Министерство образования и науки Российской Федерации

Курсовая работа

По дисциплине: Высшая математика

(Основы линейного программирования)

На тему: КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Выполнил: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Преподаватель:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Дата \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Оценка \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Подпись \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

ВОРОНЕЖ 2008

**Содержание**

1 Кратные интегралы

1.1 Двойной интеграл

1.2 Тройной интеграл

1.3 Кратные интегралы в криволинейных координатах

1.4 Геометрические и физические приложения кратных интегралов

2 Криволинейные и поверхностные интегралы

2.1 Криволинейные интегралы

2.2 Поверхностные интегралы

2.3 Геометрические и физические приложения

Список используемой литературы

**1 Кратные интегралы**

* 1. **Двойной интеграл**

Рассмотрим в плоскости Оху замкнутую область D, ограниченную линией L. Разобьем эту область какими-нибудь линиями на п частей , а соответствующие наибольшие расстояния между точками в каждой из этих частей обозначим d1, d2, ..., dn. Выберем в каждой части  точку Рi.

Пусть в области D задана функция z = f(x, y). Обозначим через f(P1), f(P2),…, f(Pn) значения этой функции в выбранных точках и составим сумму произведений вида f(Pi)ΔSi:

, (1)

называемую интегральной суммой для функции f(x, y) в области D.

Если существует один и тот же предел интегральных сумм (1) при  и , не зависящий ни от способа разбиения области D на части, ни от выбора точек Pi в них, то он называется двойным интегралом от функции f(x, y) по области D и обозначается

. (2)

Вычисление двойного интеграла по области D, ограниченной линиями  x = a, x = b ( a < b ), где φ1(х) и φ2(х) непрерывны на [a, b] (рис. 1) сводится к последовательному вычислению двух определенных интегралов, или так называемого двукратного интеграла:

Рис. 1

 =  (3)

* 1. **Тройной интеграл**

Понятие тройного интеграла вводится по аналогии с двойным интегралом.

Пусть в пространстве задана некоторая область V, ограниченная замкнутой поверхностью S. Зададим в этой замкнутой области непрерывную функцию f(x, y, z). Затем разобьем область V на произвольные части Δvi , считая объем каждой части равным Δvi , и составим интегральную сумму вида

, (4)

Предел при  интегральных сумм (11), не зависящий от способа разбиения области V и выбора точек Pi в каждой подобласти этой области, называется тройным интегралом от функции f(x, y, z) по области V:

 . (5)

Тройной интеграл от функции f(x,y,z) по области V равен трехкратному интегралу по той же области:

. (6)

**1.3 Кратные интегралы в криволинейных координатах**

Введем на плоскости криволинейные координаты, называемые полярными. Выберем точку О (полюс) и выходящий из нее луч (полярную ось).

Рис. 2 Рис. 3

Координатами точки М (рис. 2) будут длина отрезка МО – полярный радиус ρ и угол φ между МО и полярной осью: М(ρ,φ). Отметим, что для всех точек плоскости, кроме полюса, ρ > 0, а полярный угол φ будем считать положительным при измерении его в направлении против часовой стрелки и отрицательным – при измерении в противоположном направлении.

Связь между полярными и декартовыми координатами точки М можно задать, если совместить начало декартовой системы координат с полюсом, а положительную полуось Ох – с полярной осью (рис. 3). Тогда x=ρcosφ, у=ρsinφ . Отсюда , tg.

Зададим в области D, ограниченной кривыми ρ=Φ1 (φ) и ρ=Φ2 (φ), где φ1 < φ < φ2 , непрерывную функцию z = f(φ, ρ) (рис. 4).

Рис. 4

Тогда

 (7)

В трехмерном пространстве вводятся цилиндрические и сферические координаты.

Цилиндрические координаты точки Р(ρ,φ,z) – это полярные координаты ρ, φ проекции этой точки на плоскость Оху и аппликата данной точки z (рис.5).

Рис.5 Рис.6

Формулы перехода от цилиндрических координат к декартовым можно задать следующим образом:

x = ρ cosφ, y = ρ sinφ, z = z. (8)

В сферических координатах положение точки в пространстве определяется линейной координатой r – расстоянием от точки до начала декартовой системы координат (или полюса сферической системы), φ – полярным углом между положительной полуосью Ох и проекцией точки на плоскость Оху, и θ – углом между положительной полуосью оси Оz и отрезком OP (рис.6). При этом



Зададим формулы перехода от сферических координат к декартовым:

x = r sinθ cosφ, y = r sinθ sinφ, z = r cosθ. (9)

Тогда формулы перехода к цилиндрическим или сферическим координатам в тройном интеграле будут выглядеть так:

, (10)

где F1 и F2 – функции, полученные при подстановке в функцию f вместо x, y, z их выражений через цилиндрические (8) или сферические (9) координаты.

**1.4 Геометрические и физические приложения кратных интегралов**

1) Площадь плоской области S: (11)

**Пример 1.**

Найти площадь фигуры D, ограниченной линиями 

у = 2, у = 5.

Решение.

***х***

***у***

***у* = 5**

***у* = 2**

***у =* 5/*х***

***у* = 4*ех***

Эту площадь удобно вычислять, считая у внешней переменной. Тогда границы области задаются уравнениями  и



где  вычисляется с помощью интегрирования по частям:



Следовательно,



2) Объем цилиндроида, то есть тела, ограниченного частью поверхности S: z = f(x,y) , ограниченной контуром L, проекцией D этой поверхности на плоскость Оху и отрезками, параллельными оси Оz и соединяющими каждую точку контура L с соответствующей точкой плоскости Оху:

(12)

3) Площадь части криволинейной поверхности S, заданной уравнением z = f(x,y), ограниченной контуром L:

 (13)

где D – проекция S на плоскость Оху.

4) Момент инерции относительно начала координат О материальной плоской фигуры D:

 (14)

**Пример 2.**

Найти момент инерции однородной круглой пластинки

(x – a)2 + (y – b)2 < 4b2 относительно начала координат.

Решение.

В силу однородности пластинки положим ее плотность γ(х,у) = 1.

***х***

***у***

***а***

***b***

***C*(*a*,*b*)**

***a +* 2*b***

***a* – 2*b***

Центр круга расположен в точке C(a, b), а его радиус равен 2b.

Уравнения границ пластинки имеют вид





Вычислим каждый из полученных интегралов отдельно.

Для вычисления интеграла I1 сделаем замену: 

 при x = a – 2b  при x = a + 2b 



Для вычисления интеграла I2 преобразуем подынтегральную функцию по формуле разности кубов:



Тогда



Следовательно, 

Моменты инерции фигуры D относительно осей Ох и Оу:

 (15)

5) Масса плоской фигуры D переменной поверхностной плотности γ = γ (х, у):

 (16)

**Пример 3.**

Найти массу пластинки D плотности γ = ух3, если 

Решение.

***х***

***у***

**2**

**0**

**2**



Координаты центра масс плоской фигуры переменной поверхностной плотности γ = γ (х, у):

 (17)

**Пример 4.**

Найти центр тяжести однородной пластины D, ограниченной кривыми у2 = ах и 

Решение.

Так как пластина однородна, т.е. ее плотность постоянна, то можно принять ее за единицу.

***х***

***у***





****

***а***

***D***

Тогда 

Найдем массу пластины, а для этого определим абсциссу точки пересечения ограничивающих ее линий:



Соответственно



6) Объем тела V:

 (18)

**Пример 5.**

Найти объем тела V, ограниченного поверхностями 



Решение.

Найдем проекцию тела на плоскость Оху (при этом заметим, что плоскость  проектируется на эту плоскость в виде прямой х = 0):

***х***

***у***

***х + у =* 2**

***у = х*2**

**1**

Определим абсциссу точки пересечения кривых у = х2 и х + у = 2:

 посторонний корень. Тогда, используя формулу (18), получаем:



7) Масса тела V плотности γ = γ (x, y, z):

(19)

8) Моменты инерции тела V относительно координатных осей и начала координат:



 (20)



 (21)

где γ (х, y, z) – плотность вещества.

Статические моменты тела относительно координатных плоскостей Oyz, Oxz, Oxy:

 (22)

9) Координаты центра масс тела:



 

**II. Криволинейные и поверхностные интегралы**

* 1. **Криволинейные интегралы**

Рассмотрим на плоскости или в пространстве кривую L и функцию f, определенную в каждой точке этой кривой. Разобьем кривую на части Δsi длиной Δsi и выберем на каждой из частей точку Mi. Назовем d длину наибольшего отрезка кривой: .

Криволинейным интегралом первого рода от функции f по кривой L называется предел интегральной суммы , не зависящий ни от способа разбиения кривой на отрезки, ни от выбора точек Mi:

 (24)

Если кривую L можно задать параметрически:

x = φ(t), y = ψ(t), z = χ(t), t0 ≤ t ≤ T,

то способ вычисления криволинейного интеграла первого рода задается формулой

(25)

В частности, если кривая L задана на плоскости явным образом:

у=φ(х), где х1 ≤ х ≤ х2, формула (40) преобразуется к виду:

. (26)

Теперь умножим значение функции в точке Mi не на длину i-го отрезка, а на проекцию этого отрезка, скажем, на ось Ох, то есть на разность xi – xi-1 = Δxi.

Если существует конечный предел при  интегральной суммы , не зависящий от способа разбиения кривой на отрезки и выбора точек Mi, то он называется криволинейным интегралом второго рода от функции f(M) по кривой L и обозначается

. (27)

Подобным образом можно определить и криволинейные интегралы 2-го рода вида



Если вдоль кривой L определены функции P(M)=P(x, y, z), Q(M) = Q(x, y, z), R(M) = R(x, y, z), которые можно считать компонентами некоторого вектора , и существуют интегралы

,

тогда их сумму называют криволинейным интегралом второго рода (общего вида) и полагают

.

Если кривая L задана параметрическими уравнениями

x = φ(t), y = ψ(t), z = χ(t), α ≤ t ≤ β ,

где φ, ψ, χ – непрерывно дифференцируемые функции, то

. (28)

Связь между двойным интегралом и криволинейным интегралом 2-го рода задается формулой Грина:

 (29)

где L – замкнутый контур, а D – область, ограниченная этим контуром.

Необходимыми и достаточными условиями независимости криволинейного интеграла



от пути интегрирования являются:

. (30)

При выполнении условий (30) выражение Pdx + Qdy +Rdz является полным дифференциалом некоторой функции и. Это позволяет свести вычисление криволинейного интеграла к определению разности значений и в конечной и начальной точках контура интегрирования, так как



При этом функцию и можно найти по формуле

 (31)

где (x0, y0, z0) – точка из области D, a C – произвольная постоянная.

* 1. **Поверхностные интегралы**

Рассмотрим некоторую поверхность S, ограниченную контуром L, и разобьем ее на части S1, S2,…, Sп (при этом площадь каждой части тоже обозначим Sп). Пусть в каждой точке этой поверхности задано значение функции f(x, y, z). Выберем в каждой части Si точку

Mi (xi, yi, zi) и составим интегральную сумму



Если существует конечный предел при  этой интегральной суммы, не зависящий от способа разбиения поверхности на части и выбора точек Mi, то он называется поверхностным интегралом первого рода от функции f(M) = f(x, y, z) по поверхности S и обозначается

. (32)

Если поверхность S задается явным образом, то есть уравнением вида z = φ(x, y), вычисление поверхностного интеграла 1-го рода сводится к вычислению двойного интеграла:

 (33)

где Ω – проекция поверхности S на плоскость Оху.

Разобьем поверхность S на части S1, S2,…, Sп, выберем в каждой части Si точку Mi(xi, yi, zi), и умножим f(Mi) на площадь Di проекции части Si на плоскость Оху. Если существует конечный предел суммы

,

не зависящий от способа разбиения поверхности и выбора точек на ней, то он называется поверхностным интегралом второго рода от функции f(M) по выбранной стороне поверхности S и обозначается

(34)

Подобным образом можно проектировать части поверхности на координатные плоскости Оxz и Оyz. Получим два других поверхностных интеграла 2-го рода:

 и .

Рассмотрев сумму таких интегралов по одной и той же поверхности соответственно от функций P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z), получим поверхностный интеграл второго рода общего вида:

(35)

Если D, D΄ и D΄΄ - проекции поверхности S на координатные плоскости Оху, Oxz и Oyz, то

 (36)

Связь между тройным интегралом по трехмерной области V и поверхностным интегралом 2-го рода по замкнутой поверхности S, ограничивающей тело V, задается формулой Гаусса-Остроградского:

 (37)

где запись «S+» означает, что интеграл, стоящий справа, вычисляется по внешней стороне поверхности S.

Формула Стокса устанавливает связь между поверхностным интегралом 1-го рода по поверхности σ и криволинейным интегралом 2-го рода по ограничивающему ее контуру λ с учетом ориентации поверхности:

 (38)

**2.3 Геометрические и физические приложения**

1) Длина кривой.

Если подынтегральная функция f(x, y, z) ≡ 1, то из определения криволинейного интеграла 1-го рода получаем, что в этом случае он равен длине кривой, по которой ведется интегрирование:

 (39)

2) Масса кривой.

Считая, что подынтегральная функция γ (x, y, z) определяет плотность каждой точки кривой, найдем массу кривой по формуле

(40)

**Пример 6.**

Найти массу кривой с линейной плотностью  заданной в полярных координатах уравнением ρ = 4φ, где 

Решение.

Используем формулу (40) с учетом того, что кривая задана в полярных координатах:



3) Моменты кривой l:

 - (41)

* статические моменты плоской кривой l относительно осей Ох и Оу;

 - (42)

* момент инерции пространственной кривой относительно начала координат;

  - (43)

* моменты инерции кривой относительно координатных осей.

4) Координаты центра масс кривой вычисляются по формулам

 . (44)

5) Работа силы , действующей на точку, движущуюся по кривой (АВ):

, (45)

**Пример 7.**

Вычислить работу векторного поля  вдоль отрезка прямой от точки А(-2;-3;1) до точки В(1;4;2).

Решение.

Найдем канонические и параметрические уравнения прямой АВ:



1. Площадь криволинейной поверхности, уравнение которой

z = f(x, y), можно найти в виде:

 (46)

(Ω – проекция S на плоскость Оху).

7) Масса поверхности

 (47)

**Пример 8.**

Найти массу поверхности с поверхностной плотностью γ = 2z2 + 3.

Решение.

***y***

***z***

***х***

***G***

На рассматриваемой поверхности 

 Тогда



Проекцией D этой поверхности на координатную плоскость Оху является полукольцо с границами в виде дуг концентрических окружностей радиусов 3 и 4.

***х***

***у***

**4**

**3**

***D***

Применяя формулу (47) и переходя к полярным координатам, получим:



8) Моменты поверхности:

 (48) статические моменты поверхности относительно координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz;

 (49)

* моменты инерции поверхности относительно координатных осей;

 - (50)

* моменты инерции поверхности относительно координатных плоскостей;

 - (51)

* момент инерции поверхности относительно начала координат
1. Координаты центра масс поверхности:

. (52)

**Список используемой литературы**

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1999.
2. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 2000.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Математический анализ. М.: Наука, 1999.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики.- Т.2. М.: Наука, 2005.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 2001.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – Т.2. М.: Наука, 2001.
7. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа (под редекцией А.В.Ефимова и Б.П.Демидовича). – Т.2. М.: Наука, 2004.
8. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. М.: Наука, 2003.
9. Титаренко В.И., Выск Н.Д. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Теория поля. М.: МАТИ, 2006.