***Пошукова робота на тему:***

*Квадратичні форми, їх приведення до діагонального (канонічного) вигляду. Приведення рівняння кривої другого порядку на площині до канонічного вигляду на основі теорії квадратичних форм. Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки.*

**План**

* Квадратична форма, її канонічний вигляд.
* Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду.
* Зведення загального рівняння лінії (поверхні) до канонічного вигляду.
* Модель Леонт’єва багатогалузевої економіки.
* Лінійна модель торгівлі.

Квадратичні форми і зведення їх до канонічного вигляду

Квадратична форма, її канонічний вигляд

*Квадратичною формою* називається однорідний многочлен другого степеня відносно змінних    Квадратична форма  має вигляд

    (4.20)

причому   - дійсні коефіцієнти.

Наприклад, квадратична форма двох змінних  і   має такий вигляд:

оскільки

   Якщо через позначити матрицю а через  матрицю-стовпчик  то рівність (4.20) можна записати в матричній формі

  (4.20/)

де

   Через те, що в матриці   , матриця  є симетричною. Читачеві рекомендується перевірити формулу (4.20) звівши її до вигляду (4.19), користуючись явними записами матриць .

   Симетрична матриця називається матрицею квадратичної форми. Якщо матриця має діагональний вигляд, то такий вигляд квадратичної форми називається *канонічним виглядом.*

   Нехай  тоді канонічний вигляд квадратичної форми буду таким:

   (4.21)

   Приведемо без доведення дві теореми про канонічний вигляд квадратичної форми ( доведення цих теорем див., наприклад, в підручнику Д.В.Беклемишева. Курс аналитической геометри и линейной алгебры ).

   Теорема 1. Для кожної квадратичної форми існує базис, в якому вона має канонічний вигляд.

   Теорема 2. (*закон інерції квадратичних форм*). Число додатних і від’ємних коефіцієнтів в канонічному вигляді квадратичної форми не залежить від вибору базису, в якому вона приведена до канонічного вигляду.



4.4.2. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду

   У формулі (4.20/) виконаємо заміну , де   , де



Матриця, обернена до якої співпадає з транспонованою, називається *ортогональною.*

Із заміни  маємо ( при транспонуванні добутку матриць змінюється порядок перемноження матриць). Підставивши в (4.22) замість  їх вирази, одержимо

де .

   Отже, , де .

   Теорема.   Якщо матриця  симетрична, то симетричною є і матриця .

   Д о в е д е н н я. .  Згідно з означенням симетричної матриці  теж симетрична, що і треба було довести.

   З теореми і заміни  випливає, що є матрицею квадратичної форми, після заміни змінної. Оскільки  - ортогональна матриця, тобто , то . Матрицю  можна  підібрати так (див.п.4.3.4, властивість 60), щоб

   (4.22)

Числа  є власними значеннями матриці .

Якщо рівняння (4.19) має всі різні корені, то розв’язавши систему рівнянь (4.18) для кожного , одержимо  взаємно ортогональних власних векторів:

Оскільки матриця - ортогональна, то , тобто

     (4.23)

      Зауваження. Після знаходження власних значень матриці  із (4.19) і розв’язання системи рівнянь (4.18) одержимо власні вектори , які взагалі кажучи, не будуть одиничними. В такому разі з них можна одержати одиничні, поділивши кожний з них на його довжину  Після такої операції уже будуть виконуватись  умови (4.23). У нових змінних задана квадратична форма набуває вигляду

.

Приклад 1 .  Звести квадратичну форму      до канонічного вигляду і знайти перетворення, з допомогою якого здійснюється це зведення .

Р о з в ’я з о к.  Матриця  квадратичної форми така:



Характеристичне рівняння має вигляд(всі власні значення різні).

   Тому .

   Тепер знайдемо елементи матриці :

для  маємо , тобто ;

для  ;

для  ,

 тобто  .

   Перетворення координат:

   ;

       ;

     .

Припустимо, що деякий корінь  рівняння (4.19) є -кратним. Підставивши в систему (4.18) замість  корінь , одержимо одномірну систему, що має   лінійно незалежних розв’язків. Це означає, що система (4.18) зведеться до  рівнянь. Знайдемо який-небудь ненульовий розв’язок цієї системи і запишемо відповідний йому вектор .Вважатимемо його зведеним  до одиничного. Якщо він спочатку був неодиничним, то діленням його на  одержимо одиничний вектор. Щоб знайти наступний вектор, додамо до  рівнянь системи (4.18) ще одне рівняння, що виражає ортогональність нового  шуканого вектора до вже знайденого  . Тоді одержимо систему з  рівнянь. Знайшовши її розв’язок, перейдемо до знаходження третього вектора, що відповідає власному значенню . Для цього додамо до основних  рівнянь системи ще два рівняння, що виражають ортогональність нового вектора до знайдених двох, і так далі - поки не побудуємо всю сукупність  одиничних взаємно ортогональних векторів, що відповідають кореню  рівняння (4.19) кратності . У частинному випадку, коли  і рівняння (4.19) має двократний корінь , то, знайшовши з (4.18) один вектор , другий  знайдемо з умови . У випадку, коли рівняння (4.19) має трикратний корінь  при , то знайшовши з системи (4.18) один вектор , другий знайдемо з умови , а третій  знайдемо з умови ,  тобто   є векторним добутком векторів  і  .



**4.4.3. Зведення загального рівняння поверхні (лінії) другого порядку до канонічного вигляду**

   Квадратичними формами від трьох змінних описується ряд поверхонь тривимірного простору. Вивчення їх властивостей, наприклад, однопорожнинного гіперболоїда, привело до можливості вирішення цікавих, високої міцності технічних конструкцій при малих затратах матеріалу і простоти їх реалізації. Прикладами таких споруд є конструкції інженера В.Г.Шухова (1853-1939) (водонапірний резервуар у м. Конотопі Сумської області, телевежа Шухова у Москві, щогли, башти, опори тощо).

   У сучасний період, коли інтенсивно використовуються ЕОМ, навіть при обробці складних поверхонь важливих деталей машин і установок за допомогою копіювально-фрезерних верстатів, конструктор прагне задавати контури деталей аналітичними поверхнями. Питання зведення заданої матриці до діагональної форми і розшукання матриці, за допомогою якої здійснюється це зведення, є алгебраїчним аналогом того факту сучасної квантової механіки, згідно з яким матрична механіка Гейзенберга по суті рівнозначна хвильовій механіці Шредінгера. Різниця тут полягає лише в тому, що в подібних питаннях доводиться мати справу з простором, що має нескінченну кількість вимірів. Але для вивчення таких питань обмежитись лише рамками звичайної алгебри неможливо, потрібний вихід в апарат аналізу.

Загальне рівняння поверхні другого порядку має вигляд

 (4.24)

a загальне рівняння лінії в площині

(4.25)

Зведення цих рівнянь до канонічної форми здійснюється за два етапи.

   І. Зведення квадратичної форми

до канонічного вигляду     (4.26)

   (4.27)

   В результаті здійснення першого кроку рівняння (4.24) набуває вигляду

    4.28)

2. Другий крок полягатиме в тому, щоб паралельним перенесенням системи координат позбутися або всіх членів з першими степенями , і , або двох із них, або лише одного. Рівняння (4.25) спрощується так само. Різниця лише в тому, що вказані два етапи будуть значно простішими, бо в (4.25) маємо справу не з трьома, а з двома змінними.

Питання про спрощення квадратичних форм розглядалося в попередньому параграфі..

Перший етап.  Поворот системи координат.

Знаходимо корені характеристичного рівняння:

Нехай коренями цього рівняння (власними значеннями) відносно  є числа .

Тоді рівняння (4.24) можна записати у вигляді (4.28) після того, коли буде знайдене ортогональне перетворення, яке  переводить квадратичну форму (4.26) в (4.27). Знаходження ортогонального перетворення потрібне для того, щоб обчислити коефіцієнти   в (4.28).    Ортогональне перетворення  з геометричної точки зору є повертанням системи координат на такий кут, щоб осі  координат збігалися з осями симетрії поверхні, якщо вона має три осі симетрії. У випадках двох осей симетрії - щоб дві з осей координатної системи збіглися з осями симетрії, у випадку однієї з осей симетрії - з однією з осей координат.

Другий етап. Паралельне перенесення системи координат.

   Тепер матимемо справу з рівнянням (4.28). У ньому мусить бути хоч  одне з  відмінним від нуля. Для спрощення рівняння (4.28) здійснимо паралельне перенесення системи координат за формулами

         (4.29)

   Для цього формули  (4.29) підставимо в (4.28). Після елементарних перетворень одержимо:

     (4.30)

Якщо кожне з  не дорівнює нулю, то члени з  можна перетворити в нуль, підібравши   так, щоб .

 Звідси знаходимо

   У цьому випадку рівняння поверхні набуває вигляду

   (4.31)

де

   Поверхня (4.31) буде або еліпсоїдом, або однопорожнинним гіперболоїдом (дійсним чи уявним), або двопорожнинним гіперболоїдом, або єдиною точкою, або конусом, або уявним еліпсоїдом. Читачеві пропонується розібратися в цьому самостійно.

   Припустимо, що серед величин  одна, наприклад , дорівнює нулю. Тоді в (4.30)  неможливо знищити коефіцієнт при (чому?). Тому для визначення  потрібно прирівняти до нуля коефіцієнти при  і   , а також вільний член.

   В результаті одержимо поверхню

   У цьому випадку будемо мати або еліптичний, або гіперболічний параболоїд, або пару площин, що перетинаються, або пару уявних площин, що перетинаються по спільній дійсній осі. Якщо в (4.31)  , то матимемо ще крім того еліптичний циліндр (дійсний або уявний), гіперболічний циліндр. І тут читачеві слід вияснити, за яких умов можуть трапитись вказані випадки.

   Нехай серед величин  дві, наприклад  і  , дорівнюють нулю. Тоді (4.30) набере вигляду

(4.32)

   Тут, звичайно, можна   підібрати так, щоб . Тоді рівність (4.32) запишеться так:

      (4.33)

   Далі здійснимо підстановку

Вона зведе останню рівність до такої:

.

Звідси

      (4.34)

   Поверхня (4.34) є параболічним циліндром з твірними, паралельними осі  , а його напрямною є парабола.

Якщо в (4.34) , то одержимо рівняння

      .

   При  це рівняння описує пару уявних паралельних площин, а при   - пару дійсних паралельних площин.

   Якщо в (4.33) , то (4.33) - пара площин, що збігаються.

   Зведення рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду здійснюється за тією ж  схемою, що й рівняння (4.24). Різниця лише в тому, що змінних тут на одну менше, а тому характеристичне рівняння буде не кубічним, а квадратним; систем рівнянь для знаходження власних векторів буде лише дві і при тому ще кожна система рівнянь складатиметься не з трьох рівнянь, а з двох.

   Приклад 2.  Визначити, яку криву визначає рівняння

    і побудувати її.

   Р о з в ’ я з о к.  Характеристичне рівняння має вигляд

   Розв’язавши це рівняння, одержимо . Знайдемо тепер власні вектори. Якщо , маємо таку систему рівнянь для знаходження власного вектора :



Звідси знаходимо .

   При  маємо систему рівнянь

      .

   Зводимо власні вектори і   до одиничних:

     .

Отже, перетворення координат записується так:

.

   Лінійна частина рівняння набуває вигляду

Задане рівняння стає таким:

   Якщо здійснити в цьому рівнянні паралельне перенесення системи координат за формулами , то, прирівнявши до нуля коефіцієнти при   і    і розв’язавши відповідну систему рівнянь одержимо



   Рівняння відносно  і набирає найпростішої (канонічної ) форми:

    еліпс.

Отже,  дане рівняння є еліпсом (рис. 4.1).

  Рис. 4.1

   Приклад 3.   Визначити, яку поверхню визначає рівняння

.

   Р о з в ’ я з о к.   Характеристичне рівняння має вигляд

   .

Коренями цього рівняння є .

Власні вектори:

   для

для

Третій власний вектор знайдемо з умови



Одиничні вектори:

Перетворення координат:

Підставивши ці формули в лінійну частину рівняння поверхні другого порядку, одержимо

У нових координатах рівняння буде таким:

Паралельне перенесення за формулами     приведе до рівняння



(однопорожнинний гіперболоїд).

   Паралельно з цим було знайдено і координати початку координатної системи  по відношенню до системи координат :



**4.5. Застосування елементів лінійної алгебри в економіці**

   Для розв’язування багатьох економічних задач використовуються елементи алгебри матриць, теорії систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Особливо при розробці і використання баз даних: при роботі з ними майже вся інформація зберігається і обробляється в матричній формі.

**4.5.1. Модель Леонт’єва багатогалузевої економіки**

   Макроекономіка функціонування багатогалузевого господарства вимагає балансу між окремими галузями. Кожна галузь, з одного боку, є виробником, а з іншого – споживачем продукції, що випускається іншими галузями. Виникає досить непроста задача розрахунку зв’язку між галузями через випуск і споживання продукції різного виду. Вперше ця проблема була сформульована у вигляді математичної моделі в працях відомого американського економіста В.Леонт’єва в 1936 р., який спробував проаналізувати причини економічної депресії США 1929-1932 рр. Ця модель основана на алгебрі матриць і використовує апарат матричного аналізу.

   Для простоти будемо вважати, що виробнича сфера господарства представляє собою  галузей, кожна з яких виробляє свій однорідний продукт. Для забезпечення виробництва кожна галузь потребує продукцію інших галузей. Процес виробництва розглядається за деякий період, наприклад, за рік.

   Введемо позначення:

загальний об’єм продукції ої галузі (її валовий випуск);

об’єм продукції ої галузі, що споживається  ою галуззю при виробництві об’єму продукції ;

об’єм продукції ої галузі, що призначена для реалізації (споживання) в невиробничій сфері, або так званий продукт кінцевого споживання. До нього відносяться особисте споживання громадян, задоволення суспільних потреб, утримання державних інститутів і т.д.

Балансовий принцип зв’язку різних галузей промисловості полягає в тому, що валовий випуск ої галузі повинен дорівнювати сумі об’ємів споживання в виробничій і невиробничій сферах. В найпростішій формі (гіпотеза лінійності) балансові співвідношення мають вигляд

     (4.35)

   Рівняння (4.35) називаються *рівняннями балансу*.

   В. Леонт’євим, на основі аналізу економіки США в період перед другою світовою війною, був встановлений важливий факт: на протязі тривалого часу величини  змінюються дуже мало, а тому їх можна вважати постійними. Це явище стає зрозумілим в світлі того, що технологія виробництва залишається на одному й тому ж рівні тривалий час, а, значить, об’єм споживання ою галуззю продукції ої галузі при виробництві своєї продукції об’єму  є технологічна константа.

   В силу вказаного факту можна зробити таке припущення: для виробництва продукції ої галузі об’му потрібно використовувати продукцію ої галузі об’єму де постійні числа. При такому припущенні  технологія виробництва приймається лінійною, а саме це припущення називається гіпотезою лінійності. При цьому числа називаються коефіцієнтами прямих затрат. Згідно з гіпотезою лінійності

    (4.36)

   Тоді рівняння (4.35) можна записати в матричній формі

(4.37)

де вектор-стовпець об’єму виробленої  продукції (вектор валового випуску), вектор-стовпець об’єму продукції кінцевого споживання (вектор кінцевого споживання), матриця коефіцієнтів прямих затрат:

   (4.38)

   Переважно співвідношення (4.37) називають *рівнянням лінійного міжгалузевого балансу.* Разом з описанням матричного представлення (4.38) це рівняння носить назву *моделі Леонт’єва*.

   Рівняння міжгалузевого балансу можна використовувати вдвох випадках: 1) коли відомий вектор валового випуску , а потрібно розрахувати вектор кінцевого споживання  2) з метою планування із наступним формулюванням задачі: для періоду відомий вектор кінцевого споживання  і потрібно визначити вектор валового випуску.

   Система (4.37) має ту особливість, що всі елементи матриці  і векторів  повинні бути невід’ємними.

   Матриця  всі елементи якої невід’ємні, називається *продуктивною*, якщо для довільного вектора  з невід’ємними компонентами існує розв’язок рівняння (4.37) – вектор всі елементи якого невід’ємні. В такому випадку і модель Леонт’єва називається продуктивною.

   Для рівнянь типу (4.37) розроблена відповідна математична теорія дослідження розв’язку і його особливостей. Приведемо без доведення важливу теорему про продуктивність матриці

   Теорема. Якщо для матриці  з невід’ємними елементами і деякого вектора  з невід’ємними компонентами рівняння (4.37) має розв’язок з невід’ємними компонентами, то матриця продуктивна.

   Очевидно, що розв’язок (4.37) має  вигляд :

   (4.39)

   Матриця   називається *матрицею повних затрат*.

   Існує декілька критеріїв продуктивності матриці Приведемо два з них.

   Перший критерій продуктивності. Матриця продуктивна тоді і тільки тоді, коли матриця  існує і її елементи невід’ємні.

Другий критерій продуктивності. Матриця  з невід’ємними елементами продуктивна, якщо сума елементів за довільним її стовпцем (рядком) не перевищує одиниці:

 (4.40)

причому хоча б для одного стовпця (рядка) ця сума строго менша одиниці.

   Приклад. 1. Дані балансу трьох галузей промисловості за деякий період записані в табл.1. Потрібно знайти об’єм валового випуску продукції, якщо кінцеве споживання за галузями збільшити відповідно до 60, 70 і 30.

Таблиця 1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| №п/п | Галузь | Споживання | Кінце-вийпродукт | Вало-вий випуск |
| 1 | 2 | 3 |
| 123 | Добування і переробка вуглеводівЕнергетикаМашинобуду-вання | 51020 | 351010 | 202010 | 406010 | 10010050 |

   Р о з в ‘я з о к. Випишемо вектори валового випуску і кінцевого споживання та матрицю коефіцієнтів прямих затрат. Згідно формул (4.36) і (4.38),

   Матриця задовольняє обидва критерії продуктивності. У випадку заданого збільшення кінцевого споживання новий вектор кінцевого продукту буде мати вигляд .

Потрібно знайти новий вектор валового випуску , що задовольняє співвідношенням балансу в припущенні, що матриця не зміниться. В такому випадку компоненти  невідомого вектора  знаходяться із системи рівнянь, яка в матричній формі має вигляд (4.37)  або де матриця  має вигляд

   Звідси розраховується новий вектор як розв’язок рівняння

Знайдемо обернену матрицю (матрицю повних затрат )  (обчислення проводимо з точністю до третього знаку):

.

Зауважимо, що знайдена обернена матриця задовольняє першому критерію продуктивності матриці

   Тепер вичислюємо вектор валового випуску

   Таким чином, для того щоби забезпечити задане збільшення компонент вектора кінцевого продукту, необхідно збільшити відповідні валові випуски: добування і переробку вуглеводів на 52,2%, рівень енергетики – на 35,8% і випуск машинобудування – на 85% в порівнянні з початковими величинами, що приведені в табл.1.

**4.5.2. Лінійна модель торгівлі**

   Процес взаємних закупок товарів аналізується з

використанням понять власного числа і власного вектора матриці. Припустимо, що бюджети  країн  витрачаються на покупку товарів. Розглянемо *лінійну модель обміну*, або *модель міжнародної торгівлі.*

Нехай доля бюджету яку а країна витрачає на закупку товарів у ої країни. Введемо матрицю коефіцієнтів

    .    (4.41)

Тоді, якщо весь бюджет витрачається тільки на закупки всередині країни і зовні неї (це можна трактувати як торговий бюджет), справедлива рівність

   (4.42)

   Матриця (4.41) із властивістю (4.42) називається *структурною матрицею торгівлі.* Для ої країни загальна виручка від внутрішньої і зовнішньої торгівлі виражається формулою

   (4.43)

   Умова збалансованої (бездефіцитної) торгівлі формулюється природнім чином: для кожної країни її бюджет повинен бути не більшим за виручку від торгівлі, тобто або

    (4.44)

   Покажемо, що в умові (4.44) можливий тільки знак рівності. Дійсно, додавши всі ці нерівності і згрупувавши доданки з величинами бюджетів одержимо

Неважко замітити, що в дужках стоять суми елементів матриці за її  стовпцями , що дорівнюють одиниці згідно умови (4.42). Отже, ми одержали нерівність а це означає, що можливий тільки знак рівності.

Таким чином,  із (4.44) ми одержимо

       (4.45)

   В матричній формі систему рівнянь (4.45) запишеться так:

   або  (4.46)

де вектор бюджетів, кожна компонента якого характеризує бюджет відповідної країни. Це рівняння означає, що власний вектор структурної матриці  що відповідає її власному значенню  складається із бюджетів країн бездефіцитної міжнародної торгівлі.

   Приклад 2.  Структурна матриця торгівлі чотирьох країн має вигляд

   Знайти бюджети цих країн, що задовольняють збалансованій бездефіцитній торгівлі при умові, що сума бюджетів задана:

   Р о з в ‘ я з о к. Необхідно знайти власний вектор , що відповідає власному значенню  тобто знайти ненульові розв’язки системи (4.46)

   Оскільки ранг цієї системи дорівнює трьом, то одна невідома буде вільною невідомою, а інші через неї виражаються. Розв’язуючи систему методом Гаусса, знаходимо компоненти власного вектора

   Підставивши знайдені значення в задану суму бюджетів, визначимо величину

Звідси остаточно отримаємо шукані величини бюджетів країн при бездефіцитній торгівлі:

