Різницевий метод розв'язування

звичайних диференціальних рівнянь.

Апроксимація. Метод прогонки

Розглянемо задачу:



[0, 1] розіб'ємо на n частин, , 

Розглянемо розклади



Із (3),(4) одержимо



(5),(6),(7) – різницеві співвідношення, які апроксимують 1,2 похідну. Використовуючи різницеві співвідношення (5),(6),(7) апроксимуючи оператори *L*, *l* одержимо задачу:



Щоб порівнювати фунції *u*(h) i *u*, *f*(h) i *f*,  введем норму



Означення 1:

Оператор *L*h (*l*) апроксимує на функції *u* оператор *L*(*l*) з порядком апроксимації *К,* якщо , що має місце:



Означення 2:

*f*h () апроксимує *f*() з порядком апроксимації *К,* якщо , що має місце:



Означення 3:

Різницева схема (8), (9) апроксимує крайову задачу (1), (2) з порядком апроксимації к, якщо виконуються умови (10-13).

Розглянемо апроксимацію оператора крайових або початкових умов.



Відзначимо, що розв'язок задачі (14-15) задовільняє і ряд тривіальних умов. Наприклад:



Оператор апроксимуєм різницевим оператором **

Враховуючи, що , одержимо:

, тобто



Щоб одержати апроксимацію вищого порядку, треба використовувати тривіальні умови



Використаємо тривіальні умови для визначення ; із рівняння

Замість задачі (14), (15) можем розглядати задачу



тому, що розв'язок задачі (14-15) однозначно визначається умовами (14), (16).

Для підвищення порядку апроксимації можна користуватись ще формулами:



Метод прогонки



Виберемо сітку *х0, х1…хN* , *x0=a, xn=b, h=(b-a)/n*



Різницеву схему (3), (4) перетворимо до вигляду:



Розглянутий метод називається ***різницевим методом прогонки.***

Якщо різницева задача (5),(6) має вигляд:





То проводячи аналогічні викладки одержимометод правої прогонки, якщо



то метод буде стійким до похибки округлень



Якщо виконуються умови:



то можна застосовувати метод лівої прогонки, який буде стійкий до похибок заокруглень

***Приклад:***  знайти розв'язок задачі



в точках *х*n=0, 1n, n=0,1,…10

***Розв'язок:***

Практична задача апроксимується на сітці *х*n=0, 1n, n=0,1,…10 різницевою схемою





Для розв'язку використовуємо метод правої прогонки



1. Знаходимо прогоночні коефіцієнти:



2) Значення *у*n обчислюємо по співвідношенням



Результати обчислень зручно записувати в таблицю:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| n | *x*n | *z*n | *y*n | Індивідуальне завдання з книжки “Сборник задач по методах вычислений” под ред. Монас-тырского, ст. 217, 204  точний розв'язок – *y(x) = (1-x)*2 |
| 0 | - | - | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0.81 |
| 2 | 0.5 | 0.49 | 0.64 |
| 3 | 0.66667 | 0.31333 | 0.49 |
| 4 | 0.75 | 0.22 | 0.36 |
| 5 | 0.8 | 0.16 | 0.25 |
| 6 | 0.83333 | 0.11667 | 0.16 |
| 7 | 0.68714 | 0.08286 | 0.09 |
| 8 | 0.87500 | 0.05500 | 0.04 |
| 9 | 0.88889 | 0.03111 | 0.01 |
| 10 | 0.9 | 0.0100 | 0 |

# До питання про існування розв'язку різницевої схеми



На сітці *х0, х1…хN* , *x0=a, xn=b, h=(b-a)/n* апроксимуємо різницевою схемою



Різницева схема (3-4) має єдиний розв'язок, якщо відмінний від 0 її детермінант



Ця умова (7) не зручна для перевірки, тому існування розв'язку доводять використовуючи теорему:

***Теорема******(дискретний принцип максимуму)***

Нехай 1) *p(x), g(x), f(x)* – достатньо гладкі функції;

2) *g(x)*0 на [*a, b*]

3) *h* настільки мале, що 

Тоді, якщо у внутрішніх точках проміжку [*a,b*] виконується умова , то ф-ція *u*h не може приймати max додатнього (min від'ємного) значення у внутрішніх точках [*a, b*], за винятком випадку, коли *u*(h) стала на [*a, b*].

Оскільки (3,4) є системою лінійних р-нь, і якщо відповідна тривіальна система має лише тривіальний розв'язок, то різницева схема (3,4) має єдиний розв'язок. Те що однорідна система має лише тривіальний розв'язок доводять від супротивного використовуючи попередню теорему.

Схему (3,4) можна записати у вигляді



і її можна розв'язувати ітераційним методом.

Якщо *g(x)*<0, то із (6) , тобто ітераційний процес (8) збіжний.

# Збіжність і стійкість

 апроксимуємо її різницевою 

Означення:

(3,4) апроксимує (1,2) з порядком апроксимації *К,* якщо , що виконуються співвідношення:



***Означення***:

Різницева схема (3-4) стійка, якщо  що



***Теорема.*** Якщо різницева схема (3,4) стійка і апроксимує крайову задачу (1),(2) з порядком апроксимації *К,* то розв'язок різницевої схеми збігається до розв'язку крайової задачі при , причому порядок збіжності рівний *К.*

## Завдання №

Методом сіток з використанням методу прогонки знайти розв'язки крайових задач в точках *x*k=*k*h, *h=*0.1, *k=*0,1,…,10







