***Пошукова робота на тему:***

*Розклад функцій в степеневий ряд. Достатні умовирозкладу в ряд Тейлора. Застосування степеневих рядів до наближеного обчислення.*

**План**

* Ряди Тейлора і Маклорена
* Достатні умови розкладу в ряд Тейлора
* Приклади розкладу функцій в ряди
* Біноміальний ряд
* Обчислення означених інтегралів за допомогою рядів
* Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою рядів

**13.11. Ряди Тейлора і Маклорена**

Для функції  що має всі похідні до го порядку включно, в околі деякої точки справедлива формула Тейлора:

        (13.51)

де залишковий член  у формі Лагранжа обчислюється за формулою

                Якщо функція  має похідні всіх порядків в околі точки  то у формулі Тейлора число  можна брати як завгодно великим. Припустимо, що в околі точки  залишковий член  прямує до нуля при :

Тоді, перейшовши у формулі (13.51) до границі при одержимо безмежний ряд, який називається рядом Тейлора:

       (13.52)

Остання рівність справедлива лише в тому випадку, коли  Тоді написаний справа ряд (13.52) збігається і його сума дорівнює даній функції

            Дійсно,  де

Але  є а частинна сума ряду (13.52), її границя дорівнює сумі ряду, що стоїть в правій частині рівності (13.52). Отже, рівність (13.52) справедлива.

            Із попереднього випливає, що ряд Тейлора представляє деяку функцію тільки тоді, коли  Якщо  то ряд не представляє даної функції, хоча й може збігатися (до іншої функції).

            Якщо в ряді Тейлора покласти  то одержимо частинний випадок ряду Тейлора, який називається рядом Маклорена:

 (13.53)

            Для кожної із елементарних функцій існують такі  і , що в інтервалі  вона розкладається в ряд Тейлора (Маклорена).

**13.12. Приклади розкладу функцій в ряди**

            **1. Розклад в ряд Маклорена функції**

            Формула Маклорена для функції  має вигляд

де

            Доведемо, що при довільному фіксованому   . Дійсно,

            Якщо  фіксоване число, то знайдеться таке ціле додатне число  що

            Введемо позначення  де ; тоді можемо написати при  і т.д.

 тому що

Але величина  постійна, тобто не залежить від , а  прямує до нуля при  Тому

            Оскільки  то  при всіх

значеннях Отже, ряд Маклорена має такий вигляд:

            (13.54)

Залишковий член прямує до нуля при довільному , а тому даний ряд збігається і в якості суми має функцію  при довільному

            **2. Розклад в ряд Маклорена функції**

            Аналогічно, виходячи із формули Маклорена для функції  одержимо ряд

                                        (13.55)

який збігається при всіх значеннях  і представляє функцію

            **3. Розклад в ряд Маклорена функції**

             Формула Маклорена для функції має такий вигляд:

            Оскільки  то величина при фіксованому  обмежена ( при  і  при ), а, значить

 при довільному

            Отже, ряд Маклорена для функції  має такий вигляд:

                                        (13.56)

який для всіх значень  збігається і представляє функцію

            Замінивши в розкладі (13.565)  на , одержимо ряд

            (13.57)

            Цими рядами користуються для наближених обчислень значень функцій.

            Приклад. Обчислити  з точністю

            Р о з в ‘ я з о к. Підставляючи в ряд (13.57) замість  одержимо

Це знакочергуючий ряд. Оскільки  , то з точністю до  маємо

**13.13. Біноміальний ряд**

**1.  Розклад в ряд функції**             Розкладемо в ряд функцію  де довільне ціле число.

            Замітимо, що функція  задовольняє диференціальному рівнянню

з початковою умовою

            Знайдемо такий степеневий ряд, сума якого  задовольняє даному рівнянню з початковою умовою :

 .

            Підставляючи його в диференціальне рівняння, одержимо

 .

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях  знаходимо:

 .

Звідси одержимо коефіцієнти ряду

………………………………………..

………………………………………….. .

            Ці коефіцієнти називаються біноміальними.

            Підставляючи їх в ряд, одержимо

 .

            Якщо ціле додатне число, то, починаючи з члена, що містить  всі коефіцієнти дорівнюють нулю і ряд перетворюється в многочлен (біном Ньютона). При  дробовому або цілому від’ємному одержимо безмежний ряд. Визначимо його радіус збіжності:

Таким чином, ряд збігається при

            В інтервалі  даний ряд представляє функцію , що задовольняє даному диференціальному рівнянню з початковою умовою Оскільки дане диференціальне рівняння з початковою умовою  має єдиний розв’язок, то сума ряду тотожньо дорівнює функції , і ми маємо розклад функції в ряд:

                                                                                     (13.58)

            Ряд (13.58) називається біноміальним рядом.

            Зокрема, при  одержимо:

                                             (13.59)

            При  будемо мати:



                                                                                        (13.60)

            Біноміальний ряд (13.60) можна використовувати для наближених обчислень значень функцій із заданою точністю.

            Приклад. Обчислити  з точністю

            Р о з в ‘ я з о к. Представимо підкореневе число так  і тоді

Підставивши в ряд (13.60) замість  а  одержимо:

.

            Оскільки це знакозмінний ряд , можна оцінити за теоремою Лейбніца залишок ряду

а тому з точністю до маємо:

**2.  Розклад в степеневий ряд деяких функцій.** Застосуємо біноміальний ряд до розкладу інших функцій. Підставивши в ряд (13.59) замість  вираз одержимо:

 .

            На основі теореми про інтегрування степеневих рядів одержимо при :

          .             (13.61)

            Аналогічно, підставляючи в ряд (2.46) замість  вираз одержимо ряд

 .

            Інтегруючи даний ряд, будемо мати

          .     (13.62)

            Цей ряд збігається в інтервалі . Можна було б довести, що ряд збігається при  і що для цих значень сума ряду також дорівнює  Тоді, поклавши в ряд (13.62)   одержимо формулу для обчислення числа  :

 .



        3. **Розклад в степеневий ряд функції**

Інтегруючи рівність (13.59) в межах від   до (при ), одержимо:

           (13.63)

            Ця рівність справедлива на інтервалі

            Замінюючи в формулі (13.63)  на , одержимо ряд

      ,              (13.64)

який збігається на інтервалі

            За допомогою рядів (13.63) і (13.64) можна обчислювати логарифми чисел. що містяться між нулем та одиницею. Виведемо формулу для обчислення натуральних логарифмів довільних цілих чисел.

            Оскільки два збіжних ряди можна почленно віднімати, то, віднімаючи від рівності (13.63) почленно рівність (13.64), отримаємо:

 .

            Покладемо  тоді  При довільному натуральному  маємо  а тому

,

звідки

.

                                                                                        (13.65)

**13.14. Обчислення означених інтегралів за допомогою рядів**

Розглядаючи інтеграли, було відмічено, що існують означені інтеграли, котрі, як функції верхньої границі, не виражаються через елементарні функції в скінченому вигляді. Такі інтеграли інколи буває зручно обчислювати за допомогою рядів.

            Розглянемо декілька прикладів.

1.      Обчислити

з точністю до

            Використаємо ряд (2.41) для  Тоді, замінюючи  на  одержимо

  .

Цей ряд рівномірно збігається на всій числовій осі, тому його можна почленно інтегрувати на довільному проміжку. Інтегруючи даний ряд, одержимоЦе знакочергуючий ряд. Тому, з точністю до , маємо

            2.  Обчислити інтеграл

            Тут первісна не є елементарною функцією. Для обчислення цього інтеграла скористаємося рядом (2.42), замінивши  на  :

 .

            Інтегруючи обидві частини рівності в межах від до , одержимо:

За допомогою цієї рівності можна при довільному  обчислити даний інтеграл з довільною точністю.

3.  Обчислити  з точністю до 0.0001 , де



            Замінюючи в ряді (13.55)   на  , одержимо

            Інтегруючи почленно в межах від до   будемо мати

            Тоді

Це знакозмінний ряд і , оскільки, , то з точністю до

обчислимо

**13.15. Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою рядів**

Якщо інтегрування диференціальних рівнянь не зводиться до квадратур, то застосовують наближені методи інтегрування рівняння. Одним із таких методів є представлення розв’язку рівняння у вигляді ряду Тейлора. Сума скінченого числа членів цього ряду буде наближено представляти шуканий частинний розв’язок.

            Нехай, наприклад, потрібно знайти розв’язок диференціального рівняння другого порядку

                                                                (13.66)

що задовольняє початковій умові

                                                (13.67)

            Припустимо, що розв’язок  існує і представляється у вигляді ряду Тейлора (13.52):



            Виходячи із рівняння (13.66) та умов (13.67), можна знайти тобто значення похідних від частинного розв’язку при

            Дійсно, з умов (13.67) випливає, що

Із рівняння (13.66) одержимо:

            Диференціюючи обидві частини рівняння (13.66) по

                    ()

і підставляючи значення  в праву частину . одержимо

            Диференціюючи співвідношення  () ще раз, знайдемо:

і т. д.

            Приклад 1.   Записати три перших, відмінних від нуля, члени розкладу в степеневий ряд за степенями  розв’язку диференціального рівняння

,

що задовольняє початкову умову

            Р о з в ’ я з о к. Розв’язок даного диференціального рівняння запишемо у вигляді ряду за степенями

Із рівняння знаходимо  Диференціюючи рівняння по  одержимо

  і

  і

Тоді

            Якщо рівняння лінійне, то зручніше шукати коефіцієнти розкладу частинного розв’язку за методом невизначених коефіцієнтів.

Для цього шукаємо розв’язок у вигляді степеневого ряду

 ,

підставляємо його безпосередньо в диференціальне рівняння та  прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях  в різних частинах рівняння.

             Приклад 2. Знайти перших 5 членів розкладу в степеневий ряд розв’язку диференціального рівняння

з початковими умовами

            Р о з в ’ я з о к. Запишемо розв’язок рівняння у вигляді степеневого ряду

Продиференціюємо його почленно два рази

В силу початкових умов  Підставляємо  і  в диференціальне рівняння ( для  використаємо ряд (13.56) ):



Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях  одержимо систему рівнянь

із якої послідовно знаходимо

і т. д.

            Тоді

