**Коломийський коледж комп’ютерних наук**

**Кафедра комп’ютерних**

**дисциплін**

**Реферат з дисципліни**

**Алгоритми мови та програмування**

**Розв’язання систем**

**лінійних**

**рівнянь методом Гауса**

**Виконав:**

**Студент групи 1-кн-2**

**Григорчук Володимир**

**Прийняв:**

**Яремчук Богдан Ярославович**

**Коломия 1999**

**Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса.**

а) **Зведення системи лнийних рівнянь до ступінчастого вигляду.**

Перейдемо до вивчення питания (про розв'язування систем ліній рівнянь. Нехай дано довільну систему *т* лінійних рівнянь з *п* невадомими.

*a*11*x*1 +*a*12*x*2 + ……+ *a*1n*x*n = *b*1,

*a*21*x*1 +*a*22*x*2 + ……+ *a*2n*x*n = *b*2,

………………………………..

*a*m1*x*1 +*a*m2*x*2 + …..+ *a*mn*x*n = *b*m,

У цій системі, принаймні, один з коефіцієнтів *a*i1 (*i* = 1,2,..., m) відмінний від нуля, бо в противному paзi система (1) не була б системою з *п* невідомими. Якщо *a*11 = 0, а, наприклад, *a*s1 ≠ 0, то переставив­ши перше i *s*-те рівняння, дістанемо систему, еквівалентну системі (1). У першому piвнянні цієї системи коефіцієнт при невідомому *x*1 буде відмінний від нуля. Тому вважатимемо, що в системі (1) а11 ≠ 0.

Випишемо розширену матрицю системи (1), відокремивши для зруч-ності вертикальною рискою стовпець вільних членів:

a11  a12 … a1n b1

a21 a22 … a2n b2

………………….

am1 am2 … amn bm

Застосовуючи елементарні перетворення рядків, зведемо матрицю (2) до ступінчатого вигляду. Дістанемо деяку ступінчасту матрицю.

Ā' = (a'ik|b'i) розміру m x (n + 1). Позначимо символом *S* *(Ā')* систему лінійних рівнянь, розширеною матрицею якої е ступінчаста матриця

Ā' = (a'ik|b'i).

Систему лінійних рівнянь, розширена матриця якої ступінчаста, також називають *ступінчастою*. Про ступінчасту систему говорять, що вона має *ступінчастий вигляд.* За теоремою 1.2 ступінчаста система *S(Ā')* еквівалентна системі(1).

Перетворення системи лінійних рівнянь в еквівалентну їй ступін­часту систему називають *зведенням системи лінійних рівнянь до сту­пінчастого вигляду.*

Отже, описаним вище способом кожну систему лінійних рівнянь можна звести до ступінчастого вигляду. Всюди далі, говорячи про перетворення системи лінійних рівнянь у ступінчасту систему, ми розумітимемо під цим перетворення лінійної системи в е к в і в а л е н т -

н у їй ступінчасту систему.

**б) Розв'язування системи лінійних рівнянь.** Система лінійних рівнянь (1) еквівалентна ступінчастій системі *S(Ā').* Тому розв'я­зування системи (1) зводиться до розв'язування системи *S(Ā').* При цьому можливі такі два випадки:

1. У розширеній матриці *Ā*' = (a'i|b'i) системи *S(Ā')* є рядок, в якому першим відмінним від нуля елементом є його .останній елемент.

2. У матриці *Ā*' такого рядка немає. У першому випадку в системі *S(Ā')* міститься рівняння вигляду 0 • *x*1 + 0 • *x*2 + … + 0 • *хn = b, b* ≠ 0 (скорочено його записують 0 = *b).* Оскільки жодна система чисел (*l1,l2, …, ln*) не може задовольняти рівняння 0 = *b* *(b* ≠ 0), то система рівнянь *S(Ā')* несумісна.

Розглянемо другий випадок. Нехай ступінчаста матриця *S(Ā')* містить *r* ненульових рядків і перші ненульові елементи цих рядків знаходяться в стовпцях з номерами *k1 = 1, k2,k3, …,kr*. З означення ступінчастої матриці випливає, що 1 = *k1* < *k2*  < … < *kr* < *n.*

Всі рівняння системи *S(Ā')*, які мають вигляд 0 • x1 + 0 • x2 + ... + 0 • *хn* = = 0, відкинемо. Дістанемо систему *S(Ā'')*, еквівалент­ну системі *S(Ā')*. Невідомі *х1, xk, xk2,* ..., *хkr, з* яких починаються перше, друге, ..., *r*-те рівняння системи *S(Ā'')*, назвемо *головними,* а всі інші (якщо вони є) *—вільними.*

Припустимо спочатку, що вільних невідомих немає. Тоді *r* = *п, k1* = 1,

k2 = 2, k3 = 3, ..., kn = n, і система S(Ā'') має вигляд

a'11x1 + a'12x2 + … + a'1(n-1)xn-1 + a'1nxn = b'1,

a'22x2 + … + a'2(n-1)xn-1 + a'2nxn = b'2,

…………………………………………………………

a'(n-1)(n-1)xn-1 + a'(n-1)nxn = b'n-1,

a'nnx = b'n,

(a11 ≠ 0, a22 ≠ 0, …, ann ≠ 0).

З останнього рівняння системи (3) знаходимо ділком певне зна­чення невідомого xп. Підставивши його в передостаннє рівняння

системи (3), знайдемо відповідно одне значення невідомого *xn-1*. Тоді таким же способом послідовно дістанемо єдині значення невідомих x*п-2, xп-з,* …, *х2, x1.* Добуті таким чином значення невідомих x1, x2, …, xn cтановлять, очевидно, єдиний розв'язок системи (3). Отже, в розглядуваному випадку система *S(Ā'')*, а також і система *S(Ā')*, сумісні й визначені. Припустимо тепер, що вільні невідомі є. Тоді система має вигляд

a'11x1 + … + a'1k2xk2 + … + a'1krxkr + … + a'1nxn = b'1,

a'2k2xk2 + … + a'2krxkr + … + a'2nxn = b'2,

…………………………………………..……

a'rkxkr + a'(n-1)nxn = b'n-1,

a'nnx = b'n,

(a11 ≠ 0, a22 ≠ 0, …, ann ≠ 0).

Позначимо символом *б(* суму всіх членів і'-го рівняння системи **(4),** що містять в}льні невідомі. Перенісши члени з вільними неві­домими в праві частини рівнянь, дістанемо систему

**а[іх^ + а^хь, + ••• +а'іі,^=Ь[—і^,**

аг^іг, — • • • + аих^ = Ьі **—** ^2, **,е\**

а-г^х^ ==Ьг— І-,г, \

еквівалентну системі (4). У системі (5) коефіцієнти *а\\,* аг»,, *азіг,,* ... *...аг* відмінні від нуля. Надамо вільним невідомим у системі (5) довіль­но вибраних числових значень: дістанемо систему вигляду (3). Роз­в'язавши її описаним вище способом, дістанемо єдині значення голов­них невідомих *Хц х^, Хі:,, ..., х^.* Сукупність знайдених значень го­ловних невідомих і вибраних нами значень Д вільних невідомих, очевидно, задовольняє кожне рівняння системи (5), тобтоє цілком визначеним розв'язком цієї системи, а отже, і еквівалентної їй систе­ми 5 (Л'), що відповідає вибраним значенням вільних невідомих. ^Оскільки значення вільних невідомих можна вибирати довільно, то множина різних наборів цих значень нескінченна. Тому множина розв'язків системи (5) і еквівалентної їй системи 5 *(А')* нескінченна. Таким чином, система 5 (Л') сумісна, але невизначена.

Зауважимо, що при всіх можливих виборах значень вільних невідо­мих за допомогою системи (5) щойно описаним способом буде знайдено всі розв'язки системи 5 (Л'). Іншими словами, кожен розв'язок системи 5 (Л') можна дістати описаним способом при відповідному виборі значень вільних кевідо?»ійх. -

Нехай (г'і, ід, ..., і'„) — довільно вибраний розв'язок системи 5 (Л'). Тоді він є розв'язком також і системи (5), еквівалентної системі 5 (Л').

Отже, ^, 4ц ^\*.» ••• •к єтими єдиними'значеннями головних невідомих, які дістаємо за допомогою системи (5), якщо вільним невідомим на­дати значень, що є компонентами розв'язку (/і, /д, ..., *1^).*

З викладеного вище випливає справедливість таких тверджень.

**Теорема 1.** Система лінійних рівнянь сумісна тоді і тільки то­ді, коли вона перетворюється'на ступінчасту систему, в якій немає рівнянь вигляду 0 == ^' (Ь Ф 0).

**Теорема 2.** Сумісна система лінійних рівнянь є визначеною тоді і тільки тоді, коли в ступінчастій системі, в яку вона перетворюєть­ся, число рівнянь г дорівнює числу невідомих п.

З цих теорем випливають такі наслідки.

**Наслідок 1.** Система п лінійних рівнянь з п невідомими е визна­ченою тоді і тільки тоді, коли вона перетворюється на ступінчасту систему, в якій а\\ =^0, 0:22 ^ 0, ..., Опп ^ 0.

•< Нехай дану систему *п* лінійних рівнянь з *п* невідомими перетво­рено на ступінчасту систему, в якій ац *Ф* 0, а^з *Ф* 0, ..., *а'пп Ф* 0. У такій ступінчастій системі, очевидно, немає рівнянь вигляду 0 == = *Ь' (Ь' -ф.* 0) і число рівнянь дорівнює числу невідомих. Тому, за теоремою 1, дана система лінійних рівнянь сумісна, а за теоремою 2, вона визначена. Навпаки, якщо дана система *п* лінійних рівнянь з *п* невідомими визначена, то за теоремою 1, у ступінчастій системі, на яку вона перетворюється, немає рівнянь вигляду 0 = *Ь', (Ь' ^=* 0) і, за теоремою 2, число рівнянь у ступінчастій системіїдорівнює *п.* Отже, в ступінчастій системі *а\\* ^ О, *агч* ^ 0, ..., *а'пп Ф* 0. **>•**

**Наслідок 2.** Сумісна система т лінійних рівнянь з п невідомими Їіри т <п є невизначеною.

*•^* Справді, сумісна система *т* лінійних рівнянь з п невідомими при *т* **•<** *п* перетворюється на .ступінчасту систему, в якій число рівняньг менше, ніж число невідомих *п,* і тому, за теоремою 2, вона є невизна­ченою. ^

Лінійне рівняння -, . і—.йй *а^+а,х,+* ... +а^==6 **^: °0'**

називається *однорідним,* якщо його вільний член *Ь* дорівнює нулю. Система лінійних рівнянь називається *однорідною лінійною системою або системою лінійних однорідних рівнянь,* якщо всі її рівняння однорідні, тобто якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю.

Застосуємо одержані вище результати до однорідної лінійної системи. Нехай дано довільну систему лінійних однорідних рівнянь

йц^і + аі2^2 + • • • + ащХп **=0,** 021-^1 + 022^2 4- •-• • + а2пХп = 0, ^

*Ог.Л^ -т- ОтіХг — • • •* + *СІтпХп =--* 0. ,

Ця система сумісна, оскільки вона має нульовий розв'язок (О, О, ,.., 0).-Це узгоджується й з доведеною вище теоремою 1. Справді, оскільки всі вільні члени системи (6) дорівнюють нулю, то вона пе­ретворюється на ступінчасту систему, в якій немає рівнянь вигляду 0=о (&^0). ' - '

Якщо система (6) перетворюється на ступінчасту ,-истему,. в якій число рівнянь /• дорівнює числу невідомих *п,* то за теоремою2, вона має єдиний розв'язок — нульовий. Якщо ж система (6) перетворю­ється на ступінчасту систему, в якій число рівнянь ,'• у.енше, ніж число невідомих *п,* то множина її розв'язків нескінченна, і, отже, вона має ненульові розв'язки, тобто розв'язки, в яких деякі (а можливо й усі) компоненти відмінні від нуля.

Множина ненульових розв'язків буде нескінченною.

**Теорема 3.** Система лінійних однорідних рівнянь, в якій число , рівнянь менше, ніж число невідомих, має ненульові розв'язки. •

За наслідком 2, така система невизначена, тобто має нескінченну множину розв'язків, серед яких є і розв'язки, відмінні від нульового.

Приклади. 1. Розв'язати систему

*х,+ х^+2х^-=-* 1,

2жі+4А-2+5.їд=—8, ——

«Ї+ЗX2-^5А:3=—7. ЗА-і4-7-«-2+9^3=—15-

Р о з в'я за н н я. Зведемо розширену матрицю цієї системи /І 1 2-1 \ **| 2 4 5** —8 **| | 1 3 5 —7 | \3 7 9 —15/**

до ступінчастого вигляду. Перший рядок, помножений відповідно на 2, 1, 3, відні­мемо від другого, третього і четвертого рядків, дістанемо

/І 1 2 1\ **1021—61 І 0** 2 3—6 1

\0 4 3 —12/

Другий рядок, помножений відповідно на 1, 2, віднімемо від третього і чет­вертого рядків, матимемо

**/1 *1* 2-^**

-•--—•—•------— *[02* 1 **—6|** -...-\_^і1\_ : ,

' ; ' ґ " - :•' /<:; '"^ **"1002 0 |"** *•* \- • .•^-.-і-.- . -.-

\0 0 1 О/

Третій рядок, помножений на 1/,, віднімемо від четвертого рядка, дістанемо

/1;1 2-1\ ; , 1 0 2 1 —6 1

**і 0 0 2 01 .**

д—»-— \о о о- • о/ • . .

/ Звідси випливає, що задана система ;;ікіі1них різн-таь перетворюється (після *ц* вилучення рівняння вигляду 0 == 0) на ступі:-:часту систему

- ^І-г ^3 + 2А'я =—1,1

2х,- х^-6,}

-\: \_ 2^- 0. ] Ця система, а отже, і задана система мають єдиний розв'язок (2, —**3, 0).**

І, , •

2. Розв'язати снетегу " "' '

: *г* 2хі+3^+5^-^Х^ 5, • • : Зл:і+4^+2хз+&»;4==—2, Хї+2.^+8хз- ^= 8, 7^+°-ї2+ ^+8Х4= 0. Розв'язання. Зведемо розширену матрицю до ступінчастого вигляду

(235 2 5\ /128 —1 8\ 342 3—2І(342 3 — 2 1 1 2 8 —1 8 І ""І 2 3 5 2 5 *}* ^791 8 О/ \7 9 1 80/

(1 2 8—1 8\ /1 2 81 8\ 0—2—22 6 —2б| **|0** —2 —22 6 — 26 *\* "^ 0 —1—11 4—11 **і|о** О 01 **2}'** 0 —5 —55 15 —56/ \0 О 00 9/

Отже, задана система лінійних рівнянь перетворюється на ступінчасту систему, в якій міститься рівняння 0=9, тому вона несумісна.

3. Розв'язати систему

\*і+2^+3<з+ 4^+ **5х,=0, *\*** 2л:і+3^+4^+ 5г,+ ^,=0, | 3^+4л;24-5хз+ ^4+^=0,

•»:1+3л:г4-5.»;з+12^4+ 9^=0, *ЗХі+бх^-{-9х,+17х^+10х^=0.*

Розв'язання. Розширену матрицю цієї системи зведемо до ступінчастого вигляду

~1 2 3 4 5 0~ '"1 2 3 4 5 0~ 234510 0—1—2—3—90 345 1 20 *->•* 0—2—^—11—130-»-1 3 5 12 9 0 0128 40

\_3 69 17 10 0 00 о 5 —50 ''

~1 23 45 0~ "'1 2 3 ' 4 "5 0'"' ' -

0—1—2—3—90 012 390 *^ 0 0 0 —5 5 0 ->-* 000—1 1 0 , -1-

0 0 0 5—50 000 000 \_0 О 05—50 000 000

Отже, задана система лінійних однорідних рівнянь перетворюється на ступін­часту

^+2^-3^+4^+5^=0, ) ," ^.+2^з+3^+9^=0, - ^

— \*-4+ **•<'5=0. )**

Вважати-мемо невідомі *х^, х,., х^* основними, а невідомі ***Ху, х^*** *—* вільними. Нехай *Хз '= 'х, х,* = р. ?- .останньої системи знаходимо *х^ == v. -+•* 15р, *х,* == —2а— 12р, *4=* Р.^ , ., ^ , : ,•,,

Викладений вище метод розв'язування систем лінійних рівнянь називається *методом Гаусса,* або *методом послідовного виключення невідомих.* Цей метод досить зручний для розв'язування вручну систем лінійних рівнянь з невеликою кількістю невідомих. Він з ус­піхом може бути використаний також для розв'язування лінійних систем на ЕОМ, проте часто для цього ефективнішими виявляються інші методи, наприклад, ітераційні (послідовних наближень). Так, зокрема, буває тоді, коли коефіцієнти і вільні члени системи є дійсні числа, знайдені вимірюванням деяких фізичних величин, і, отже, відомі наближено, з певним ступенем точності, тоді й розв'язки систе­ми, природно, знаходимо також з певним ступенем точності.

Однак метод Гаусса поряд з простотою і ефективністю має істотний недолік: він не дає змоги сформулювати в термінах коефіцієнтів і вільних членів лінійної системи умови її сумісності та визначеності, а також знайти формули, які б виражали компоненти розв'язку су­місної системи через її коефіцієнти і вільні члени, тобто давали змогу відразу знаходити розв'язки системи. Проте при розгляді різних теоретичних питань необхідно мати саме такі формулювання і фор­мули. Тому теорію систем лінійних рівнянь доводиться розвивати іншими методами, — на основі теорії визначників.

Список використаної літератури:

1) Бойков М.С. "Лабиринты математики", Москва, 1984р.

2) Шапов С.К. "Математика, теорія і практика", Київ, 1989р.

3) Белов К.М. "Вища математика", Київ, 1978р.

4) Оллер О.П. "В мире математики", Москва, 1983р.