**Вариант 1**

**Задание 1**

Дан треугольник АВС: А(5;4), В(2;0), С(8;3). Найти:

1. длину стороны АВ;
2. внутренний угол А с точностью до градуса;
3. уравнение и длину высоты, опущенной из вершины С;
4. точку пересечения высот;
5. уравнение медианы, проведенной из вершины С;
6. систему линейных неравенств, определяющих треугольник АВС.

Сделать чертеж.

A

B

C

K

H

P

M

Решение:

1. Найдем координаты вектора :

.

Длина стороны АВ равна

.

1. Внутренний угол А будем искать как угол между векторами  и :

.

Тогда угол .

1. Прямая  проходит через точку С(8;3) и имеет нормалью вектор .

По формуле  получим уравнение высоты:

, ,

 - уравнение СК.

Длину высоты  будем искать как расстояние от точки С до прямой АВ. Эта прямая проходит через точку А и имеет направляющий вектор . По формуле  получим

, ,

 - уравнение прямой АВ.

Воспользуемся формулой .

.

1. Известно, что высоты треугольника пересекаются в одной точке Р. Уравнение высоты СК найдено. выведем аналогичным способом уравнение высоты ВН, проходящей через точку В перпендикулярно вектору .

, .

Координаты точки Р найдем как решение системы:

, , .

Р(4;6).

1. Координаты основания медианы будут:

, ,

М(3.5;2).

Уравнение медианы найдем, используя формулу , как уравнение прямой, проходящей через две точки: С и М.

, , ,

 - уравнение медианы СМ.

1. Треугольник АВС задается пересечением трех полуплоскостей, определяемых через уравнения прямых АВ, ВС, АС.

Найдем уравнения ВС и АС по формуле .

, , ,

 - уравнение ВС.

, , ,

 - уравнение АС.

 - уравнение АВ.

Чтобы определить полуплоскость, в которой лежит треугольник АВС относительно прямой АВ, подставим координаты точки С в уравнение АВ:

 4∙8-3∙3-8=32-9-8=15≥0.

Тогда полуплоскость, в которой лежит треугольник АВС относительно прямой АВ, определяется неравенством: .

Аналогично для прямых ВС и АС.

; .

; .

Таким образом, треугольник АВС определяется системой неравенств:

.

Ответ003A

1) ;

2) ;

3) ; ;

4) Р(4;6);

5) ;

6) .

**Задание 2**

Даны векторы . Доказать, что векторы  образуют базис четырехмерного пространства, и найти координаты вектора  в этом базисе.

Решение:

 - система из четырех четырехмерных векторов. Следовательно, чтобы доказать, что она является базисом пространства , достаточно доказать ее линейную независимость.

Составим и вычислим определитель матрицы, столбцами которой являются векторы :

.

Для вычисления этого определителя, разложим его по четвертому столбцу:

.

Определитель Δ≠0, следовательно  - линейно независимая система из четырех четырехмерных векторов, то есть базис пространства .

Для нахождения координат вектора  в этом базисе, разложим вектор  по базису :

 .3

Найдем  - координаты вектора  в этом базисе.

.

Решим эту систему методом Гаусса.

Поменяем местами первое и третье уравнение:



Первое уравнение, умноженное последовательно на (-1) и (2), прибавим соответственно ко второму и третьему уравнениям системы:



Поменяем местами второе и четвертое уравнения, третье разделим на 5:



Прибавим к третьему уравнению второе:



Поменяв местами третье и четвертое уравнение, получим систему треугольного вида:

 

Система имеет единственное решение. Решаем снизу вверх:



Вектор  в базисе  имеет координаты .

**Задание 3**

Найти производные функций:

а) 



  и



 

.

б)  

 

  и 

.

в)  

 

.

г) 







 

 ,

. 

**Задание 4**



1. Область определения .
2. На концах области определения: .

 - значит  - вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты, если они есть:





У функции есть горизонтальная асимптота .

3. Так как область определения не симметрична относительно 0, функция не является ни четной, ни нечетной, т. е. функция общего вида.

4. Функция периодичностью не обладает.

5. Найдем первую производную функции:

.

Решая уравнение , получим две критические точки , еще одна критическая точка .

Результаты исследования на монотонность и экстремум оформим в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | (-∞;-2) | -2 | (-2;0) | 0 | (0;1) | 1 | (1;+∞) |
| y’ | - | 0 | + | 0 | - | Не существует | - |
| y | Убывает | -80/27min | Возрастает | 0max | Убывает | Не существует | Убывает |

6. Находим вторую производную функции:



Решая уравнение , получим , 

 - это критические точки. Еще одна критическая точка .

Результаты исследования на выпуклость и точки перегиба оформим в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x |  |  |  |  |  | 1 | (1;+∞) |
| y” | - | 0 | + | 0 | - | Не существует | + |
| y | Выпукла | -2.63перегиб | Вогнута | -0.71 перегиб | Выпукла | Не существует | Вогнута |

7. Учитывая результат пункта 2 и непрерывность функции при , значения функции заполняют промежуток (-∞;+∞).

8. Пересечение с осью Ох: , , точка (0;0). Она же – точка пересечения с Оу.

9. Необходимости в дополнительных точках нет.

**Задание 5**

Применяя таблицу интегралов и метод замены переменных, найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.



Произведем замену переменной: , тогда





Проверка:





Произведем замену переменной: , тогда



Проверка:



Применяя метод интегрирования по частям, найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.



Возьмем 

Применяя формулу интегрирования по частям: , получим:



Проверка:



Применяя метод интегрирования рациональных алгебраических функций, найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.



Подынтегральное выражение представляет собой неправильную дробь. Выделим целую часть, деля числитель на знаменатель.



Следовательно: 

Разложим многочлен .

, тогда



.

Умножим обе части этого тождества на , получим



, тогда

. Решая эту систему, получим А=1.225; В=0.4.

Таким образом:



Проверка:

 

Ответ: ; ; ;

.

**Задание 6**

Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций 

Находим координаты точек пересечения двух парабол, решая систему уравнений:

 . Приравнивая правые части, получим квадратное уравнение:

. Его решения . Тогда координаты точек пересечения А(0;-1), В(1;-1).

, поэтому

 кв. ед.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций 

Находим координаты точек пересечения прямой и параболы, решая систему уравнений:

. Приравнивая правые части, получим квадратное уравнение:

. Его решения . Тогда координаты точек пересечения А(-1;1), В(0;-1).

, поэтому

 кв. ед.