РЕФЕРАТ

на тему:

**“Лінійний векторний простір”**

**Векторний простір** (**лінійний простір**) - безліч елементів, які називаються [векторами](http://phys.web.ru/db/search.html?not_mid=1179060&words=%E2%E5%EA%F2%EE%F0%E0%EC%E8), для яких визначені операції додавання і множення на число. Найпростіший, але важливий приклад - сукупність векторів ***a, b, c,*** ... звичайного 3-мірного простору. Кожен такий вектор - спрямований відрізок, що задається трьома числами: ; числа називаються [координатами вектора](http://phys.web.ru/db/search.html?not_mid=1179060&words=%EA%EE%EE%F0%E4%E8%ED%E0%F2%E0%EC%E8%20%E2%E5%EA%F2%EE%F0%E0).

При множенні вектора на речове число відповідний відрізок, зберігаючи напрямок, розтягується в раз: . Сума двох векторів знаходиться за [правилу параллелограмма](http://phys.web.ru/db/search.html?not_mid=1179060&words=%EF%F0%E0%E2%E8%EB%F3%20%EF%E0%F0%E0%EB%EB%E5%EB%EE%E3%F0%E0%EC%EC%E0); якщо і те .

Парі векторів ***a*** і ***b*** зіставляють також [скалярний](http://phys.web.ru/db/search.html?not_mid=1179060&words=%F1%EA%E0%EB%FF%F0%ED%EE%E5%20%EF%F0%EE%E8%E7%E2%E5%E4%E5%ED%E8%E5) добуток (скалярним опосередкованим узагальненням З-мірного простору є *n-мірний* [евклідовий](http://phys.web.ru/db/search.html?not_mid=1179060&words=eWKLIDOWO_PROSTRANSTWO) простір.

Його елементи - упорядковані набори речовинних чисел, Наприклад, , . Додавання і [множення](http://phys.web.ru/db/search.html?not_mid=1179060&words=%F3%EC%ED%EE%E6%E5%ED%E8%E5%20%E2%E5%EA%F2%EE%F0%EE%E2%20%ED%E0%20%F7%E8%F1%EB%EE) векторів на число визначені формулами , , а скалярний добуток - формулою Прикладом комплексного безкінечномірного векторного простору може служити сукупність комплексних функцій *f*, заданих на всій осі і квадратично сумованих (тобто маючих кінцевий інтеграл ). Багато класів функцій, наприклад, поліноми заданого порядку, функції безупинні, диференційовані, що інтегруються, аналітичні і тому подібні, також утворять безкінечномірні векторні простори.

У кожнім векторному просторі, крім операцій додавання і множення на число, звичайно маються ті чи інші додаткові операції і структури (наприклад, визначений скалярний добуток). Якщо ж не уточнюють природи елементів векторного простору і не припускають у ньому ніяких додаткових властивостей, то векторний простір називають абстрактним. Абстрактний векторний простір *L* задають за допомогою наступних аксіом:

1. будь-якій парі елементів *х* и *у* з *L* зіставлений єдиний елемент *z*, називаний їхньою сумою *z=x+y* і приналежний *L*;
2. для будь-якого числа і будь-якого елемента *x* з *L* визначений елемент *z*, що називається їхнім добутком і приналежний *L*;

1. операції додавання і множення на число є асоціативними і дистрибутивними.

Додавання допускає зворотну операцію, тобто для будь-яких *х* и *у* з *L* існує єдиний елемент *w* з *L* такий, що *x+w=y*. Крім того, мають місце формули .

Якщо всі числа речовинні (комплексні), говорять про речовинний (комплексному) векторна просторі; безліч чисел називають полем скалярів *L*. Поняття векторного простору можна ввести і для довільного полючи, наприклад, полючи кватерніонів.

Якщо - елементи векторного простору *L*, то вираження виду називається їхньою лінійною комбінацією; сукупність усіх лінійних комбінацій елементів підмножини *S* з *L* називають лінійною оболонкою *S*. Вектори з *L* називають лінійно незалежними, якщо умова ( - будь-які елементи полючи скалярів) може виконуватися тільки при . Нескінченна система векторів називається лінійно незалежної, якщо будь-яка її кінцева частина є лінійно незалежної. Безліч елементів підмножини *S* з *L* називається системою утворюючих *S*, якщо будь-який вектор *х* з *S* можна представити у виді лінійної комбінації цих елементів. Лінійно незалежна система утворюючих *S* називається базисом *S*, якщо розкладання будь-якого елемента *S* по цій системі єдино.

Базис, елементи якого яким-небудь образом параметризовані, називається системою координат у *S*. Базис векторного простору завжди існує, хоча і не визначається однозначно. Якщо базис складається з кінцевого числа *n* елементів, то векторний простір називається *n-мірним* (конечномірні); якщо базис - нескінченна безліч, той векторний простір називається безкінечномірні. Виділяють також лічильномірні векторні простори, у яких мається рахунковий базис.

Підмножини векторного простору *L*, замкнуті щодо його операцій, називаються підпросторами *L*. По будь-якому підпросторі *S* можна побудувати новий векторний простір *L/S*, називане фактором-простором *L* по *S*: кожен його елемент є безліч векторів з *L*, що розрізняються між собою на елемент із *S*. Розмірність *L/S* називається коразмірністю підпростору *S* у *L*; якщо розмірності *L* і *S* рівні відповідно *n* і *k*, те коразмірність *S* у *L* дорівнює *n-k*. Якщо *J* - довільна безліч індексів *i* і *Si* – [сімейство](http://phys.web.ru/db/search.html?not_mid=1179060&words=%F1%E5%EC%E5%E9%F1%F2%E2%EE%20%EF%EE%E4%EF%F0%EE%F1%F2%F0%E0%ED%F1%F2%E2) підпросторів *L*, те сукупність усіх векторів, що належать кожному з *Si*, є підпростір, називається перетинанням зазначених підпросторів і що позначається . Для кінцевого сімейства підпросторів *S1, ..., Ss* сукупність усіх векторів, які представлені у виді



|  |  |
| --- | --- |
|  , *xi* з *Si*, | (\*) |

є підпростір, називаний сумою *S1, ..., Ss* і що позначається *S1+ ... +Ss*. Якщо для будь-якого елемента суми *S1+ ... +Ss* представлення у виді (\*) єдино, ця сума називається прямої і позначається . Сума підпросторів є прямої тоді і тільки тоді, коли перетинання цих підпросторів складається тільки з [нульового](http://phys.web.ru/db/search.html?not_mid=1179060&words=%ED%F3%EB%E5%E2%EE%E3%EE%20%E2%E5%EA%F2%EE%F0%E0) вектора. [Розмірність](http://phys.web.ru/db/search.html?not_mid=1179060&words=%D0%E0%E7%EC%E5%F0%ED%EE%F1%F2%FC) суми підпросторів дорівнює сумі розмірностей цих підпросторів мінус розмірність їхнього перетинання. Векторний простір *L1* і *L2* називають ізоморфним і, якщо існує взаємно однозначна відповідність між їх елементами, погоджена з операціями в них; *L1* і *L2* ізоморфні тоді і тільки тоді, коли вони мають однакову розмірність.

Конкретні приклади векторного простору можна знайти в математичному апараті практично будь-якого розділу фізики. Кінцевомірними речовинними векторними просторами є, наприклад, [трехмерное физическое пространство](http://phys.web.ru/db/search.html?not_mid=1179060&words=%F2%F0%E5%F5%EC%E5%F0%ED%EE%E5%20%F4%E8%E7%E8%F7%E5%F1%EA%EE%E5%20%EF%F0%EE%F1%F2%F0%E0%ED%F1%F2%E2%EE) (без обліку кривизни), [конфигурационное пространство](http://phys.web.ru/db/search.html?not_mid=1179060&words=%EA%EE%ED%F4%E8%E3%F3%F0%E0%F6%E8%EE%ED%ED%EE%E5%20%EF%F0%EE%F1%F2%F0%E0%ED%F1%F2%E2%EE) і [фазовое пространство](http://phys.web.ru/db/search.html?not_mid=1179060&words=%F4%E0%E7%EE%E2%EE%E5%20%EF%F0%EE%F1%F2%F0%E0%ED%F1%F2%E2%EE) системи *n* класичних крапкових часток. До числа безкінечномірних комплексних векторних просторів належать [гильбертовы пространства](http://phys.web.ru/db/search.html?not_mid=1179060&words=%E3%E8%EB%FC%E1%E5%F0%F2%EE%E2%FB%20%EF%F0%EE%F1%F2%F0%E0%ED%F1%F2%E2%E0), конкретну й абстрактну, складову основу математичного апарата квантової фізики. Найпростіший приклад гільбертова просторів уже згадуваний простір .

Основні фізичні приклади - простору векторів станів різних систем мікрочастинок, досліджуваних у [квантовій](http://phys.web.ru/db/search.html?not_mid=1179060&words=%EA%E2%E0%ED%F2%EE%E2%EE%E9%20%EC%E5%F5%E0%ED%E8%EA%E5) механіці, [квантовій](http://phys.web.ru/db/search.html?not_mid=1179060&words=%EA%E2%E0%ED%F2%EE%E2%EE%E9%20%F1%F2%E0%F2%E8%F1%F2%E8%F7%E5%F1%EA%EE%E9%20%F4%E8%E7%E8%EA%E5) статистичній фізиці і [квантовій](http://phys.web.ru/db/search.html?not_mid=1179060&words=%EA%E2%E0%ED%F2%EE%E2%EE%E9%20%F2%E5%EE%F0%E8%E8%20%EF%EE%EB%FF) теорії поля. Знаходять застосування і такі векторні полючи, у яких поле скалярів не збігається з безліччю речовинних чи комплексних чисел: так, гільбертово простір над полем кватерніонів використовується й однієї з формулювань [квантовой механики](http://phys.web.ru/db/search.html?not_mid=1179060&words=%EA%E2%E0%ED%F2%EE%E2%EE%E9%20%EC%E5%F5%E0%ED%E8%EA%E8), а гільбертовий простір над полем октоніонов - в одній з формулювань [квантової](http://phys.web.ru/db/search.html?not_mid=1179060&words=%EA%E2%E0%ED%F2%EE%E2%EE%E9%20%F5%F0%EE%EC%EE%E4%E8%ED%E0%EC%E8%EA%E8) хромодинаміки. У сучасних [теориях суперсимметрии](http://phys.web.ru/db/search.html?not_mid=1179060&words=%F2%E5%EE%F0%E8%FF%F5%20%F1%F3%EF%E5%F0%F1%E8%EC%EC%E5%F2%F0%E8%E8) інтенсивно застосовуються так називані градуйовані векторні полючи, тобто лінійні простори разом з їхнім фіксованим розкладанням у пряму нескінченну суму підпросторів.

**Використана література:**

1. Векторний простір. – М., 1992.
2. Вища математика в прикладах. – К., 1998.
3. Математична енциклопедія. – М., 1983.