Государственный университет управления

Институт заочного обучения

Специальность – менеджмент

Кафедра прикладной математики

**КУРСОВОЙ ПРОЕКТ**

по дисциплине: «Прикладная математика»

Выполнил студент 1-го курса

Группа № УП4-1-98/2

Студенческий билет №

Москва, 1999 г.

**Содержание**

1. Линейная производственная задача 3

2. Двойственная задача 7

3. Задача о «Расшивке узких мест производства» 9

4. Транспортная задача 12

5. Распределение капитальных вложений 17

6. Динамическая задача управления запасами 21

7. Анализ доходности и риска финансовых операций 26

8. Оптимальный портфель ценных бумаг 28

# 1. Линейная производственная задача

Линейная производственная задача – это задача о рациональном использовании имеющихся ресурсов, для решения которой применяют методы линейного программирования. В общем виде задача может быть сформулирована следующим образом:

Предположим, предприятие или цех может выпускать  видов продукции, используя  видов ресурсов. При этом известно количество каждого вида ресурса, расход каждого вида ресурса на выпуск каждого вида продукции, прибыль, получаемая с единицы выпущенной продукции. Требуется составить такой план производства продукции, при котором прибыль, получаемая предприятием, была бы наибольшей.

Примем следующие обозначения:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Номер ресурса (i=1,2,…,m) | |
|  | Номер продукции (j=1,2,…,n) | |
|  | Расход i-го ресурса на единицу j-ой продукции | |
|  | Имеющееся количество i-го ресурса | |
|  | Прибыль на единицу j-ой продукции | |
|  | Планируемое количество единиц j-ой продукции | |
|  | | Искомый план производства |

Таким образом, математическая модель задачи состоит в том, чтобы найти производственную программу  максимизирующую прибыль:



При этом, какова бы ни была производственная программа , ее компоненты должны удовлетворять условию, что суммарное использование данного вида ресурса, при производстве всех видов продукции не должно превышать имеющееся количество данного вида ресурса, т.е.

, где 

А так как компоненты программы – количество изделий, то они не могут быть выражены отрицательными числами, следовательно добавляется еще одно условие:

, где 

Предположим, что предприятие может выпускать четыре вида продукции (), используя для этого три вида ресурсов (). Известна технологическая матрица  затрат любого ресурса на единицу каждой продукции, вектор  объемов ресурсов и вектор  удельной прибыли:

  

Тогда математическая модель задачи будет иметь вид:

Найти производственную программу  максимизирующую прибыль:

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(1.1)** |

при ограничениях по ресурсам:

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(1.2)** |

где по смыслу задачи: , , , 

Таким образом, получили задачу на нахождение условного экстремума. Для ее решения введем дополнительные неотрицательные неизвестные:

|  |  |
| --- | --- |
| , , | остаток ресурса определенного вида (неиспользуемое количество каждого ресурса) |

Тогда вместо системы неравенств (1.2), получим систему линейных алгебраических уравнений:

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(1.3)** |

где среди всех решений, удовлетворяющих условию неотрицательности:

, , , , , , 

надо найти решение, при котором функция (1.1) примет наибольшее значение. Эту задачу будем решать методом последовательного улучшения плана – симплексным методом.

Воспользуемся тем, что правые части всех уравнений системы (1.3) неотрицательны, а сама система имеет предпочитаемый вид – дополнительные переменные являются базисными. Приравняв к нулю свободные переменные x1, x2, x3, x4, получаем базисное неотрицательное решение:

, , , , , , 

первые четыре компоненты которого представляют производственную программу , по которой пока ничего не производится.

Из выражения (1.1) видно, что наиболее выгодно начинать производить продукцию третьего вида, т.к. прибыль на единицу выпущенной продукции здесь наибольшая, поэтому в системе (1.3) принимаем переменную x3 за разрешающую и преобразуем эту систему к другому предпочитаемому виду. Для чего составляем отношения правых частей уравнений к соответствующим положительным коэффициентам при выбранной неизвестной и находим наибольшее значение x3, которое она может принять при нулевых значениях других свободных неизвестных, сохранив правые части уравнений неотрицательными, т.е.



Оно соответствует первому уравнению в системе (1.3), и показывает какое количество изделий третьего вида предприятие может изготовить с учетом объемов сырья первого вида. Следовательно, в базис вводим неизвестную x3, а исключаем от туда неизвестную x5. Тогда принимаем первое уравнение в системе (1.3) за разрешающее, а разрешающим элементом будет a13=6.

Применив формулы исключения, переходим к новому предпочитаемому виду системы с соответствующим базисным допустимым решением.

Полный процесс решения приведен в таблице 1, где в последней строке третьей таблицы нет ни одного отрицательного относительного оценочного коэффициента

, где , где ,

т.е. выполняется критерий оптимальности для максимизируемой функции (1.1).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Таблица 1 | | | | | | | | | | | |
| C | Базис | H | 30 | 11 | 45 | 6 | 0 | 0 | 0 | Пояснения | |
|  |  |  |  |  |  |  |
| 0 |  | 150 | 3 | 2 | 6 | 0 | 1 | 0 | 0 | x3 – разрешающая переменная  x3 → в базис.    первая строка – разрешающая  x5 → из базиса.  разрешающий элемент = 6 | |
| 0 |  | 130 | 4 | 2 | 3 | 5 | 0 | 1 | 0 |
| 0 |  | 124 | 4 | 3 | 2 | 4 | 0 | 0 | 1 |
|  | 0 |  | -30 | -11 | -45 | -6 | 0 | 0 | 0 |
| 45 |  | 25 |  |  | 1 | 0 |  | 0 | 0 | x1 – разрешающая переменная    вторая строка – разрешающая  разрешающий элемент = | |
| 0 |  | 55 |  | 1 | 0 | 5 |  | 1 | 0 |
| 0 |  | 74 | 3 |  | 0 | 4 |  | 0 | 1 |
|  | 1125 |  |  | 4 | 0 | -6 |  | 0 | 0 |
| 45 |  | 14 | 0 |  | 1 | -1 |  |  | 0 | Все | |
| 30 |  | 22 | 1 |  | 0 | 2 |  |  | 0 |
| 0 |  | 8 | 0 |  | 0 | -2 |  |  | 1 |
|  | 1290 |  | 0 | 7 | 0 | 9 | 6 | 3 | 0 |

При этом каждый элемент симплексной таблицы имеет определенный экономический смысл. Например, во второй симплексной таблице:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| В столбце : | | |
|  | | Показывает, на сколько следует уменьшить изготовление изделия третьего вида, если запланирован выпуск одного изделия первого вида. |
| ; 3 | | Показывают, сколько потребуется сырья второго и третьего вида, при включении в план одного изделия первого вида. |
| Т.е. при включении в план одного изделия первого вида, потребуется уменьшение выпуска продукции третьего вида на 0.5 единиц, а также потребуются дополнительные затраты 2.5 единиц сырья второго вида и 3 единицы сырья третьего вида, что приведет к увеличению прибыли предприятия на 7.5 денежных единиц. | | |
| В столбце : | | |
| ;; | Показывают, что увеличение объема сырья первого вида на единицу позволило бы увеличить выпуск продукции третьего вида на.    что одновременно потребовало бы  единицы сырья второго вида и  единицы сырья третьего вида. | |

Т.к. в последней строке третьей таблицы 1 нет ни одного отрицательного относительного оценочного коэффициента, то производственная программа, при которой получаемая предприятием прибыль имеет наибольшее значение, найдена, т.к., например, коэффициент  при переменной  показывает, что если произвести одну единицу продукции второго вида, то прибыль уменьшится на 7 денежных единиц.

Таким образом, получили производственную программу:

, , , 

которая является оптимальной и обеспечивает предприятию наибольшую возможную прибыль:



При этом первый и второй ресурсы будут использованы полностью, т.е. первый и второй ресурсы образуют «узкие места производства»:

, 

а третий ресурс будет иметь остаток:



Помимо этого в третьей симплексной таблице получен обращенный базис, отвечающий оптимальной производственной программе:



тогда можно проверить выполнение соотношения :



а т.к. из третьей симплексной таблицы:

, следовательно, соотношение  выполняется.

# 2. Двойственная задача

Задача, двойственная линейной производственной задаче, например, может заключаться в оценке выгоды от продажи сырья, используемого в производстве, на сторону.

Например, в предыдущем п.1. рассмотрена линейная производственная задача по выпуску четырех видов продукции с использованием трех видов ресурсов по заданным технологиям. Предположим, некий предприниматель, занимающийся производством других видов продукции с использованием трех таких же видов ресурсов, предлагает «уступить» ему все имеющиеся ресурсы и обещает платить y1 денежных единиц за каждую единицу первого ресурса, y2 денежных единиц за каждую единицу второго ресурса и y3 денежных единиц за каждую единицу третьего ресурса. Возникает вопрос: при каких значениях y1, y2, y3 можно согласиться с предложением этого предпринимателя.

Т.к. в предыдущей задаче технологическая матрица  затрат любого ресурса на единицу каждой продукции, вектор  объемов ресурсов и вектор  удельной прибыли имели вид:

  

значит, для производства, например, первого вида продукции, предприятие должно затратить 3 единицы ресурса первого вида, 4 единицы ресурса второго вида и 4 единицы ресурса третьего вида, за что оно получит прибыль 30 денежных единиц. Следовательно, согласиться с предложением предпринимателя можно, если он заплатит не меньше, т.е. в ценах y1, y2, y3 это условие будет иметь вид:



Аналогично и с продукцией второго, третьего и четвертого вида, при этом, за все имеющиеся ресурсы, предприниматель должен заплатить не меньше:

 денежных единиц.

Следовательно, предприниматель будет искать такие значения y1, y2, y3, при которых эта сумма была бы как можно меньше. При этом речь идет о ценах, которые зависят не от цен по которым эти ресурсы были когда-то приобретены, а о ценах зависящих от применяемых в производстве технологий, объемов ресурсов и прибыли, которую возможно получить за произведенную продукцию.

Таким образом, задача определения расчетных оценок ресурсов приводит к задаче линейного программирования: найти вектор двойственных оценок



минимизирующий общую оценку всех ресурсов



при условии, что по каждому виду продукции суммарная оценка всех ресурсов, затрачиваемых на производство единицы продукции, не меньше прибыли, получаемой от реализации единицы этой продукции, т.е.:



причем оценки ресурсов не могут быть отрицательными, т.е.: , , 

Решение полученной задачи можно найти с помощью второй теоремы двойственности: дефицитный (избыточный) ресурс, полностью (неполностью) используемый по оптимальному плану производства, имеет положительную (нулевую) оценку, и технология, применяемая с ненулевой (нулевой) интенсивностью, имеет нулевую (положительную) оценку.

Т.е. для оптимальных решений  и  пары двойственных задач необходимо и достаточно выполнение условий:

 

Ранее в п.1. было найдено, что , , а  и , тогда:



Но т.к. третий ресурс был избыточным (см. п.1.), то по второй теореме двойственности, его двойственная оценка равна нулю, т.е. . Тогда переходим к новой системе уравнений:



от куда получаем: , 

Таким образом, получили двойственные оценки ресурсов:

, , 

тогда общая оценка всех ресурсов равна:



То же самое решение значений двойственных оценок содержится в последней строке симплексной таблицы 1 и имеет определенный экономический смысл:

|  |  |
| --- | --- |
|  | Показывает, что добавление одной единицы первого ресурса обеспечит прирост прибыли в 6 денежных единиц. |
|  | Показывает, что добавление одной единицы второго ресурса обеспечит прирост прибыли в 3 денежные единицы. |

Одновременно технологические оценки из той же строки симплексной таблицы:

|  |  |
| --- | --- |
|  | Показывает, что если произвести одну единицу продукции второго вида (не входящую в оптимальную производственную программу), то это уменьшит прибыль на 7 денежных единиц |
|  | Показывает, что если увеличить выпуск продукции четвертого вида на одну единицу, то это уменьшит прибыль на 9 денежных единиц |

# 3. Задача о «Расшивке узких мест производства»

Задача о «расшивке узких мест производства» заключается в том, что, например, когда в процессе производства происходит изменение объема какого-либо ресурса, используемого в производстве, то, соответственно изменяется план производства и прибыль предприятия, получаемая от реализации готовой продукции. Это может происходить по различным причинам, например: сломался станок, поставщик предлагает сырье в большем количестве и т.п.

Поэтому, когда какой-либо ресурс используется полностью, то уменьшение объема этого ресурса, может повлиять на всю структуру плана производства и прибыль предприятия. Следовательно, такой ресурс, образующий «узкие места производства», желательно иметь с некоторым запасом, т.е. заказывать дополнительно, чтобы сохранить структуру плана производства и получить возможность увеличить прибыль предприятия.

Для примера возьмем данные и результаты вычислений из п.1. и п.2., где определено, что первый и второй ресурс используются полностью, и, соответственно, именно их нужно заказывать дополнительно. Но в таких объемах, чтобы сохранить структуру ранее найденной программы производства, и с условием, что от поставщика можно получить дополнительно не более одной трети первоначально выделенного объема ресурса любого вида. Следовательно, задача сводиться к нахождению объемов приобретения дополнительных ресурсов, удовлетворяющих указанным условиям, и вычислению дополнительной возможной прибыли.

Тогда, пусть  – вектор дополнительных объемов ресурсов:



при этом, для сохранения структуры производственной программы, должно выполняться условие устойчивости двойственных оценок:



Т.к. , то задача состоит в том, чтобы найти вектор:



максимизирующий суммарный прирост прибыли:

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(3.1)** |

при условии сохранения структуры производственной программы:

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(3.2)** |

предполагая, что можно надеяться получить дополнительно не более одной трети первоначального объема ресурса каждого вида, т.е.:

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(3.3)** |

причем дополнительные объемы ресурсов, по смыслу задачи, не могут быть отрицательными, т.е.:

|  |  |
| --- | --- |
| , | **(3.4)** |

Т.к. неравенства (3.2) и (3.3) должны выполняться одновременно, то их можно переписать в виде одной системы неравенств:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ➀  ➁  ➂  ➃  ➄ |  | **(3.5)** |

Таким образом, получена задача линейного программирования: максимизировать функцию (3.1) при условиях (3.4) и (3.5).

Эту задачу с двумя переменными можно решить графически:

График 1.

➄







50

110

70





0





➀

➂

➁

На графике видно, что система линейных неравенств (3.4), (3.5), образует область допустимых решений, ограниченную прямыми:

, , , 

при этом линии уровня функции (3.1) перпендикулярны вектору-градиенту  и образуют семейство параллельных прямых (градиент указывает направление возрастания функции). Наибольшего значения функция (3.1) достигает в точке пересечения прямых:

 и 

Координаты этой точки и определяют искомые объемы дополнительных ресурсов. Следовательно, программа «расшивки узких мест производства имеет вид:

, , 

и прирост прибыли составит:



Сводка результатов по пунктам 1-3 приведена в таблице 2.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Таблица 2. | | | | | | | | |
|  | 30 | 11 | 45 | 6 | B |  |  |  | |
|  | 3 | 2 | 6 | 0 | 150 | 0 | 6 | 50 | |
| 4 | 2 | 3 | 5 | 130 | 0 | 3 |  | |
| 4 | 3 | 2 | 4 | 124 | 8 | 0 | 0 | |
|  | 22 | 0 | 14 | 0 | 1290 |  |  |  | |
|  | 0 | 7 | 0 | 9 |  |  |  |  | |

# 4. Транспортная задача

Транспортная задача – это задача о минимизации транспортных расходов, связанных с обеспечением пунктов потребления определенным количеством однородной продукции, производимой (хранимой) в нескольких пунктах производства (хранения). В общем виде задача может быть сформулирована следующим образом:

Однородный продукт, сосредоточенный в  пунктах производства (хранения), необходимо распределить между  пунктами потребления. Стоимость перевозки единицы продукции известна для всех маршрутов. Необходимо составить такой план перевозок, при котором запросы всех пунктов потребления были бы удовлетворены за счет имеющихся продуктов в пунктах производства и общие транспортные расходы по доставке продуктов были бы минимальными.

Примем следующие обозначения:

|  |  |
| --- | --- |
|  | Номер пункта производства (хранения) (i=1,2,…,m) |
|  | Номер пункта потребления (j=1,2,…,n) |
|  | Количество продукта, имеющиеся в i-ом пункте производства |
|  | Количество продукта, необходимое для j-го пункта потребления |
|  | Стоимость перевозки единицы продукта из i-го пункта отправления в j-ый пункт назначения |
|  | Количество груза, планируемого к перевозке от i-го пункта отправления в j-ый пункт назначения |

Тогда, при наличии баланса производства и потребления:



математическая модель транспортной задачи будет выглядеть следующим образом:

найти план перевозок

, где ; 

минимизирующий общую стоимость всех перевозок



при условии, что из любого пункта производства вывозиться весь продукт

|  |  |
| --- | --- |
| , где | **(4.1)** |

и любому потребителю доставляется необходимое количества груза

|  |  |
| --- | --- |
| , где | **(4.2)** |

причем, по смыслу задачи

, …, 

Для решения транспортной задачи чаще всего применяется метод потенциалов, при котором вводят обозначение вектора симплексных множителей или потенциалов:



Тогда:

, где ; 

Откуда следует:

, где ; 

При этом один из потенциалов можно выбирать произвольно, т.к. в системе (4.1) и (4.2) одно уравнение линейно зависит от остальных, а остальные потенциалы находятся, что для базисных значений .

Предположим, что однородный продукт, находящийся в трех пунктах производства (m=3), необходимо доставить в четыре пункта потребления (n=4). При этом матрица  транспортных затрат на перевозку единицы продукта из любого пункта отправления в любой пункт назначения, вектор  объемов запасов продукта в пунктах производства и вектор  объемов продукта, необходимых пунктам потребления, имеют вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Тогда получается, что общий объем продукта в пунктах производства

 больше, чем требуется всем потребителям , т.е. имеем открытую модель транспортной задачи.

Для того чтобы превратить открытую модель транспортной задачи в закрытую, необходимо ввести фиктивный пункт потребления с объемом потребления

 единиц,

при этом тарифы на перевозку продукта в этот пункт потребления будут равны нулю, т.к. фактического перемещения продукта не происходит.

Тогда, первое базисное допустимое решение легко построить по правилу «северо-западного угла». А т.к. оценки базисных клеток транспортной таблицы равны нулю, то, приняв, что , первая транспортная таблица и потенциалы имеют вид:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0  0  0  3  4  4  2  2  3  6  3  2  1  5  4 |  | 30 | 11 | 45 | 36 | 28 |  |  |  |
| 50 | | 30 | 11 | 9 | \* |  |  |
| 70 | |  |  | 36 | 34 |  |  |
| 30 | |  |  |  | 2 | 28 |  |
|  | |  |  |  |  |  |  |

Т.к. наибольшая положительная оценка всех свободных клеток транспортной таблицы, соответствует клетке 14, то строим цикл пересчета: 14-13-23-24 и производим перераспределение поставок вдоль цикла пресчета:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | | | | | |
| 9 | \* | → |  |  | → | | 0 | 9 |
| 36 | 34 |  |  | 45 | 25 |
|  | | |  | | |  | | |

То получаем второе базисное допустимое решение и находим новые потенциалы, полагая :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0  0  0  3  4  4  2  2  3  6  3  2  1  5  4 |  | 30 | 11 | 45 | 36 | 28 |  |  |  |
| 50 | | 30 | 11 |  | 9 |  |  |
| 70 | |  | \* | 45 | 25 |  |  |
| 30 | |  |  |  | 2 | 28 |  |
|  | |  |  |  |  |  |  |

Т.к. теперь наибольшая положительная оценка всех свободных клеток транспортной таблицы, соответствует клетке 22, то строим цикл пересчета: 22‑12‑14‑24 и производим перераспределение поставок вдоль цикла пресчета:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | | | | | |
| 11 | 9 | → |  |  | → | | 0 | 20 |
| \* | 25 |  |  | 11 | 14 |
|  | | |  | | |  | | |

Отсюда получаем третье базисное допустимое решение и находим новые потенциалы, принимая :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0  0  0  3  4  4  2  2  3  6  3  2  1  5  4 |  | 30 | 11 | 45 | 36 | 28 |  |  |  |
| 50 | | 30 |  |  | 20 |  |  |
| 70 | | \* | 11 | 45 | 14 |  |  |
| 30 | |  |  |  | 2 | 28 |  |
|  | |  |  |  |  |  |  |

Т.к. наибольшая положительная оценка всех свободных клеток транспортной таблицы, теперь соответствует клетке 21, то строим цикл пересчета: 21-11-14-24 и производим перераспределение поставок вдоль цикла пресчета:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | | | | | |
| 30 | 20 | → |  |  | → | | 16 | 34 |
| \* | 14 |  |  | 14 | 0 |
|  | | |  | | |  | | |

Получаем четвертое базисное допустимое решение и находим новые потенциалы, принимая :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0  0  0  3  4  4  2  2  3  6  3  2  1  5  4 |  | 30 | 11 | 45 | 36 | 28 |  |  |  |
| 50 | | 16 |  |  | 34 |  |  |
| 70 | | 14 | 11 | 45 |  |  |  |
| 30 | |  |  | \* | 2 | 28 |  |
|  | |  |  |  |  |  |  |

Т.к. наибольшая положительная оценка всех свободных клеток транспортной таблицы, соответствует клетке 33, то строим цикл пересчета: 33-23-21-11‑14‑34 и производим перераспределение поставок вдоль цикла пресчета:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | | | | | | | |
| 16 |  | 34 | → |  |  |  | → | 14 |  | 36 |
| 14 | 45 |  |  |  |  | 16 | 43 |  |
|  | \* | 2 |  |  |  |  | 2 | 0 |
|  | | | |  | | |  | | | |

Получаем пятое базисное допустимое решение и находим новые потенциалы, опять принимая :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0  0  0  3  4  4  2  2  3  6  3  2  1  5  4 |  | 30 | 11 | 45 | 36 | 28 |  |  |  |
| 50 | | 14 |  |  | 36 |  |  |
| 70 | | 16 | 11 | 43 |  | \* |  |
| 30 | |  |  | 2 |  | 28 |  |
|  | |  |  |  |  |  |  |

Теперь наибольшая положительная оценка всех свободных клеток транспортной таблицы, соответствует клетке 25, отсюда строим цикл пересчета: 25-23-33- и производим перераспределение поставок вдоль этого цикла пресчета:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | | | | | |
| 43 | \* | → |  |  | → | | 15 | 28 |
| 2 | 28 |  |  | 30 | 0 |
|  | | |  | | |  | | |

Получаем пятое базисное допустимое решение и снова находим новые потенциалы, принимая :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0  0  0  3  4  4  2  2  3  6  3  2  1  5  4 |  | 30 | 11 | 45 | 36 | 28 |  |  |  |
| 50 | | 14 |  |  | 36 |  |  |
| 70 | | 16 | 11 | 15 |  | 28 |  |
| 30 | |  |  | 30 |  |  |  |
|  | |  |  |  |  |  |  |

Находим оценки всех свободных клеток таблицы:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| Все , где ; |

Т.к. получили таблицу для которой нет ни одной положительной оценки, следовательно, найдено оптимальное базисное допустимое решение:



при котором транспортные расходы по обеспечению продуктом всех четырех пуктов потребления будут наименьшими. При этом из второго пункта производства товар будет вывезен не полностью, т.е. там останется остаток продукта 28 единиц.

# 5. Распределение капитальных вложений

Задача о распределении капитальных вложений – это нелинейная задача распределения ресурсов между предприятиями одного производственного объединения или отрасли.

Предположим, что указано  пунктов, где требуется построить или реконструировать предприятия одной отрасли, для чего выделена определенная сумма. При этом известен прирост мощности или прибыли для каждого предприятия, в зависимости от суммы капитальных вложений в это предприятие. Требуется найти такое распределение капитальных вложений между предприятиями, которое максимизирует суммарный прирост мощности или прибыли всей отрасли.

Примем следующие обозначения:

|  |  |
| --- | --- |
|  | Номер предприятия (j=1,2,…,n) |
|  | Общая сумма капитальных вложений |
|  | Сумма капитальных вложений в j-ое предприятие |
|  | Прирост мощности или прибыли j-го предприятия, если оно получит xj денежных единиц капитальных вложений |

Тогда, задача состоит в том, чтобы найти такие значения , , …, , при которых значение суммарного прироста прибыли или мощности всей отрасли:



было бы наибольшим, при ограничении общей суммы: , причем будем считать, что все переменные  принимают только целые неотрицательные значения, т.е.:

=0 или 1, или 2, или 3, …; 

Эту задачу можно решить методом динамического программирования. Для этого необходимо ввести параметр состояния ** и функцию состояния **:

|  |  |
| --- | --- |
|  | Некоторое количество предприятий, для которых определяется параметр и функция состояния () |
|  | Сумма капитальных вложений, выделяемая нескольким предприятиям () |
|  | Максимальный прирост прибыли или мощности на первых  предприятиях, если они вместе получат  капитальных вложений |

Тогда, если из  денежных единиц *k*-ое предприятие получит  денежных единиц, то остаток  денежных средств необходимо распределить между предприятиями от первого до  так, чтобы был получен максимальный прирост прибыли или мощности . Следовательно, прирост прибыли или мощности *k* предприятий будет равен  и нужно выбрать такое значение  между 0 и , чтобы увеличение прибыли или мощности *k* предприятий было бы максимальным, т.е.:

, где .

Если же *k*=1, то:



Допустим, что производственное объединение состоит из четырех предприятий (*n*=4). Общая сумма капитальных вложений равна 700 денежных единиц (*b*=700), при этом суммы выделяемые предприятиям кратны 100 денежным единицам. Значения функций  приведены в таблице 3:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Таблица 3. | | | | | | | | |
|  | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 |
|  | 0 | 42 | 58 | 71 | 80 | 89 | 95 | 100 |
|  | 0 | 30 | 49 | 63 | 68 | 69 | 65 | 60 |
|  | 0 | 22 | 37 | 49 | 59 | 68 | 76 | 82 |
|  | 0 | 50 | 68 | 82 | 92 | 100 | 107 | 112 |

Для заполнения таблицы 5 необходимо в таблице 4 сложить значения функции  со значениями  и на каждой северо-восточной диагонали выбрать наибольшее число (отмечено звездочкой), указав соответствующие значение :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Таблица 4. | | | | | | | | | |
|  |  | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 |
|  |  | 0 | 42 | 58 | 71 | 80 | 89 | 95 | 100 |
|  |
| 0 | 0 | 0 | 42\* | 58 | 71 | 80 | 89 | 95 | 100 |
| 100 | 30 | 30 | 72\* | 88 | 101 | 110 | 119 | 125 |  |
| 200 | 49 | 49 | 91\* | 107\* | 120 | 129 | 138 |  |  |
| 300 | 63 | 63 | 105 | 121\* | 134\* | 143\* |  |  |  |
| 400 | 68 | 68 | 110 | 126 | 139 |  |  |  |  |
| 500 | 69 | 69 | 111 | 127 |  |  |  |  |  |
| 600 | 65 | 65 | 107 |  |  |  |  |  |  |
| 700 | 60 | 60 |  |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Таблица 5. | | | | | | | | | |
|  | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 |
|  | 0 | 42 | 72 | 91 | 107 | 121 | 134 | 143 |
|  | 0 | 0 | 100 | 200 | 200 | 300 | 300 | 300 |

Для заполнения таблицы 7 необходимо в таблице 6 сложить значения функции  со значениями  и на каждой северо-восточной диагонали выбрать наибольшее число (отмечено звездочкой), указав соответствующие значение :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Таблица 6. | | | | | | | | | |
|  |  | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 |
|  |  | 0 | 42 | 72 | 91 | 107 | 121 | 134 | 143 |
|  |
| 0 | 0 | 0 | 42\* | 72\* | 91 | 107 | 121 | 134 | 143 |
| 100 | 22 | 22 | 64 | 94\* | 113\* | 129\* | 143 | 156 |  |
| 200 | 37 | 37 | 79 | 109 | 128 | 144\* | 158\* |  |  |
| 300 | 49 | 49 | 91 | 121 | 140 | 156 |  |  |  |
| 400 | 59 | 59 | 101 | 131 | 150 |  |  |  |  |
| 500 | 68 | 68 | 110 | 140 |  |  |  |  |  |
| 600 | 76 | 76 | 118 |  |  |  |  |  |  |
| 700 | 82 | 82 |  |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Таблица 7. | | | | | | | | | |
|  | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 |
|  | 0 | 42 | 72 | 94 | 113 | 129 | 144 | 158 |
|  | 0 | 0 | 0 | 100 | 100 | 100 | 200 | 200 |

Теперь, в таблице 8, необходимо сложить значения функции  со значениями , но только для значения , т.е. заполнить только одну диагональ:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Таблица 8. | | | | | | | | | |
|  |  | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 |
|  |  | 0 | 42 | 72 | 94 | 113 | 129 | 144 | 158 |
|  |
| 0 | 0 |  |  |  |  |  |  |  | 158 |
| 100 | 50 |  |  |  |  |  |  | 194 |  |
| 200 | 68 |  |  |  |  |  | 197\* |  |  |
| 300 | 82 |  |  |  |  | 195 |  |  |  |
| 400 | 92 |  |  |  | 186 |  |  |  |  |
| 500 | 100 |  |  | 172 |  |  |  |  |  |
| 600 | 107 |  | 149 |  |  |  |  |  |  |
| 700 | 112 | 112 |  |  |  |  |  |  |  |

Наибольшее число этой диагонали показывает максимально возможный суммарный прирост прибыли всех четырех предприятий данного производственного объединения, при общей сумме капитальных вложений в 700 денежных единиц, т.е.:

 денежных единиц

причем четвертому предприятию должно быть выделено:

 денежных единиц

Тогда третьему предприятию должно быть выделено (см. табл. 7.):

 денежных единиц

второму предприятию должно быть выделено (см. табл. 5.):

 денежных единиц

на долю первого предприятия остается:

 денежных единиц

Таким образом, наилучшим является следующее распределение капитальных вложений по предприятиям:



которое обеспечивает производственному объединению наибольший возможный прирост прибыли:

 денежных единиц

# 6. Динамическая задача управления запасами

Задача управления запасами – это задача о поддержании баланса производства и сбыта продукции предприятия, минимизирующего расходы предприятия на производство и хранение продукции.

Предположим, что предприятие, производящее партиями некоторую продукцию, получило заказы на *n* месяцев. Размеры заказов значительно меняются от месяца к месяцу, поэтому иногда лучше выполнять заказы сразу нескольких месяцев, а затем хранить готовую продукцию, пока она не потребуется, чем выполнять заказ именно в тот месяц, когда этот заказ должен быть отправлен. Поэтому необходимо составить план производства на эти *n* месяцев с учетом затрат на производство и хранение изделий.

Примем следующие обозначения:

|  |  |
| --- | --- |
|  | Номер месяца (j=1,2,…,n) |
|  | Число изделий, производимых в j-ом месяце |
|  | Величина запаса к началу j-го месяца |
|  | Число изделий, которые должны быть отгружены в j-ом месяце |
|  | Затраты на хранение и производство изделий в j-ом месяце |

Тогда, задача состоит в том, чтобы найти план производства ** компоненты которого удовлетворяют условиям материального баланса:

, где 

и минимизируют суммарные затраты за весь планируемый период:



причем по смыслу задачи , , при 

Т.к. объем произведенной продукции  на этапе *j* может быть настолько велик, что запас  может удовлетворить спрос всех последующих этапов и при этом не имеет смысла иметь величину запаса  больше суммарного спроса на всех последующих этапах, то переменная  должна удовлетворять ограничениям:



Полученную задачу можно решить методом динамического программирования, для чего необходимо определить параметр состояния и функцию состояния :

|  |  |
| --- | --- |
|  | Наличный запас продукции в конце k-го месяца () |
|  | Минимальные затраты за первые  месяцев: |

Тогда, минимальные затраты за один первый месяц ():



Следовательно, минимальные затраты при :

, где 

Если при этом функция затрат на хранение и производство изделий в j-ом месяце имеет вид:

, где

|  |  |
| --- | --- |
| , при  и , при | |
|  | Затраты на оформление заказа (переналадку оборудования) в *j*-ом месяце |
|  | Затраты на хранение единицы продукции, переходящей из *j*‑го месяца в месяц *j*+1 |
|  | Затраты на производство (закупку)  единиц продукции в *j*‑ом месяце |

то минимальные затраты за один первый месяц ():



если ввести обозначение:



то следовательно, минимальные затраты при :

, где 

Допустим, что предприятие заключило договора на поставку своей продукции на три месяца. Исходные данные приведены в таблице 9. При этом исходный запас товара на складе составляет две единицы, т.е .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Таблица 9. | | | |
| Период *k* | 1 | 2 | 3 |
| Спрос () | 3 | 2 | 3 |
| Затраты на оформление заказа () | 4 | 2 | 3 |
| Затраты на хранение единицы запаса () | 1 | 1 | 1 |

Предполагается, что затраты на приобретение продукции составляют 5 руб. за каждую единицу для первых трех единиц и 7 руб. за каждую дополнительную единицу, т.е.



Положим , тогда:



Тогда, т.к. параметр состояния  может принимать значения на отрезке:



т.е. , при этом каждому значению параметра состояния отвечает определенная область изменения переменной :



Однако на первом этапе объем производства не может быть меньше одной единицы, т.к. спрос , а исходный запас , при этом из балансового уравнения следует, что объем производства связан с параметром состояния  соотношением:



т.е. каждому значению  отвечает единственное значение , поэтому:

, тогда:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Значения функции состояния  приведены в таблице 10.:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Таблица 10. | | | | | | |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  | 9 | 15 | 21 | 29 | 37 | 45 |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Положим , тогда:

, где:



Здесь минимум берется по переменной , которая может изменяться в пределах:



где верхняя граница зависит от параметра состояния , который принимает значения на отрезке:



т.е. , при этом из балансового уравнения следует, что остаток товара на начало второго месяца  связан с объемом производства  и с параметром состояния  соотношением:



Тогда:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| () |  |  | \*    \* |

Наименьшие из полученных значений , есть , т.е.:



причем минимум достигается при  и , т.е.:

 и 

эти значения указываем в результирующей таблице 11.

Аналогично:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| () |  |  | \* |
| () |  |  | \* |
| () |  |  | \* |

Таким образом:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Таблица 11. | | | | | |
|  | 0 | | 1 | 2 | 3 |
|  | 21 | | 27 | 34 | 41 |
|  | 0 | 2 | 3 | 3 | 3 |

Теперь положим, что , тогда:

, где:



Если оставлять продукцию к концу третьего периода не нужно, тогда параметр состояния принимает единственное значение , следовательно, переменная  может изменяться в пределах:



а из балансового уравнения следует, что остаток товара на начало третьего месяца  связан с объемом производства соотношением:



Тогда:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| () |  |  | \* |

Следовательно, получаем:



причем минимум достигается при , т.е.:



Таким образом, получили минимальные общие затраты на производство и хранение продукции и последнюю компоненту оптимального решения:



Для нахождения остальных компонент оптимального решения, необходимо воспользоваться обычными правилами динамического программирования.

Тогда т.к. , то , откуда , следовательно, из таблицы 11.:

 или 

Аналогично т.к. , то  или , откуда  или , следовательно, из таблицы 10.:

 или 

Следовательно, получен оптимальный план производства, который имеет два варианта:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

при этом, каждый вариант оптимального плана производства обеспечивает минимальные общие затраты на производство и хранение продукции в размере 39 денежных единиц.

# 7. Анализ доходности и риска финансовых операций

Финансовой называется операция, начальное и конечное состояние которой имеют денежную оценку и цель проведения которой заключается в максимизации дохода в виде разности между конечной и начальной оценками. При этом практически все финансовые операции проходят в условиях неопределенности и, следовательно, их результат невозможно предсказать заранее. Поэтому при проведении финансовой операции возможно получение как прибыли, так и убытка.

Поэтому задача анализа доходности и риска финансовой операций заключается в оценке финансовой операции с точки зрения ее доходности и риска. Наиболее распространенным способом оценки финансовой операций является представление дохода операции как случайной величины и оценка риска операции как среднего квадратического отклонения этого случайного дохода.

Например, если доход от проведения некоторой финансовой операции есть случайная величина , то средний ожидаемый доход – это математическое ожидание случайной величины :

, где  есть вероятность получить доход 

Т.к. среднеквадратическое отклонение:

, где 

это мера разбросанности возможных значений дохода вокруг среднего ожидаемого дохода, то его можно считать количественной мерой риска операции и обозначить как :



Допустим, что по четырем финансовым операциям , , ,  ряды распределения доходов и вероятностей получения этих доходов имеют вид:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 6 | 8 | 4 |  |  | 2 | 3 | 4 | 10 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 0 | 1 | 2 | 8 |  |  | 0 | 4 | 6 | 10 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Тогда т.к. , то средний ожидаемый доход каждой операции имеет вид:









Т.к. , то риски каждой финансовой операции имеют вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Нанесем средние ожидаемые доходы  и риски  каждой операции на плоскость (см. график 2.).





4

1

3

2

График 2.

Тогда, чем правее точка на графике, тем более доходная операция, чем точка выше – тем более она рисковая.

Для определения опе­рации опти­мальной по Парето, необходимо на графике найти точку, которую не доминирует никакая другая точка.

Так как точка  доминирует точку , если  и , то из графика 2. видно, что 3-ая операция доминирует 2-ую операцию, а 1-ая операция доминирует 3-ую и 2-ую операции. Но 1-ая и 4-ая операции несравнимы, т.к. доходность 4-ой операции больше, но и риск ее тоже больше, чем доходность и риск 1-ой операции, следовательно, 1-я операция является оптимальной по Парето.

Для нахождения лучшей операции можно применить взвешивающую формулу, которая для пар  дает одно число, по которому можно определить лучшую операцию. Допустим, что взвешивающей формулой будет , тогда:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Отсюда видно, что 1-ая финансовая операция – лучшая, а 2-ая – худшая.

# 8. Оптимальный портфель ценных бумаг

Задача о формировании оптимального портфеля ценных бумаг – это задача о распределении капитала, который участник рынка хочет потратить на покупку набора ценных бумаг, по различным видам ценных бумаг, удовлетворяющих возможность получения некоторого дохода.

Из характеристик ценных бумаг наиболее значимы две: эффективность и рискованность. Т.к. эффективность  – это некоторый обобщенный показатель дохода или прибыли, то ее считают случайной величиной, а ее математическое ожидание обозначают как . Рискованность ценных бумаг отождествляют со средним квадратическим отклонением, при этом дисперсию обычно называют вариацией и обозначают как , т.е.:

, где 

Примем следующие обозначения:

|  |  |
| --- | --- |
|  | Номер вида ценных бумаг |
|  | Доля капитала, потраченная на закупку ценных бумаг i-го вида (сумма всех долей равна единице) |
|  | Эффективность ценных бумаг i-го вида, стоящих одну денежную единицу |
|  | Математическое ожидание эффективности |
|  | Ковариация ценных бумаг i-го и j-го видов |
|  | Вариация (дисперсия) эффективности |
|  | Рискованность ценных бумаг i-го вида |
|  | Эффективность портфеля (набора) ценных бумаг |

Тогда, математическое ожидание эффективности портфеля ценных бумаг:



вариация портфеля ценных бумаг:



риск портфеля ценных бумаг:



Следовательно, математическая формализация задачи формирования опти­мального портфеля ценных бумаг:

Найти такое распределение долей капитала, которое минимизирует вариацию эффективности портфеля, при заданной ожидаемой эффективности портфеля .

Тогда, если оптимальное решение обозначить как \*, то:

|  |  |
| --- | --- |
|  | означает рекомендацию вложить долю  капитала в ценные бумаги *i*‑го вида |
|  | Означает возможность проведения операции “short sale”, т.е. краткосрочного вложения доли капитала в более доходные ценные бумаги |

Если на рынке есть безрисковые ценные бумаги, то решение задачи о формировании портфеля ценных бумаг приобретает новое качество.

Пусть:

|  |  |
| --- | --- |
|  | Эффективность безрисковых ценных бумаг |
|  | Доля капитала, вложенного в безрисковые ценные бумаги |
|  | Средняя ожидаемая эффективность рисковой части портфеля |
|  | Вариация рисковой части портфеля |
|  | Среднее квадратическое отклонение эффективности рисковой части портфеля |

Тогда в рисковую часть портфеля вложена  часть всего капитала, а т.к. считается, что безрисковые ценные бумаги некоррелированы с остальными, то ожидаемая эффективность всего портфеля ценных бумаг:



вариация портфеля ценных бумаг:



риск портфеля ценных бумаг:



Допустим, что задача состоит в нахождении распределения капитала, при формировании оптимального портфеля ценных бумаг заданной эффективности, состоящего из трех видов ценных бумаг: безрисковых эффективности 3 и некоррелированных рисковых, с ожидаемой эффективностью 5 и 9, риски которых равны 4 и 6, т.е.:

, , , , 

Тогда, вариации некоррелированных рисковых ценных бумаг первого и второго вида:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Следовательно, матрица  ковариаций рисковых видов ценных бумаг и вектор‑столбец ожидаемой эффективности рисковых видов ценных бумаг имеют вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Пусть  - двухмерный вектор-столбец, компоненты которого равны 1, т.е.:



Тогда значение вектора-столбца  оптимальных значений долей, вложенных в рисковую часть портфеля ценных бумаг:



Где:











Т.е.:



Таким образом, доли рисковых ценных бумаг в оптимальном портфеле:

, 

Следовательно, доля безрисковых ценных бумаг в оптимальном портфеле:



Т.к. необходимость проведения операции “short sale” возникает, когда , то в данном случае, необходимость проведения операции “short sale” возникает, когда :

, т.е. когда .