**Коломийський коледж комп’ютерних наук**

**Кафедра комп’ютерних дисциплін**

**КУРСОВА РОБОТА**

**на тему :**

**«Обчислення визначеного інтеграла функції F(x) на відрізку [A,B] за формулою Сімпсона.»**

**Виконала: студент групи КН-12**

**Пукан Юлія Василівна**

**Керівник: Яремчук Богдан Ярославович**

**Коломия 2000р.**

**АНОТАЦІЯ**

**В даній курсовій роботі розглянуто обчислення визначеного інтеграла функції F(x) на відрізку [a,b] за формулою Сімпсона. Програма реалізована на алгоритмічній мові програмування TURBO PASCAL версії 7.0. TURBO PASCAL була розроблена американською фірмою BORLAND в 1996 році, яка значно полегшило роботу програмістів-початківців та кваліфікованих спеціалстів.**

**ЗМІСТ.**

**1.Вступ.**

**2.Теоретична частина:**

 **2.1.Сімпсон і його формула;**

 **2.2.Метод Сімпсона;**

**3.Постановка задачі.**

**4.Додатки:**

 **4.1.Додаток 1;**

 **4.2.Додаток 2;**

**5.Висновок.**

**6.Використана література.**

**ВСТУП.**

Проникнення математичних методів у різні сфери людської діяльності надало нового імпульсу розвитку як суміжних з математикою наук, так і самій математиці. Це в свою чергу, зумовило розгляд. найбільш важливих понять i методів та виклад їх мовою сучасної математики.

Історія прикладної математики почалась кілька тисячоліть тому, коли були розв'язані найпростіші математичні задачі з обчислення площ, об'ємів та ін. За час, що минув, у прикладній математиці відбулося багато змін, які позначались на її можливостях і впливі на життя суспільства. Дійсно революційне перетворення науки взагалі і математики зокрема пов'язане з появою в 40-х роках нинішнього століття електронних обчислювальних машин (ЕОМ). Ця подія привела до зміни технології наукових досліджень, до розширення можливостей вивчення складних явищ природи і суспільства, проектування сучасних технічних систем тощо. Прикладом може бути оволодіння ядерною енергією та освоєння космічного простору. Серед складних задач, які зараз стоять перед наукою, можна назвати моделювання людини, її взаємодії з природою, моделювання клімату та багато інших.

Для того, щоб вивчити проблему за допомогою математичних методів та ЕОМ, на першому етапі формулюють її в термінах тих об'єктів, які вивчає су­часна математика — систем лінійних чи нелінійних рівнянь, диференціальних рівнянь і т.п. Іншими словами, створюють математичну модель (ММ) явища, яке вивчається, чи технічної системи, яка проектується.

Далі звертаються за допомогою до ЕОМ. Але, як відомо, ЕОМ ви­конує лише найпростіші арифметичні і логічні операції, хоча і робить це з величезною швидкістю. Тому на другому етапі математичну модель перетворюють до такого вигляду, щоб до неї входи­ли лише ті операції, які може виконувати ЕОМ. Таке перетворення виконують за допомогою методів, які називають «чисельні методи» (ЧМ) або «методи обчислень» (МО). Як наслідок дістають нову мо­дель, яка називається (на відміну від вихідної неперервної моделі) дискретною моделлю (ДМ). Далі (третій етап) за дискретною моделлю складають програму (П) для ЕОМ. Зауважимо, що рівень математичного забезпечення (МЗ) сучасних ЕОМ дає змогу програмісту уникнути трудомісткого і виснажливого шляху, коли при програмуванні дискретну модель доводиться «розписувати» аж до елементарних арифметичних і логічних операцій. В МЗ ЕОМ є так звані пакети прикладних програм (ППП), і якщо в дискретній моделі, наприклад, потрібно розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, то в програмі, яка реалізує цю дискретну модель, досить з ППП викликати відповідну підпрограму.

Автор програми, яка використовується в даній курсовій роботі - Томас Сімпсон, народився 20 серпня 1710 року у Великобританії. За фахом Сімпсон був кваліфікованим математиком. У 1746 році став членом Лондонського Королівського Товариства, що на той час було дуже престижно. Ще з дитинства захоплювався шахматами. Освіту здобув самостійно, був ткачем, потім шкільним вчителем в англійському місті Дербі, далі Томас Сімпсон став професором математики в Воєнній академії в Кульвічі. Формулу наближеного інтегрування вивів в 1743 році. Роботи по елементарній геометрії, тригонометрії, аналізу і теорії ймовірності. Великий математик помер 14 травня 1761 року.

**2.Теоретична частина.**

**2.1.Сімпсон і його формула.**

 Щоб побудувати триточкову квадратурну формулу з рівновіддаленими вузлами для обчислення наближеного значення , де f(x) - неперервна на [ x0-h; x0+h ] разом зі своїми похідними до четвертого порядку включно, можна використати інтерполяційний многочлен Лагранжа 2-го порядку, графік якого проходить через точки (x0-h;f(x0-h)),(x0;f(x0)) i (x0+h,f(x0+h)) i проінтегрувати по х у межах від x0-h до x0+h.

 Проте таку квадратурну формулу будуватимемо тут, користуючись методом невизначених коефіцієнтів. Цей метод, крім того, дає змогу досить просто обчислити її залишковий член. Отже, побудуємо квадратурну формулу вигляду



де А і В - невідомі коефіцієнти, а R(f) - залишковий член.

 Щоб дістати рівняння, з яких можна визначити коефіцієнти А і В, подамо функції f(x),f(x0-h) i f(x0+h) в околі точки х0 за допомогою формули Тейлора. Маємо

ƒ(Χ)=ƒ(Χο)+(Χ−Χο)ƒ′(Χο) + + +

ƒ(Χο−Η)=ƒ(Χο)−Ηƒ′(Χο)+(Η∧2)ƒ′′(Χο)⁄2!−(Η∧3)ƒ′′′(Χο)⁄3!+(Χ∧4)ƒ′′′′(Χο+θ3Η)⁄4!

ƒ(Χο+Η)=ƒ(Χο)+Ηƒ′(Χο)+(Η∧2)ƒ′′(Χο)⁄2!+(Η∧3)ƒ′′′(Χο)/3!+(Η∧4)ƒ′′′′(Χο+θ3Η), 0<θ,θ2,θ3<1.

Підставляючи ці значення функцій f(x), f(x0-h), f(x0+h) у (6.30) і беручи до уваги, що





для залишкового члена R(f) дістанемо:



Невідомі коефіцієнти А і В доберемо так, щоб

 1-2А-В=0,

 1/3!-А=0.

Звідси знаходимо А=1/6, В=2/3.

За цих значень А і В залишковий член квадратурної формули (6.30)



Але f’’’’ неперервна на [x0-h;x0+h], тому існує точка ξ∈[Χο−Η,Χο+Η] така, що



Отже, 

Таким чином, триточкову квадратурну формулу (6.30) можна записати так :



Це і є квадратурна формула Сімпсона, або формула парабол із залишковим членом. Вона точна для многочлена третьго степеня, бо похідна четвертого від такого многчлена дорівнює нулю. З формули (6.31) легко знайти таку оцінку для абсолютної похибки чисельного інтегрування за формулою Сімпсона :



Якщо треба обчислити  з достатньою точністю, то відрізок [a,b] ділять на 2n рівних відрізків завдовжки  і до кожного з відрізків [X2k;X2k+2] (k=0,1,..., n-1) застосовують формулу Сімпсона (6.32).

Тоді  де 

Оскільки f’’’’(ξk)=f’’’’(ξ),ξ∈[Α;Β].

Таким чином дістаємо узагальнену формулу Сімпсона (парабол) із залишковим членом вигляду:



Залишковий член узагальненої формули Сімпсона



Звідси дістаємо таку оцінку абсолютної похибки чисельного інтегрування за узагальненою формулою Сімпсона :



Якщо наближене значення інтеграла треба обчислити з точністю Ε>0, відповідний крок інтегрування h визначається нерівністю

  ,

або, що те саме, відрізок [a;b] треба поділити на n рівних частин де

 

За узагальненою формулою Сімпсона обчислимо наближене значення інтеграла (6.19) з кроком n=0,1 і оцінимо повну абсолютну похибку Δ1.

Користуючись таблицею 6.1, за формулою (6.33) знайдемо :

 Ісм=0,38177448≈0,381745

Щоб оцінити залишковий член R(f) формули Сімпсона за формулою (6.35), треба знайти похідну четвертого порядку від функції f(x)=xcosx, маємо

f’’’’(x)=4sinx+xcosx, звідси



Тому для залишкового члена R(f) за формулою (6.35) (a=0, b=1, h=0,1, M4=5) дістанемо 

Похибка остаточного округлення Δο=0,2\*10^(-7), а неусувна похибка ΔfΔfбо , а значення підінтегральної функції f у вузлах Xk (k=0,1,...10) обчислювали з точністю 0,5\*10^(-7), тобто Δf=0,5\*10^(-7).

 За формулою (6.3) для повної абсолютної похибки чисельного інтегрування функції f(x)=xcosx знаходимо таку оцінку :

Δ1=0,278\*10^(-5)+0,5\*10^(-7)+0,2\*10^(-7)=0,285\*10^(-5)<0,3\*10^(-5).

Отже обчислене за формулою Сімпсона для n=10,h=0,1 наближене значення інтеграла (6.19) має п’ять правильних значущих значущих цифр, тобто



Найбільший внесок у повну абсолютну похибку узагальненої формули Сімпсона вносить залишковий член R(f). Тому для визначення кількості відрізків n-розбиття [a;b], яке гарантує обчислення наближеного значення інтеграла з точністю E>0, досить скористатись формулою (6.36). Звичайно, всі проміжні обчислення при цьому слід проводити з точністю, більшою за E. Наприклад, щоб обчислити наближене значення інтеграла (6.19) з точністю E=0,5\*10^(-4), треба відрізок [0;1] поділити не меньш як на три рівні частини, бо за формулою (6.36) ( а=0, в=1, М4=5 ) маємо 

Обчислимо інтеграл (6.19) за формулою (6.33), поклавши n = 2, 4, 8, 16. Знайдемо І2 = 0,38182200; І4=0,38177633; І8=0,381773333. А це означає, що І2 має три, І4 - п‘ять, І8 - шість правильних значущих десяткових цифр. В І16 - всі 8 цифр правильні.

**2. Метод Сімпсона.**

Власне значення інтеграла

 

можна знайти методом Сімпсона (парабол). Для цього відрізок [a,b] розбивається на n=2m частин Χο=Α,Χ1=Α+h,...,Χn=В з кроком h=(b-a)/n (1)

У точках Хі обчислюють значення функції У1=f(Xi) і знаходять наближене значення інтеграла за формулою Сімпсона S = Sn + Rn

де  

Далі кількість точок розбиття подвоюється і здійснюється оцінка точності обчислень

 

Якщо , то кількість точок розбиття знову подвоюється. При цьому значення суми 2\*(у1+у2+...+у2m-1) у попередніх точках розбиття зберігається, тому для обчислення інтеграла при подвоєнні кількості точок розбиття треба обчислювати значення у(х) лише в нових точках.

**4.ДОДАТКИ :**

**4.1.Додаток 1: Структура програми.**

У даній програмі використовуються змінні :

а, в - межі інтегрування;

е - точність;

х - аргумент функції f(x);

h - крок;

S, S1, S2, S3 -робочі змінні;

x1=xi+h.

Контрольний приклад.

 Інтеграл 

Функція ff(x) має вигляд :

Function ff( x:Real ):Real;

Begin ff:=exp(x) END;

Структура програми

1-2 - заголовок функції та опис локальних змінних;

4-11 - обчислення за формулами (2) і (3)

Програма. Інтеграл за Сімпсоном.

 FUNCTION FF(X:REAL):REAL;

 BEGIN FF:=EXP(X) END;

 FUNCTION Simpson(a,b,e:real):real;

 var h,S,S1,S2,S3,X,X1:REAL;

 BEGIN

 S2:=1E+30;H:=B-A;S:=FF(A)+FF(B);

 REPEAT

 S3:=S2;H:=H/2;S1:=0;X1:=A+H;

 WHILE(X1>B)=(H<0) DO

 BEGIN S1:=S1+2\*FF(X1);X1:=X1+2\*H;

 END;

 S:=S+S1;S2:=(S+S1)\*H/3;X:=ABS(S3-S2)/15

 UNTIL X<E;

 SIMPSON:=S2; END;

**4.2.Додаток 2. : Узагальнення проекту.**

 На даний момент існує досить багато різних методів в математичній галузі чисельного інтегрування функцій. До найвідоміших методів відносяться :

 а) Квадратурні формули Ньютона-Котеса;

 б) Формула прямокутників;

 в) Формула трапецій;

 г) Метод обчислення інтеграла за Ромбергом;

Звичайно до цих методів на перше місце слід віднести обчислення визначеного інтеграла функції f(x) на відрізку [a, b] за формулою Сімпсона а також інтегрування методом Сімпсона з оцінкою точності. Метод Сімпсона вираховує надзвичайно точне обчислення інтеграла функції. Звичайно обчислювати методом Сімпсона такі інтеграли вручну дуже довго, тому для цього і існує така дисципліна, як «Алгоритмічні мови програмування»

**5.Висновок.**

Отже в даній темі курсової роботи «Обчислення визначеного інтегралу функцій f(x) на відрізку [a, b] за формулою Сімпсона» показано можливість розв’язання інтегралу за формулою Сімпсона, а також інтегрування методом Сімпсона з оцінкою точності.

**6.Література.**

6.1. Я.М.Григоренко, Н.Д.Панкратова. «Обчислювальні методи в задачах прикладної математики»

К. «Либідь» 1995

6.2.І.П.Гаврилюк, В.Л.Макаров. ..«Методи обчислень». (У двох частинах)

К. «Вища школа» 1995.

6.3..«Методи обчислень». Практикум на ЕОМ.

К. «Вища школа» 1995.

6.4.Я.Т.Гринчишин. «Чисельні методи в фізиці та математиці».

Тернопіль, 1994.

6.5.Ю.П.Боглаев. «Вычислительная математика и программирование».

 М. «Высшая школа», 1990.