Содержание

[Введение 3](#_Toc166048205)

[1 Прямая на плоскости 4](#_Toc166048206)

[1.1 Определение прямой линии 4](#_Toc166048207)

[1.2 Прямая на плоскости 4](#_Toc166048208)

[1.2.1 Общее уравнение прямой 4](#_Toc166048209)

[1.2.2 Уравнение прямой в отрезках 6](#_Toc166048210)

[1.2.3 Уравнение прямой с угловым коэффициентом 7](#_Toc166048211)

[1.2.4 Нормальное уравнение прямой 7](#_Toc166048212)

[1.2.5 Уравнение пучка прямых 8](#_Toc166048213)

[2 Прямая в пространстве 10](#_Toc166048214)

[2.1 Уравнение прямой в пространстве 10](#_Toc166048215)

[2.2 Геометрическое истолкование двух уравнений между координатами в пространстве 10](#_Toc166048216)

[2.3 Направляющий вектор прямой 11](#_Toc166048217)

[2.4 Каноническое уравнение прямой 11](#_Toc166048218)

[2.5 Параметрическое уравнения прямой в пространстве 11](#_Toc166048219)

[2.6 Уравнение прямой по одной или двум точкам 12](#_Toc166048220)

[Заключение 14](#_Toc166048221)

[Список использованных источников 15](#_Toc166048222)

# Введение

Высшая математика включает такие разделы, изучение которых дает математический аппарат, наиболее активно применяемый для решения прикладных экономических и управленческих задач. Это аналитическая геометрия, линейная алгебра и математический анализ.

Знание аналитической геометрии необходимо современному менеджеру, чтобы грамотно толковать экономическую информацию, представляемую в виде различных графиков - это кривые и поверхности безразличия, кривые потребительского бюджета, инвестиционного спроса, кривые Филлипса, Лаффера, Лоренца и т. д.; выводить интерполяционные формулы по методу наименьших квадратов; находить наилучший план производства при заданных ресурсах.

Аналитическая геометрия – это ветвь математики, изучающая геометрические образы средствами алгебры. Для этого прежде всего создается некоторый аппарат, позволяющий переводить геометрические понятия на алгебраический язык. Наша работа посвящена одному из разделов аналитической геометрии - прямой на плоскости и в пространстве. Здесь рассматривается определение прямой, общие уравнения прямой на плоскости и в пространстве и т.д. Большое внимание уделяется практическому освоению рассматриваемого материала. Для достижения этой цели в работе приводятся примеры. Их рассмотрение будет способствовать выработке навыков рационального решения типовых примеров и задач.

В конце работы приводится список литературы, в который вошли все источники, использованные в той или иной мере при её написании.

# 1 Прямая на плоскости

## Определение прямой линии

Прямая линия – одно из основных понятий геометрии. При систематическом изложении геометрии прямая линия обычно принимается за одно из исходных понятий, которое лишь косвенным образом определяется аксиомами геометрии. Если основой построения геометрии служит понятие расстояния между точками пространства, то прямую линию можно определить как линию, вдоль которой расстояние между двумя точками является кратчайшим[[1]](#footnote-1).

## 1.2 Прямая на плоскости

### 1.2.1 Общее уравнение прямой

Теорема. В прямоугольной системе координат любя прямая является уравнением первой степени:

*Ax + By + C = 0,*

и обратно, при произвольных коэффициентах *A*, *B*, *C* ( *А* и *B* не равны нулю одновременно) определяет некоторую прямую в прямоугольной системе координат *Oxy*.

Доказательство. Сначала докажем первое утверждение. Если прямая не перпендикулярна оси *Ox*, то она имеет уравнение *y = kx + b*, где *A = k*, *B = - 1* и *C = b*. Если прямая перпендикулярна оси Ox, то все ее точки имеют одинаковые абсциссы, равные величине *a* отрезка, отсекаемого прямой на оси *Ox*. Уравнение этой прямой имеет вид *x = a*, т.е. также является уравнением первой степени, где *A = 1*, *B = 0*, *C = - a*. Тем самым первое утверждение доказано. Докажем обратное утверждение. Пусть дано уравнение *Ax + By + C = 0*, причем хотя бы один из коэффициентов *A* и *B* не равен нулю.

Если *B ≠ 0*, то можно уравнение записать в виде:

*y = - A/Bx – C/B.*

Полагая, что *k = - A/B*, *b = - C/B*, получаем уравнение *y = kx + b*, т.е. уравнение, которое определяет прямую.

Если *B = 0*, то *A ≠ 0* и уравнение принимает вид *x = - C/A*. Обозначая *- C/A* через *а*, получаем *x = a*, т.е. уравнение прямой, перпендикулярной оси *Ox*.

Линии, определяемые в прямоугольной системе координат уравнением первой степени, называются линиями первого порядка. Таким образом, каждая прямая есть линия первого порядка и, обратно, каждая линия первого порядка есть прямая.

Уравнение вида *Ax + By + C = 0* называется общим уравнением прямой. Оно содержит уравнение любой прямой при соответствующем выборе коэффициентов *A*, *B*, *C*.

**Пример.** Укажем, как решать две задачи, часто возникающие в связи с уравнением прямой.

**Задача 1**. Чтобы общее уравнение прямой превратить в уравнение с угловым коэффициентом, надо это общее уравнение решить относительно *y* (разумеется, считается, что y входит в уравнение, т.е. что *B ≠ 0*. Например, уравнение

*5x + 3y – 7 = 0*

переписывается сначала в виде

*3y = - 5x + 7,*

а затем в виде

*y = - 5/3x + 7/3.*

Стало быть, угловой коэффициент нашей прямой есть *m = - 5/3.*

**Задача 2**. Пусть требуется построить на чертеже прямую по уравнению. Если в это уравнение не входит одна из координат, то интересующая нас прямая параллельна одной из осей и ее построение очевидно. Если же в уравнение входят и *x*, и *y*, то для построения соответствующей прямой надо найти любые две ее точки и соединить их линейкой. Найти же точку, лежащую на нашей прямой, совсем просто: надо выбрать по своему желанию значение одной из координат (все равно какой), поставить его в уравнение и найти значение второй координаты.

**Пример.** Построить прямую

*2x + 5y – 11 = 0*

Положим *y = 1*. Тогда уравнение примет вид 2x – 6 = 0, откуда *x = 3*. Значит, одна точка *(3; 1)* нами уже найдена. Положив, далее, хотя бы *y = 3*, получим

*2x + 4 = 0*,

откуда *x = - 2* и второй точкой будет *(- 2; 3).*

### 1.2.2 Уравнение прямой в отрезках

Дано уравнение *Ax + By + = 0* при условии, что ни один из коэффициентов *A, B, C* не равен нулю. Преобразуем его к виду:

*x/ - C/A + y/- C/B = 1.*

Вводя обозначения *a = - C/A*, *b = - C/B*, получаем:

*x/a + y/b = 1*.

Данное уравнение называется уравнением прямой «в отрезках». Числа *a* и *b* являются величинами отрезков, которые прямая отсекает на осях координат. Эта форма уравнения прямой удобна для геометрического уравнения прямой.

**Пример.** Прямая задана уравнением *3x – 5y + 15 = 0*. Составить для этой прямой уравнение «в отрезках» и построить прямую. Для данной прямой уравнение «в отрезках» имеет вид:

*x/- 5 + y/3 = 1.*

Чтобы построить эту прямую, отложим на осях координат *Ox* и *Oy* отрезки, величины которых соответственно равны *a = - 5*, *b = 3*, и проведем прямую через точки *M1 (-5; 0)* и *M2 (0; 3).*

### 1.2.3 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Уравнение прямой с угловым коэффициентом выглядит следующим образом:

*y* *- yo = k (x - xo),*

где *k* - угловой коэффициент прямой, то есть *k = tg α*, где α - величина угла, образованного прямой с осью *Оx, M (xo, yo )* - некоторая точка, принадлежащая прямой.

Уравнение принимает вид *y = kx + b*, если *M (0, b)* есть точка пересечения прямой с осью *Оy.*

**Пример.** Построить прямую, заданную уравнением *y = (3/4) x + 2*.

Отложим на оси *Oy* отрезок *OB*, величина которого равна *2*, проведем через точку *B* параллельно оси *Ox* отрезок, величина которого *BN = 4*, и через точку *N* параллельно оси *Oy* отрезок, величина которого *NM = 3*. Затем проведем прямую *BM*, которая и является искомой. Она имеет угловой коэффициент *k = ¾* и отсекает на оси *Oy* отрезок величины *b = 2*.

### 1.2.4 Нормальное уравнение прямой

Нормальное уравнение прямой имеет следующий вид:

*rnо - р = 0,*

где *r* - радиус-вектор произвольной точки *M(x, y)* этой прямой,*nо*- единичный вектор, ортогональный этой прямой и направленный от начала координат к прямой; *р* - расстояние от начала координат до прямой.

Нормальное уравнение прямой в координатной форме имеет вид:

*x cos α + y sin α - р = 0,*

где α - величина угла, образованного прямой с осью *Оx.*

Для данной прямой, следовательно, *p = 1, cos α = 3/5, sin α* ***= -*** *4/5*.

**Пример.** Уравнение прямой *3x – 4y – 5 = 0* привести к нормальному виду. Нормирующий множитель *μ = -1 / √32 + 42 = - 1/5*. Умножая на него обе части данного уравнения, получим:

*3/5x – 4/5y – 1 = 0.*

### 1.2.5 Уравнение пучка прямых

Уравнение пучка прямых с центром в точке *А(x1, y1)* имеет вид:

*y-y1 = λ(x-x1 ),*

где λ - параметр пучка. Если пучок задается двумя пересекающимися прямыми *A1x + B1y + C1= 0, A2 x + B2 y + C2 = 0*, то его уравнение имеет вид:

*λ (A1 x + B1 y + C1) + μ (A2 x + B2 y + C2 )=0,*

где λ и μ - параметры пучка, не обращающиеся в 0 одновременно.

Величина угла между прямыми *y = kx + b* и *y = k1 x + b1* задается формулой:

*tg ϕ = .*

Равенство *1 + k1 k = 0* есть необходимое условие перпендикулярности прямых.

Для того, чтобы два уравнения

*A1 x + B1 y + C1= 0,*

*A2 x + B2 y + C2 = 0,*

задавали одну и ту же прямую, необходимо и достаточно, чтобы их коэффициенты были пропорциональны:

*A1/A2 = B1/B2 = C1/C2.*

Уравнения задают две различные параллельные прямые, если *A1/A2**= B1/B2* и *B1/B2 ≠C1/C2*; прямые пересекаются, если *A1/A2 ≠ B1/B2*.

Расстояние *d* от точки *Mо (xо, yо)* до прямой есть длина перпендикуляра, проведенного из точки *Mо* к прямой. Если прямая задана нормальным уравнением, то *d = ⎢rо nо - р ⎢*, где *rо* - радиус-вектор точки *Mо* или, в координатной форме, *d = ⎢xо cosα + yо sinα - р* ⎢.

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид:

*a11x2 + 2a12xy + a22y2 + 2a1x +2a2y +a = 0.*

Предполагается, что среди коэффициентов *a11, a12, a22*есть отличные от нуля.

Уравнение окружности с центром в точке *С (a, b)* и радиусом, равным R:

*(x - a)2 + (y - b)2 = R2.*

# 2 Прямая в пространстве

## 2.1 Уравнение прямой в пространстве

Рассмотрим произвольную прямую, обозначим ее буквой *а*. Обозначим через *П1*и *П2* какие-нибудь две различные плоскости, пересекающиеся по прямой *а* и предположим, что уравнения этих плоскостей будут: *A1x + B1y + C1z + D1 = 0* и *A2x + B2y + C2z + D2 = 0*. Так как прямая а представляет собой пересечение плоскостей *П1*и *П2*, то она определяется совместным заданием двух уравнением:

*A1x + B1y + C1z + D1 = 0,*

*A2x + B2y + C2z + D2 = 0.*

Поставим задачу: всегда ли два уравнения первой степени совместно определяют некоторую прямую? Очевидно, это будет только в том случае, когда соответствующие им плоскости не параллельны и не совпадают друг с другом, т.е. когда нормальные векторы этих плоскостей *N1 = {A1, B1, C1}* и *N2 = {A2, B2, C2}* не коллинеарны. Эти два уравнения совместно определяют прямую только в том случае, когда коэффициенты *A1, B1, C1* одного из них не пропорциональны коэффициентам *A2, B2, C2* другого.

## 2.2 Геометрическое истолкование двух уравнений между координатами в пространстве

Пусть имеем два уравнения с тремя переменными

*f1(x, y, z) = 0 и f2(x, y, z) = 0.*

Каждое из них определяет некоторую поверхность. Множество точек, общих обеим поверхностям, есть некоторая линия.

**Пример.** Уравнения *x2 + y2 = R2* и *z = a*, радиуса *R* с центром на оси *Oz* в точке (0; 0; *a*). Заметим, что эту же линию можно задать параметрически тремя уравнениями *x = R cos φ, y = R sin φ, z = a.*

В общем случае параметрические уравнения линии имеют вид:

*x = x(t), y = y(t), z = z(t).*

## 2.3 Направляющий вектор прямой

Рассмотрим произвольную прямую. Каждый не равный нулю вектор, лежащий на данной прямой или параллельный ей, называется направляющим вектором данной прямой. Указанные векторы называются направляющими именно потому, что любой из них, будучи задан, определяет направление прямой.

Направляющий вектор прямой будем обозначать буквой *l*, его координаты – *m, n, p:*

*l = {m; n; p}.*

## 2.4 Каноническое уравнение прямой

Пусть дана точка *M0 (x0; y0; z0)* и ненулевой вектор *s (m; p; q).* Требуется составить уравнение прямой *l*, проходящей через точку *M0* и параллельной вектору *s* (этот вектор называют направляющим вектором прямой). Для этого заметим, что точка *M (x; y; z)* лежит на указанной прямой тогда и только тогда, когда векторы *M0M (x - x0* ; *y - y0; z - z0* *)* и *s (m; p; q)* коллинеарны, т.е. тогда, когда координаты этих векторов пропорциональны:

*x – x0 =  y – y0 =  z – z0.*

*m p q*

Данные уравнения называются каноническими уравнениями прямой l.

**Пример**. Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку *M0 ( -2; -3; -1)* и имеющей направляющий вектор *s (3; 2; 4)*. Согласно равенствам имеем:

*x + 2 =  y + 3  =  z + 1.*

*3 2 4*

## 2.5 Параметрическое уравнения прямой в пространстве

Пусть прямая *l* задана каноническими уравнениями. Причем за параметр *t* каждое из отношений. Так как один из знаменателей отличен от нуля, а соответствующий числитель может принимать какие угодно значения, то областью изменения параметра *t* является вся числовая ось *- ∞ < t < + ∞*. Получим:

*x – x0 = mt, y – y0 = pt, z – z0 = qt,*

или

*x = x0 + mt, y – y0 + pt, z = z0 + qt.*

Данные уравнения и есть искомые параметрические уравнения прямой.

**Пример.** Составить параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку *M0(2; -3; -7)* и имеющей направляющий вектор *s (4; -6; 5).* Согласно равенствам имеем:

*x = 2 + 4t, y = -3 – 6t, z = -7 + 5t.*

## 2.6 Уравнение прямой по одной или двум точкам

Следующие две задачи имеют большое значение.

**Задача 1**. Даны точка *M0(x0, y0)* и число *m*. Требуется провести через *M0* прямую, имеющую *m* своим угловым коэффициентом.

Решение. Будем искать уравнение нужной нам прямой в форме

*y = mx + b.*

Это даст для *b* значение

*b = y0 – mx0.*

Подставляя это значение в уравнение, получаем уравнение искомой прямой

*y = mx + y0 – mx0.*

Обычно его записывают в виде

*y – y0 = m(x – x0).*

**Пример.** Провести через *M0(5, 2)* прямую, перпендикулярную прямой

*3x – 2y + 6 = 0.*

Решение. Угловой коэффициент прямой равен *3/2*. Поэтому (на основании условия перпендикулярности) угловой коэффициент *m* искомой прямой будет *m = - 2/3.* Значит, требуемое уравнение такого:

*y – 2 = - 2/3 (x – 5)*

или то же самое,

*2x + 3y – 16 = 0.*

**Задача 2**. Провести прямую через две заданные точки *M1 (x1; y1)* и *M2 (x2; y2)*.

Решение. Обозначим через *m* (неизвестный) угловой коэффициент искомой прямой. Так как эта прямая проведена через точку *M1 (x1; y1)*, то ее уравнение должно иметь вид

*y – y1 = m(x – x1).*

Для нахождения m используем то, что наша прямая проходит и через *M2 (x2; y2)* и, стало быть, числа *x2 y2* должны удовлетворять уравнению, т.е.

*y2 – y1 = m (x2 – x1)*,

откуда

.

Задача решена.

Если *y1 = y2*, то уравнение искомой прямой имеет вид *y = y1*. В этом случае прямая параллельна оси *Оx*. Если *x1 = x2*, то прямая, проходящая через точки *M1* и *M2*, параллельна оси *Oy*, и ее уравнение имеет вид *x = x1.*

**Пример.** Составить уравнение прямой, проходящей через точки *M1 (3; 1)* и *M2 (5; 4)*. Подставляя координаты точек *M1* и *M2* в уравнение, получаем искомое уравнение прямой:

*x – 3  =  y - 1*

2 3 ,

или

*3x – 2y – 7 = 0.*

# Заключение

При написании данной курсовой работы стремилось раскрыться содержание основных понятий аналитической геометрии по теме «Прямая на плоскости и в пространстве», изучились основные уравнения прямой, привелись примеры. Изложение материала по возможности полно и доступно, так как преследовалась цель сообщить основные сведения по данной теме.

Опыт показал, что для многих начинающих значительную трудность представляет решение типовых примеров и задач, поясняющих теоретический материал. Однако прежде, чем начать рассматривать пример или задачу, надо сначала изучить нужный раздел и добиться полной ясности в понимании соответствующих понятий и теорем. Поэтому в данную работу включены типовые задачи и даются методы их решения, чтобы материал лучше закрепился.

Изучение математики и её методов в экономике, составляющих основу современной экономической математики, позволит будущему специалисту приобрести необходимые базовые навыки, расширить кругозор, повысить уровень мышления и общую культуру. Все это понадобится ему для ориентации в профессиональной деятельности и успешной работе.

# Список использованных источников

1 Баврин И.И, Матросов В.Л. Высшая математика. «Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС», М., 2002 г, - 400 с.

2 Данко П.Е., Кожевникова Т.Я., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. 5-е изд., изд. «Высшая школа» М.,1997 г, -304с.

3 Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. 6-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2003 г, - 736 с.: ил.

4 Шипачёв В.С. Основы высшей математики: учеб. Пособие для вузов/ под ред. Акад. А.Н. Тихонова. – 3-е изд., М.: Высш. школа, 1998. – 479 с.: ил.

5 Большой энциклопедический словарь под ред. Ю.В. Прохорова. Изд. «Большая Российская Энциклопедия». М., 2000. – 846 с

1. Большой энциклопедический словарь под ред. Ю.В. Прохорова. Изд. «Большая Российская Энциклопедия». М., 2000. – 846 с. [↑](#footnote-ref-1)