Министерство образования и науки РФ

Государственное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«Борисоглебский государственный педагогический институт»

Физико-математический факультет

Кафедра математики и методики ее преподавания

**ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ**

Курсовая работа

по математике

Студент: V курса, I группы,

Подколодная Е.И.

Руководитель: преподаватель

Рязанова Е.Н.

Борисоглебск, 2011

**Содержание**

1. Введение………………………………………………………………………..…3

2. Частные производные…………………………………………………………....4

2.1. Частные производные………………………………………………….….4-7

2.2. Геометрический смысл частных производных………………………….7-9

2.3. Частные производные высших порядков…………………………….....9-12

3. Некоторые практические применения производной……………………..……13

3.1. Практическое применение производной при решении неравенств….13-17

3.2. Практическое применение производной при решении уравнений…..17-21

3.3. Использование производной в физике………………………………….....21

3.3.1. Скорость материальной точки…………………………………...21-22

3.3.2. Теплоемкость вещества при данной температуре…………...…22-23

3.3.3. Мощность………………………...…………………………………..23

4. Заключение………………………………………………………………………..24

Список литературы………………………………………………………………….25

# 1. Введение

Элементы математического анализа занимает значительное место в школьном курсе математики. Учащиеся овладевают математическим аппаратом, который может быть эффективно использован при решении многих задач математики, физики, техники. Язык производной и интеграла позволяет строго формулировать многие законы природы. В курсе математики с помощью дифференциального и интегрального исчислений исследуются свойства функций, строятся их графики, решаются задачи на наибольшее и наименьшее значения, вычисляются площади и объемы геометрических фигур. Иными словами, введение нового математического аппарата позволяет рассмотреть ряд задач, решить которые нельзя элементарными методами. Однако возможности методов математического анализа такими задачами не исчерпывается.

Многие традиционные элементарные задачи (доказательство неравенств, тождеств, исследование и решение уравнений, и другие) эффективно решаются с помощью понятий производной и интеграла. Школьные учебники и учебные пособия мало уделяют внимания этим вопросам. Вместе с тем нестандартное использование элементов математического анализа позволяет глубже усвоить основные понятия изучаемой теории. Здесь приходится подбирать метод решения задачи, проверять условия его применимости, анализировать полученные результаты. По существу, зачастую проводится небольшое математическое исследование, в процессе которого развиваются логическое мышление, математические способности, повышается математическая культура.

Для многих задач элементарной математики допускается как «элементарное», так и «неэлементарное» решение. Применение производной и интеграла дает, как правило, более эффективно решение. Появляется возможность оценить силу, красоту, общность нового математического аппарата. Методы математического анализа используются не только для решения поставленных задач, но и являются источником получения новых фактов элементарной математики.

**2. Частные производные**

2.1. Частные производные.

Множество точек *М*, которые удовлетворяют неравенству (*М*;*М*)<, называют -окрестностью точки *М*.

Пусть функция двух переменных *z=f*(*x*;*у*) (для большего количества переменных всё аналогично) определена в некоторой окрестности точки *М*(*x*;*у*). Дадим переменной *х* приращение так, чтобы точка (*х+*;*у*) принадлежала этой окрестности. При этом функция *z=f*(*x*;*у*) изменится на величину

,

которая называется *частичным приращением функции z=f*(*x*;*у*) *по переменной х.*

Аналогично величину



называют *частичным приращением функции* *по переменной у.*

Если существует предел

,

то его называют *частной производной функции z=f*(*x*;*у*) *в точке* *М*(*x*;*у*) *по переменной х* и обозначают такими символами:

,,,.

Аналогично

= 

Из таких определений следует, что правила вычисления производных, совпадают с правилами дифференцирования функций одной переменной. Следует только помнить, что при вычислении частной производной по одной переменной остальные переменные считаются постоянными.

Частные производные характеризуют скорость изменения функции в направлении соответствующих координатных осей. Частные производные от частных производных ,  функции *z=f*(*x*;*у*) называются *частными производными второго порядка.* Функция двух переменных может иметь четыре частные производные второго порядка, которые обозначают так:

, ,

, .

Производные  и  называются *смешанными.* Можно доказать, что если они непрерывны, то равны между собой.

Частные производные от частных производных второго порядка называются *частными производными третьего порядка* и т. д.

Само вычисление частной производной по существу не представляет ничего нового по сравнению с вычислением обыкновенной производной.

Пример 1: Найти частные производные функции



Решение:



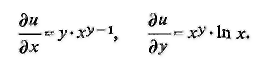
(при дифференцировании по x мы считаем у=const, а при дифференцировании по у мы считаем x=const).

Пример 2: Найти частные производные функции



Решение: 

Пример 3: Пусть u= xу (x>0); частные производные этой функции будут:



Первая из них вычисляется как производная степенной функции от х

(при у =const), а вторая - как производная показательной функции от у

(при х = const).

Пример 4: Если , то



Пример 5: Для  имеем:

; ; .

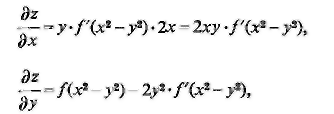
Пример 6: Пусть , где - *произвольная* функция (имеющая производную).

Показать, что для z всегда выполняется соотношение:



какова бы ни была функция .

По правилу дифференцирования сложной функции (означая штрихом производную по *u*) имеем:



и отсюда



Пример 7: Сторона *a* треугольника определяется по двум другим сторонам *b, c* и заключенному между ними углу α так: .

Тогда

**2.2. Геометрический смысл частных производных**

Для большей геометрической наглядности и для того, чтобы не вводить новых понятий, в этом пункте ограничимся рассмотрением функций двух переменных.

Рассмотрим функцию *z* = *f(x, у),* определенную на плоском открытом множестве *G,* т. е. множестве *G,* лежащем на плоскости *Е2.*

Пусть *(x0, у0) * *G* и пусть в точке (х0, у0) существует частная производная . Ее геометрический смысл сразу получается из определения частной

производной  как обычной производной функции *f(x, у)* по *х* при

фиксированном *у* и из геометрического смысла обычной производной.

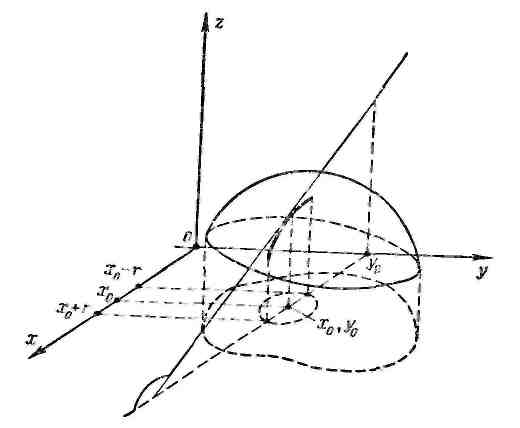


График 1 – геометрический смысл частных производных.

В самом деле, возьмем замкнутый круг *Q* радиуса *r* с центром в точке *(x0, у0)* и лежащий в *G\*.* Пусть  - кривая, заданная представлением



т. е. кривая, которая получается сечением графика функции *z= f(x, у), (х,y) Q* плоскостью =*y0*.

\* *Такой круг Q всегда существует. Действительно, в силу определения открытого множества существует такая -окрестность O точки (х0, у0), что О G. Тогда замкнутый круг Q радиуса  с центром в точке (х0, у0) будет заведомо лежать в G.*

Как известно,



где  - угол, образованный касательной к графику функции *f(х, у0)* в точке *(х0, f(x0, у0))* с осью *Ох,* т. е. угол, образованный касательной к кривой в точке *(x0, у0,f(х0, у0))* с осью *Ох.*

Таким образом,



- в этом состоит геометрический смысл частной производной.

Совершенно аналогично устанавливается и геометрический смысл частной производной  тангенса угла наклона, образованного касательной в точке *(х0, f(x0, у0))* к кривой, образованной сечением графика функции z=f(x, у), (*х,y)Q* плоскостью *х=х0*, с осью Оу.

**2.3. Частные производные высших порядков**

Частные производные функции нескольких переменных сами являются функциями этих переменных и могут иметь частные производные. Для исходной функции эти последние производные будут частными производными *второго порядка*. Так, для функции  двух независимых переменных можно определить (предполагается, что все производные существуют) четыре частные производные второго порядка, которые обозначаются символами:

,

,

,

.

Частные производные  и , отличающиеся порядком дифференцирования, называются *смешанными частными производными второго порядка*.

Аналогично определяются частные производные третьего, четвертого и старших порядков.

Пример 8: Найти частные производные второго порядка функции .

Имеем: , ,,

, , , .

Здесь  =. Оказывается, имеет место следующая теорема.

**Теорема 1**. Смешанные производные второго порядка (они отличаются друг от друга порядком дифференцирования) равны между собой (при условии их непрерывности в рассматриваемой точке).

Пример 9: Дана функция . Доказать, что .

Решение:



Приводя подобные члены , убеждаемся, что .

Пример 10: Найти все вторые частные производные функции .

Решение:



Пример 11: Нейдем вторые частные производные функции z=х3у2+2х2у-6. Имеем:

    
Смешанные производные  равны между собой.

**Замечание 1.** Четыре частных производных второго порядка в силу теоремы 1 сводятся к трем:   

Частные производные от частных производных второго порядка называются *частными производными третьего порядка* (или *третьими частными производными*) и обозначаются ,  (чистые производные), , ,  и т.д. (смешанные производные) или     и т.д.

**Теорема 2:** Смешанные производные третьего порядка, отличающиеся друг от друга лишь порядком дифференцирования, равны между собой (при условии их непрерывности в рассматриваемой точке).

Например, .

Пример 12: Частные производные третьего порядка функции z=x3y2+2x2y-6 есть:



**Замечание 2**. Восемь частных производных третьего порядка в силу теоремы 2 сводятся к четырем:    .

**Замечание 3.** Аналогично определяются и обозначаются частные производные четвертого и высших порядков функции f (х,у), а также функций трех и большего числа аргументов. Для всех случаев имеют место теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2.

**3. Некоторые практические применения производной**

**3.1. Практическое применение производной при решении неравенств**

Дифференциальное исчисление широко используется при исследовании функций. С помощью производной можно найти промежутки монотонности функции, ее экстремальные точки, наибольшие и наименьшие значения.

Если функция f имеет положительную (отрицательную) производную в каждой точке некоторого промежутка, то она возрастает (убывает) на этом промежутке. При нахождении промежутков монотонности нужно иметь в виду, что если функция возрастает (убывает) на интервале *(a,b)* и непрерывна в точках *a* и *b,* то она возрастает (убывает) на отрезке *[a,b].*

Если точка *x0*является точкой экстремума для функции *f* и в этой точке существует производная, то *f/(x0)=0.* В точке экстремума функция может не иметь производную. Внутренние точки области определения, в которых производная равна нулю или не существует, называются критическими. Чтобы установить, имеет ли функция в данной критической точке экстремум, пользуются следующими достаточными признаками существования экстремума.

Если функция *f* непрерывна в точке *x0* и существуют такие точки *a, b*, что *f/(x0)>0 (f/(x0)<0 )* на интервале *(a,x0)* и *f/(x0)<0 (f/(x0)>0 )* на интервале *(x0,b),* то точка *x0* является точкой максимума (минимума) функции *f.*

Для отыскания наибольших и наименьших значений *f* на отрезке *[a,b]* достаточно сравнить между собой значения *f* в точках *a, b* и в критических точках из отрезка *[a,b].*

Эти результаты применимы при решении многих элементарных задач, связанных с неравенствами.

Пусть, например, требуется доказать, что на некотором промежутке имеет место неравенство *f(x)≥g(x).* Обозначим *f(x)-g(x)* через *F(x).* С помощью производной *F/(x)* находим наименьшее значение *F* на данном промежутке. Если оно неотрицательно, то во всех точках рассматриваемого промежутка *F(x)≥0*, т.е. *f(x)≥g(x).*

Пример 13: Доказать что *(e+x)e-x>(e-x)e+x* для *0<x<e.*

Решение:

Данное неравенство равносильно следующему: *(e-x)ln(e+x)>(e+x)ln(e-x).*

Пусть *f(x)=(e-x)ln(e+x)-(e+x)ln(e-x),*

тогда 

Т.к. 

*ln(e+x)+ln(e-x)=ln(e2-x2)<lne2=2,*

то *f/(x)>0* при *0<x<e*. Следовательно, функция *f* возрастает на интервале *(0,e).* Функция *f(0) –* непрерывна. Поэтому эту точку можно включить в промежуток возрастания. Поскольку *f(0)=0*, а *f* возрастает при *0≤x<e,* то *f(x)>0* при *0<x<e.*

Пример 14: Доказать неравенство *tgka+ctgka≥2+k2cos22a, 0<a<π/2,*

*k–*натуральные.

Решение:

Неравенство можно записать в виде: 

Пусть сначала *0<a<π/4*. На этом интервале *ctg a> tg a, cos 2a>0,* поэтому последнее неравенство эквивалентно неравенству *ctgk/2a–tgk/2a ≥ k\*cos 2a.*

Положим *f(a)=ctgna–tgna–2n\*cos 2a,* где *.*

Далее, 

при .

Здесь, как и в предыдущей задаче, использован тот факт, что сумма взаимно обратных положительных чисел больше или равна 2. Таким образом, на интервале  функция *f* убывает. В точке  она непрерывна, поэтому *(0;* *]* является промежутком убывания *f.* Наименьшим значением функции на этом промежутке является *f(**)=0.* Следовательно, *f(a)≥0* при *0<a<**.* Для указанного промежутка неравенство доказано. Если *<a<*, то *0<**– a<**.* Однако неравенство не меняется при заменен *a* на *– a*.

Пример 15: Что больше eπ или πe ?

Решение:

Для решения задачи исследуем вопрос о существовании решений уравнения с двумя неизвестными: *ab=ba, a>0, b>0.* Исключим тривиальный случай *a=b* и для определенности будем предполагать, что *a<b*. Ввиду симметричности вхождения *a* и *b* в уравнение, последнее замечание не ограничивает общности рассуждений. Ясно, что уравнение *ab=ba* равносильно уравнению *b\*(ln a)=a\*(ln b)*, или *.*

Пусть *f(x)=* . (1)

Существование решений уравнения (1) эквивалентно наличию значений *x1* и *x2 (x1<x2)* таких, что *f(x1)=f(x2).* В этом случае пара *(x1,x2)* является решением уравнения (1). Иными словами, требуется выяснить, найдется ли прямая *y=c,* пересекающая график функции *f* по крайней мере в двух различных точках. Для этого исследуем функцию *f*. Ее производная  в области определения *f* имеет единственную критическую точку *x=e.* При *0<x<e f/(x)>0* функция *f* возрастает, а при *x>e, f/(x)<*0 функция *f* убывает. Поэтому в точке *x=e* функция  *f* принимает свое наибольшее значение *(**).* Так как функция  непрерывна и возрастает на промежутке *(0,e],* то она на этом промежутке принимает все значения от –∞ до . Аналогично, на промежутке *[e,∞)* функция *f* принимает все значения из *(0;* *].* Из результатов исследования функции *f* вытекают следующие утверждения:

1. Если *0<a<b* и *a≤ 1,* то *.* Поэтому *ab<ba .* Следовательно, уравнение (1) и равносильное ему уравнение *ab=ba* не имеют решений.

2. Если *1<a<b≤ e,* то *ab<ba* и уравнение *ab=ba* также не имеют решений.

3. Если *b>a>e*, то *ab>ba.*

Таким образом, если *(a,b)* является решением уравнения *ab=ba* , то *1<a<e*, *b>e*. Более того, при каждом фиксированном значении *1<a<e* найдется единственное значение *b>e* такое, что *ab=ba*

Для ответа на вопрос задачи 3 достаточно положить *a=e, b=π* и воспользоваться утверждением (1). Итак*, eπ > πe* .

Пример 16: Два туриста отправились по одному маршруту. В первый день они прошли одно и то же расстояние. В каждый из следующих дней первый турист увеличивал пройденный путь, по сравнению предыдущим, на одно и то же расстояние, а второй – в одно и то же число раз. Выяснилось, что в n-тый день (n>2) путешествия туристы снова прошли одно и то же расстояние. Доказать, что за n дней первый турист прошел путь больший, чем второй.

Решение:

Расстояние, пройденное первым туристом за n дней, представляет собой сумму n первых членов арифметической прогрессии, а вторым – сумму n первых членов геометрической прогрессии. Обозначим эти расстояния соответственно *Sn* и *Sn/.* Если *a* – первый член прогрессии, *d* – разность арифметической прогрессии, *q* – знаменатель геометрической прогрессии, то

Приравнивая n-е члены прогрессий, находим

Тогда , где q>1 (по условию задачи). Задача будет решена, если мы покажем, что , где *n>2, q>1* (2)

При n=3 имеем , что равносильно очевидному неравенству . Предполагая, что неравенство (2) справедливо при *n=k*, докажем его для *n=k+1*. Имеем



Для завершения доказательства достаточно убедиться, то выражение  при *k>2.* Здесь целесообразно обратиться к производной.

Пусть 

Производная  положительная при *x>1.* Поэтому функция *f* при *x>1* возрастает. Так как *f(1)=0* и функция *f* непрерывна в точке *x=1*, то *f(x)>0* при *x>1*, т.е. *f(q)>0.* Итак, *Sn>Sn/.*

**3.2. Практическое применение производной при решении уравнений**

Покажем, как с помощью производной можно решать вопросы существования корней уравнения, а в некоторых случаях и их отыскания. По-прежнему основную роль здесь будут играть исследования функции на монотонность, нахождение ее экстремальных значений. Кроме того, будет использован ряд свойств монотонных и непрерывных функций.

**Свойство 1.** Если функция f возрастает или убывает на некотором промежутке, то на этом промежутке равнение f(x)=0 имеет не более одного корня.

Это утверждение вытекает непосредственно из определения возрастающей и убывающей функций. Корень уравнения f(x)=0 равен абсциссе точки пересечения графика функции y=f(x) с осью x.

**Свойство 2.** Если функция f определена и непрерывна на промежутке [a,b] и на его концах принимает значения разных знаков, то между a и b найдется точка c, в которой f(c )=0.

Пример 17: Решить уравнение 

Решение:

Заметим, что  является корнем уравнения. Докажем, что других корней это уравнение не имеет. Исследуем функцию f, где , на монотонность. Производная . Установим промежутки, на которых функция  сохраняет знак. Для этого исследуем ее на монотонность. Производная . Так как при  , то  при . Следовательно, функция  возрастает при положительных значениях x; . Поэтому  при . В силу четности функции  она принимает положительные значения при всех . Следовательно, f возрастает на всей числовой оси. Согласно свойству 1, уравнение  имеет не более одного корня. Итак,  – единственный корень уравнения.

Пример 18: Решить систему уравнений 

Решение:

Система эквивалентна следующей: 

Из первого уравнения следует, что , из второго – . Выразим из первого уравнения x через y: , . Тогда . положив , получим  или . Производная функции f, где , равна .

Она отрицательна при всех значениях t. Таким образом, функция f убывает. Поэтому уравнение  имеет не более одного корня. Заметим, что  является его корнем. Итак,  единственное решение системы.

Пример 19: Доказать, что уравнение  имеет единственный корень, лежащий в интервале .

Решение:

Уравнение равносильными преобразованиями приводится к виду , где . Функция f возрастающая, так как  при всех . Согласно свойству 1, уравнение имеет не более одного решения. Функция f непрерывна, кроме того, , . В силу свойства 2 уравнение на интервале  имеет корень.

В примере требовалось доказать, что корень уравнения принадлежит некоторому промежутку. Мы пользовались свойством 2 непрерывной на отрезке функции, принимающей на концах этого отрезка значения разных знаков. Этот путь не всегда приводит к цели при решении подобных задач. Иногда целесообразно воспользоваться следующим свойством дифференцируемых функций.

**Свойство 3** (Теорема Ролля). Если функция f непрерывна на отрезке [a,b], дифференцируема на интервале (a,b) и f(a)=f(b), то существует точка  такая, что .

На геометрическом языке свойство 3 означает следующее: если , то на графике кривой  найдется точка С с координатами , где касательная к графику параллельна оси x.

Пример 20: Доказать, что уравнение  при ,  имеет не более одного действительного корня.

Решение:

Предположим, что уравнение имеет, по крайней мере, два корня  и . Функция f, где  дифференцируема на всей числовой прямой. Так как , то согласно свойству 3, ее производная на интервале  имеет корень. Однако при  уравнение  решений не имеет. Полученное противоречие показывает, что уравнение не может иметь более одного корня.

Пример 21:Доказать, что многочлен , ,  имеет не более n корней.

Решение:

Согласно свойству 3, между двумя корнями многочлена лежит, по крайнем мере, один корень его производной. Поэтому, если многочлен f(x) имеет , различных корней, то его производная  должна иметь не менее (k-1) корней. Точно так же  – не менее k-2 корней и т.д., n-ая производная – не менее (k-n) корней, . Это невозможно, так как  является отличной от нуля постоянной.

Пример 22: Доказать, что многочлен  имеет корень между 0 и 1 ().

Решение:

Применение свойства 2 к цели не приводит, так как . Рассмотрим функцию g, где . Для нее функция f является производной. Так как , то согласно свойству 3, при некотором  .

Пример 23:Доказать, что уравнение  не имеет действительных корней.

Решение:

Пусть , тогда . Если x – корень уравнения, то , т.е. функция f, в силу ее непрерывности, убывает в окрестности каждого корня. Заметим, что если уравнение имеет корни, то они отрицательные. Известно, что многочлен n-й степени имеет не более n корней. Обозначим через  - наибольший из корней. Тогда существует такое ,  что  . Так как , то на интервале  должен находиться корень x многочлена f(x) получили противоречие.

Рассмотрим уравнение вида , где f, g – взаимно обратные, возрастающие функции, имеющие одинаковые области определения. Покажем, что это уравнение равносильно уравнению . (3)

В самом деле, пусть *а* является корнем уравнения (3), т.е. . Учитывая, что область определения функции *g* совпадает со множеством значений функции *f* им наоборот, можно записать: , или , т.е. , а является корнем уравнения .

Обратно, пусть , но . Тогда  или . первом случае . Точно так же получается противоречие и во втором случае.

Таким образом, получен один частный прием равносильного преобразования уравнений.

Пример 24: Решить уравнение .

Решение:

Перепишем данное уравнение в виде . Функция  непрерывна, возрастающая (как сумма двух возрастающих функций  и ), поэтому она имеет обратную. Найдем ее: , . Итак, обратной для f является функция , совпадающая правой частью уравнения. На основании доказанного выше уравнение эквивалентно уравнению . Ясно, что  является корнем уравнения. Убедимся, что других корней уравнение не имеет.

Пусть . Тогда  положительна как разность между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел  и .Таким образом, функция h возрастает на всей числовой оси. Так как , то h(x)>0 при  и  при , т.е.  - единственный корень уравнения.

**3.3. Использование производной в физике**

3.3.1. Скорость материальной точки

Пусть зависимость пути s от времени t в данном прямолинейном движении

материальной точки выражается уравнением s = f(t) и t0 -некоторый

момент времени.

Рассмотрим другой момент времени t, обозначим ∆t = t – t0 и вычислим приращение пути: ∆s = f(t0 + ∆t) - f(t0). Отношение ∆s / ∆t называют средней скоростью движения за время ∆t, протекшее от исходного момента t0. *Скоростью* называют предел этого отношения при ∆t → 0.

Среднее ускорение неравномерного движения в интервале (t; t + ∆t) - это

величина a=∆v / ∆t. Мгновенным ускорением материальной точки в момент времени t будет предел среднего ускорения:



То есть первая производная по времени (v'(t)).

Пример 25: Зависимость пройденного телом пути от времени задается уравнением s = A + Bt + Ct2 +Dt3 (C = 0,1 м/с, D = 0,03 м/с2).

Определить время после начала движения, через которое ускорение тела будет

равно 2 м/с2?

Решение:

v(t) = s'(t) = B + 2Ct + 3Dt2; a(t) = v'(t) = 2C + 6Dt = 0,2 + 0,18t = 2;

1,8 = 0,18t; t = 10 c

3.3.2. Теплоемкость вещества при данной температуре

Для повышения различных температур T на одно и то же значение, равное

T1 - T, на 1 кг данного вещества необходимо разное количество теплоты

Q1 - Q, причем отношение



для данного вещества не является постоянным. Таким образом, для данного

вещества количество теплоты Q есть нелинейная функция температуры

T:Q = f(T). Тогда ΔQ = f(t + ΔT) - f(T). Отношение



называется *средней теплоемкостью на отрезке [T; T + ΔT]*, а предел этого

выражения при ∆T → 0 называется *теплоемкостью данного вещества*

*при температуре T.*

3.3.3. Мощность

Изменение механического движения тела вызывается силами, действующими на него со стороны других тел. Чтобы количественно характеризовать процесс обмена энергией между взаимодействующими телами, в механике вводится понятие работы силы. Чтобы охарактеризовать скорость совершения работы, вводят понятие мощности:



**4. Заключение**

# Список используемой литературы

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.-Т.1. М.: Наука, 1999.
2. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа.- Т.1. М.: Наука, 2000.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Математический анализ. М.: Наука, 1999.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики.- Т.2. М.: Наука, 2005.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – Т.2. М.: Наука, 2001.
6. Интернет ресурсы.