условия задачи Штурма — Лиувилля определяются из формы потенциала.
4. Собственные функции $f(x)$ обладают определённой чётностью в том или ином стационарном состояние.
5. Решать задачу можно на половине интервала, перенося решения на оставшуюся часть с помощью симметрии.
6. На функции $f(x)$ накладываются условия регулярности и непрерывности в любом стационарном состояние.

3 Расчёт

- Проанализируем поведение функции $f(x)$ в точках сингулярности $x = \pm\frac{3a}{2}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\big[E - U(x)\big] f(x) = 0$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) - \frac{2m}{\hbar^2}\big[U(x) - E\big] f(x) = 0$$
$$\left\{ y \stackrel{\text{def}}{=} f(x); U(x) \to \infty; æ^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2m}{\hbar^2}\big[E - U(x)\big] \right\}$$
$$y'' - æ^2 y = 0$$
$$\text{Решение в виде } y = e^{kx} : k^2 e^{kx} - æ^2 2 e^{kx} = 0 \Rightarrow k^2 - æ^2 = 0 \Rightarrow k = \pm æ$$
$$y = C_1 e^{æx} + C_2 e^{-æx}$$
$$\text{Из условия регулярности } y : C_1 \to 0 \Rightarrow y = C_2 e^{-æx}$$
$$\text{т.к. } U(x) \to \infty \Rightarrow æ \to \infty \Rightarrow y \to 0$$
$$\boxed{f\left(\pm\frac{3a}{2}\right) = 0} \tag{7}$$

- Рассмотрим решение уравнения вида:

$$y'' + \alpha^2 y = 0 \mid \cdot 2y' \tag{8}$$
$$2y'y'' + 2\alpha^2 y' y = 0$$
$$\big((y')^2\big)' + \alpha^2 (y^2)' = 0$$
$$\left[(y')^2 + \alpha^2 y^2\right]' = 0$$
$$(y')^2 + \alpha^2 y^2 = c_1^2$$
$$y' = \pm\sqrt{c_1^2 - \alpha^2 y^2} \mid \cdot dx$$
$$dy = \pm\sqrt{c_1^2 - \alpha^2 y^2} dx$$
$$\int \frac{dy}{\sqrt{c_1^2 - \alpha^2 y^2}} = \pm \int dx$$
$$\frac{1}{c_1} \int \frac{dy}{\sqrt{1 - (\frac{\alpha}{c_1}) y)^2}} = \pm \int dx$$
$$\frac{1}{c_1} \frac{c_1}{\alpha} \arcsin \frac{\alpha}{c_1} y = \pm x + c_2$$
$$y = \frac{c_1}{\alpha} \sin(\pm\alpha x + \alpha c_2) \Rightarrow y = A \sin(\alpha x + \varphi)$$

- Рассмотрим решение уравнения вида:

$$y'' - \alpha^2 y = 0 \tag{9}$$

$$\text{Решение в виде } y = e^{kx} : k^2 e^{kx} - \alpha^2 2e^{kx} = 0 \Rightarrow k^2 - \alpha^2 = 0 \Rightarrow k = \pm\alpha$$

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$$

$$\big\{e^x = \operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x)\big\}$$

$$y = C_1 \operatorname{sh}(\alpha x) + C_1 \operatorname{ch}(\alpha x) + C_2 \operatorname{sh}(-\alpha x) + C_2 \operatorname{ch}(-\alpha x)$$

$$y = (C_1 - C_2)\operatorname{sh}(\alpha x) + (C_1 + C_2)\operatorname{ch}(\alpha x) = A\operatorname{sh}(\alpha x) + B\operatorname{ch}(\alpha x)$$

- Уравнение (4) для участка $0 < x < \frac{a}{2}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) - \frac{2m}{\hbar^2}\big[U(x) - E\big]f(x) = 0$$

$$\left\{y_1 \overset{\text{def}}{=} f(x); U(x) = 4U_0; \kappa^2 \overset{\text{def}}{=} \frac{2m}{\hbar^2}\big[4U_0 - E\big]\right\}$$

$$y_1'' - \kappa^2 y_1 = 0$$

$$\text{Полученное уравнение типа (9), общее решение: } y_1 = A\operatorname{sh}(\kappa x) + B\operatorname{ch}(\kappa x)$$

$$\text{Если } f(x) \text{ чётная: } y_1'(0) = 0; \text{если } f(x) \text{ нечётная: } y_1(0) = 0$$

$f(x)$ чётная:

$$y_1' = A\kappa\operatorname{ch}(\kappa x) + B\kappa\operatorname{sh}(\kappa x)$$

$$y_1'(0) = A\kappa = 0$$

$$\text{т.к. } \kappa \neq 0 \to A = 0$$

$$\boxed{y_1 = B\operatorname{ch}(\kappa x)} \tag{10}$$

$f(x)$ нечётная:

$$y_1(0) = B = 0$$

$$\boxed{y_1 = A\operatorname{sh}(\kappa x)} \tag{11}$$

- Уравнение (4) для участка $\frac{a}{2} < x < \frac{3a}{2}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\big[E - U(x)\big] f(x) = 0$$

$$\left\{ y_2 \overset{\text{def}}{=} f(x); U(x) = 0; \gamma^2 \overset{\text{def}}{=} \frac{2m}{\hbar^2} E \right\}$$

$$y_2'' + \gamma^2 y_2 = 0$$

Полученное уравнение типа (8), общее решение: $y_2 = D\sin(\gamma x + \varphi_D)$

Из краевых условий: $y_2\left(\pm\frac{3a}{2}\right) = D\sin\left[\gamma\left(\pm\frac{3a}{2}\right) + \varphi_D\right] = 0$

$$\gamma\frac{3a}{2} + \varphi_{D_+} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$-\gamma\frac{3a}{2} + \varphi_{D_-} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\varphi_{D_+} = \pi n - \frac{3a}{2}\gamma, n \in \mathbb{Z}$$

$$\varphi_{D_-} = \pi n + \frac{3a}{2}\gamma, n \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{y_2 = D\sin\left(\gamma x + \pi n \pm \frac{3a}{2}\gamma\right), n \in \mathbb{Z}} \tag{12}$$

- Таким образом, $\Psi(x)$ примет вид:

$$\begin{cases} y_{2_+} = D\sin\big[\gamma\big(x - \frac{3a}{2}\big) + \pi n\big], n \in \mathbb{Z}, \text{ при } \frac{a}{2} < x < \frac{3a}{2} \\ y_{1_+} = B\,\mathrm{ch}(\kappa x), \text{ при } -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2} \\ y_{2_+} = D\sin\big[\gamma\big(x + \frac{3a}{2}\big) + \pi n\big], n \in \mathbb{Z}, \text{ при } -\frac{3a}{2} < x < -\frac{a}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{2_-} = D\sin\big[\gamma\big(x - \frac{3a}{2}\big) + \pi n\big], n \in \mathbb{Z}, \text{ при } \frac{a}{2} < x < \frac{3a}{2} \\ y_{1_-} = A\,\mathrm{sh}(\kappa x), \text{ при } -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2} \\ y_{2_-} = D\sin\big[\gamma\big(x + \frac{3a}{2}\big) + \pi n\big], n \in \mathbb{Z}, \text{ при } -\frac{3a}{2} < x < -\frac{a}{2} \end{cases}$$

- Из условий регулярности $f(x)$ вытекают следующие соотношения:

+ $f(x)$ чётная:

$$y_1\left(\frac{a}{2}\right) = y_2\left(\frac{a}{2}\right)$$
$$B\operatorname{ch}\left(\kappa\frac{a}{2}\right) = D\sin\left(\gamma\frac{a-3a}{2}+\pi n\right), n\in\mathbb{Z}$$
$$y_1'\left(\frac{a}{2}\right) = y_2'\left(\frac{a}{2}\right)$$
$$B\kappa\operatorname{sh}\left(\kappa\frac{a}{2}\right) = D\gamma\cos\left(\gamma\frac{a-3a}{2}+\pi n\right), n\in\mathbb{Z}$$
$$\kappa\operatorname{th}\left(\kappa\frac{a}{2}\right) = \gamma\operatorname{ctg}\left(\gamma\frac{a-3a}{2}+\pi n\right), n\in\mathbb{Z} \mid \cdot a$$
$$\kappa a\operatorname{th}\left(\kappa\frac{a}{2}\right) = -\gamma a\operatorname{ctg}\left(\gamma a\right)$$

Для удобства решения данного трансцендентного уравнения введём переменные:

$$\xi = \kappa a; \eta = \gamma a$$
$$\xi\operatorname{th}\left(\frac{\xi}{2}\right) = -\eta\operatorname{ctg}(\eta) \tag{13}$$

− $f(x)$ нечётная:

$$y_1\left(\frac{a}{2}\right) = y_2\left(\frac{a}{2}\right)$$
$$A\operatorname{sh}\left(\kappa\frac{a}{2}\right) = D\sin\left(\gamma\frac{a-3a}{2}+\pi n\right), n\in\mathbb{Z}$$
$$y_1'\left(\frac{a}{2}\right) = y_2'\left(\frac{a}{2}\right)$$
$$A\kappa\operatorname{ch}\left(\kappa\frac{a}{2}\right) = D\gamma\cos\left(\gamma\frac{a-3a}{2}+\pi n\right), n\in\mathbb{Z}$$
$$\kappa\operatorname{cth}\left(\kappa\frac{a}{2}\right) = \gamma\operatorname{ctg}\left(\gamma\frac{a-3a}{2}+\pi n\right), n\in\mathbb{Z} \mid \cdot a$$
$$\kappa a\operatorname{cth}\left(\kappa\frac{a}{2}\right) = -\gamma a\operatorname{ctg}\left(\gamma a\right)$$

Для удобства решения данного трансцендентного уравнения введём переменные:

$$\xi = \kappa a; \eta = \gamma a$$
$$\xi\operatorname{cth}\left(\frac{\xi}{2}\right) = -\eta\operatorname{ctg}(\eta) \tag{14}$$

- Для решения (13) и (14) рассмотрим ещё одно уравнение:

$$\eta^2 + \xi^2 = (\gamma a)^2 + (\kappa a)^2 = a^2(\gamma^2 + \kappa^2)$$
$$\gamma^2 + \kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E + \frac{2m}{\hbar^2}\left[4U_0 - E\right] = \frac{8m}{\hbar^2}U_0$$
$$\frac{8m}{\hbar^2}U_0 = \frac{8m}{\hbar^2}\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \frac{4\pi^2}{a^2} = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2$$
$$\eta^2 + \xi^2 = a^2\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 = (2\pi)^2$$
$$\xi = \pm\sqrt{(2\pi)^2 - \eta^2} \tag{15}$$

- Подставим (15) в (13)и (14):

$$\sqrt{(2\pi)^2 - \eta^2}\,\mathrm{th}\left(\frac{\sqrt{(2\pi)^2 - \eta^2}}{2}\right) = -\eta\,\mathrm{ctg}(\eta) \text{ (чётные решения)}$$
$$\sqrt{(2\pi)^2 - \eta^2}\,\mathrm{cth}\left(\frac{\sqrt{(2\pi)^2 - \eta^2}}{2}\right) = -\eta\,\mathrm{ctg}(\eta) \text{ (нечётные решения)}$$

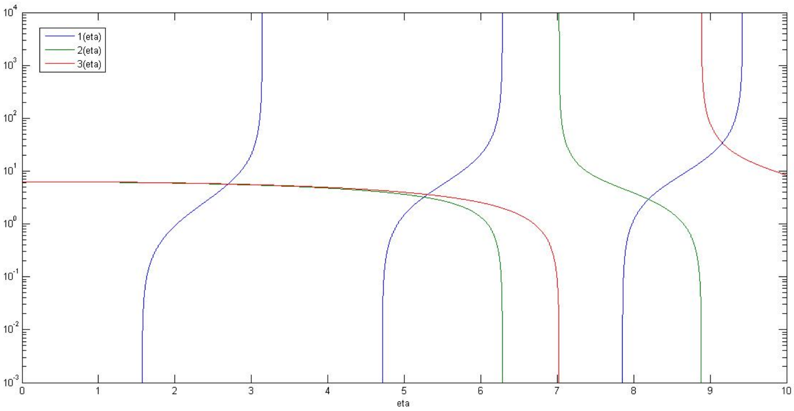

Рис. 2: Решение трансцендентных уравнений

- Решая графически трансцендентное уравнение, находим собственные значения:

$$\eta = \gamma a \Rightarrow \gamma = \frac{\eta}{a}$$
$$\left(\frac{\eta}{a}\right)^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$$
$$\boxed{E = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\eta^2}{a^2}} \tag{16}$$
$$\xi = \kappa a = \sqrt{(2\pi)^2 - \eta^2}$$
$$\kappa = \frac{\sqrt{(2\pi)^2 - \eta^2}}{a}$$

- Введём нормированную координату $z = \frac{x}{a}$ и определим вид собственных функций $f(z)$:

$$\begin{cases} y_{2_+} = D\sin\big[\eta\big(z - \dfrac{3}{2}\big) + \pi n\big], n \in \mathbb{Z}, \text{ при } \dfrac{1}{2} < z < \dfrac{3}{2} \\ y_{1_+} = B\,\mathrm{ch}(\sqrt{(2\pi)^2 - \eta^2}z), \text{ при } -\dfrac{1}{2} \le z \le \dfrac{1}{2} \\ y_{2_+} = D\sin\big[\eta\big(z + \dfrac{3}{2}\big) + \pi n\big], n \in \mathbb{Z}, \text{ при } -\dfrac{3}{2} < z < -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{2_-} = D\sin\big[\eta\big(z - \dfrac{3}{2}\big) + \pi n\big], n \in \mathbb{Z}, \text{ при } \dfrac{1}{2} < z < \dfrac{3}{2} \\ y_{1_-} = A\,\mathrm{sh}(\sqrt{(2\pi)^2 - \eta^2}z), \text{ при } -\dfrac{1}{2} \le z \le \dfrac{1}{2} \\ y_{2_-} = D\sin\big[\eta\big(z + \dfrac{3}{2}\big) + \pi n\big], n \in \mathbb{Z}, \text{ при } -\dfrac{3}{2} < z < -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- Из условия нормировки определим константы A, B и D, для удобства взяв систему с $n = 0$:

$$\int\limits_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} \left| D\sin\big[\eta\big(z + \frac{3}{2}\big)\big] \right|^2 dz + \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| B\,\mathrm{ch}(\sqrt{(2\pi)^2 - \eta^2}z) \right|^2 dz + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left| D\sin\big[\eta\big(z - \frac{3}{2}\big)\big] \right|^2 dz = 1$$

$$\int\limits_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} \left| D\sin\big[\eta\big(z + \frac{3}{2}\big)\big] \right|^2 dz + \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| A\,\mathrm{sh}(\sqrt{(2\pi)^2 - \eta^2}z) \right|^2 dz + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left| D\sin\big[\eta\big(z - \frac{3}{2}\big)\big] \right|^2 dz = 1$$

$$D^2 + \frac{B^2}{2\sqrt{(2\pi)^2 - \eta^2}} \left(\mathrm{sh}(\sqrt{(2\pi)^2 - \eta^2}) + \frac{1}{2} \right) = 1$$

$$D^2 + \frac{A^2}{2\sqrt{(2\pi)^2 - \eta^2}} \left(\mathrm{ch}(\sqrt{(2\pi)^2 - \eta^2}) - \frac{1}{2} \right) = 1$$

Используя уравнения непрерывности, получаем систему для чётных решений:

$$\begin{cases} D^2 + \dfrac{B^2}{2\sqrt{(2\pi)^2 - \eta^2}} \left(\mathrm{sh}(\sqrt{(2\pi)^2 - \eta^2}) + \dfrac{1}{2} \right) = 1 \\ B\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{\sqrt{(2\pi)^2 - \eta^2}}{2} \right) = -D\sin(\eta) \end{cases}$$

И для нечётных решений:

$$\begin{cases} D^2 + \dfrac{A^2}{2\sqrt{(2\pi)^2 - \eta^2}} \left(\mathrm{ch}(\sqrt{(2\pi)^2 - \eta^2}) - \dfrac{1}{2} \right) = 1 \\ A\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{\sqrt{(2\pi)^2 - \eta^2}}{2} \right) = -D\sin(\eta) \end{cases}$$

Численное решение

1. Чётное решение:
   $\eta_3 = 5.261$

2. Нечётное решение:
   $\eta_4 = 5.308$

3. Энергии третьего и четвертого стационарных состояний электрона в потенциальной яме:

$$E_3 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\eta^2}{a^2} = \frac{\eta_3^2}{\pi^2}\cdot U_0 = 2.804\cdot U_0$$
$$E_4 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\eta^2}{a^2} = \frac{\eta_4^2}{\pi^2}\cdot U_0 = 2.855\cdot U_0$$

4. Волновые функции:

3 :

$$\begin{cases} y_{2_+} = -0.911\sin\big[5.261\big(z-\frac{3}{2}\big)\big],\ \text{при}\ \frac{1}{2} < z < \frac{3}{2} \\ y_{1_+} = 0.270\,\mathrm{ch}(3.435z),\ \text{при}\ -\frac{1}{2} \le z \le \frac{1}{2} \\ y_{2_+} = 0.911\sin\big[5.261\big(z+\frac{3}{2}\big)\big],\ \text{при}\ -\frac{3}{2} < z < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

4 :

$$\begin{cases} y_{2_-} = 0.909\sin\big[5.308\big(z-\frac{3}{2}\big)\big],\ \text{при}\ \frac{1}{2} < z < \frac{3}{2} \\ y_{1_-} = 0.290\,\mathrm{sh}(3.361z),\ \text{при}\ -\frac{1}{2} \le z \le \frac{1}{2} \\ y_{2_-} = 0.909\sin\big[5.308\big(z+\frac{3}{2}\big)\big],\ \text{при}\ -\frac{3}{2} < z < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

5. Вероятность нахождения частицы в секторах ямы:

3 :

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} |f(z)|^2\,dz = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |f(z)|^2\,dz = 0.450$$
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} |f(z)|^2\,dz = \int_{0}^{\frac{1}{2}} |f(z)|^2\,dz = 0.101$$

4 :

$$\int\limits_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} |f(z)|^2\, dz = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |f(z)|^2\, dz = 0.449$$

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} |f(z)|^2\, dz = \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} |f(z)|^2\, dz = 0.069$$

6. Графики волновых функций:

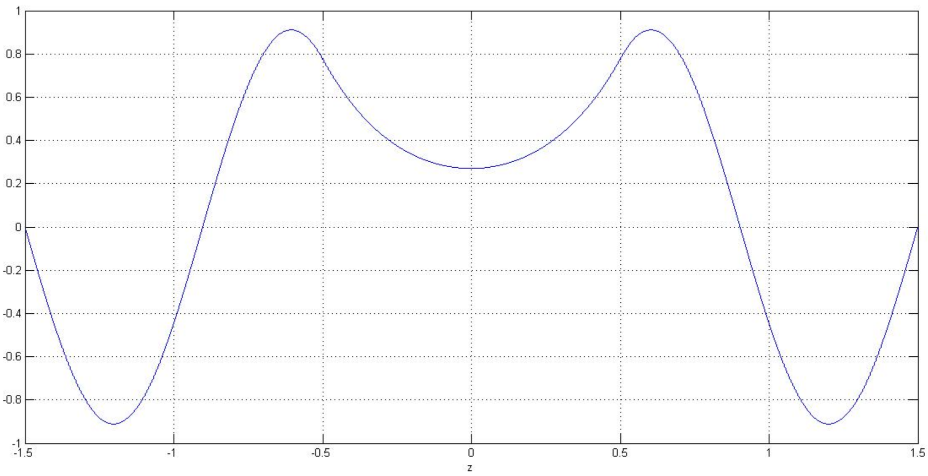

Рис. 3: 3 стационарное состояние

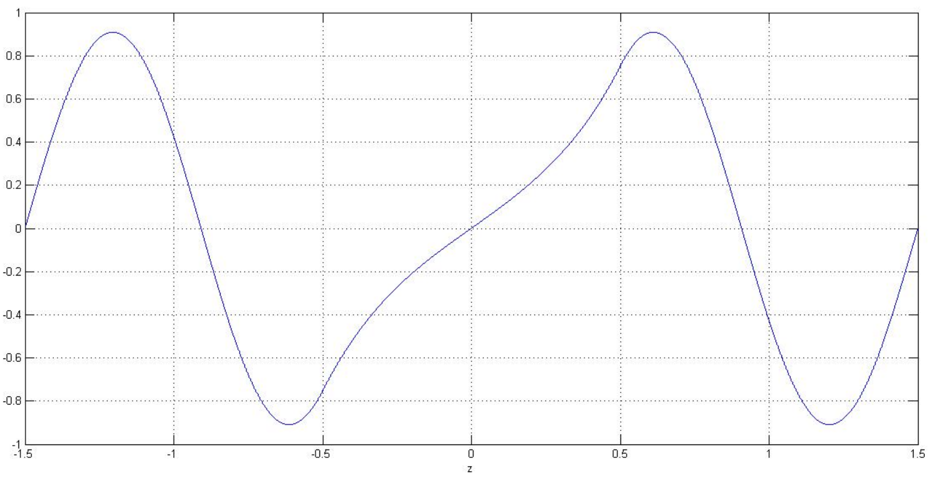

Рис. 4: 4 стационарное состояние

4 Литература

[1] В.С. Владимиров. Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1988.

[2] Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика: Механика: в 10 т.—М.: Наука, 1988.

[3] Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика: Квантовая механика (нерелятивийская теория): в 10 т.—М.: Наука, 1989.

[4] П.А.М. Дирак. Принципы квантовой механики.—М.: Наука, 1979.