О сугубо математических противоречиях

Океанов Е.Н.

Пусть некоторая скалярная величина Q определена, как функция трех независимых переменных x,y,z:

$$Q = Q(x, y, z) \quad (1)$$

Тогда классическое представление ее дифференциала имеет вид:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz \quad (2)$$

Правую часть этого выражения уместно рассматривать, как скалярное произведение двух векторов:

$$dQ = \mathbf{grad}\,Q \cdot d\,\mathbf{r}, \quad (3)$$

один из которых является вектором *градиента* скалярной величины Q:

$$\mathbf{grad}\,Q = \mathbf{i}\frac{\partial Q}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial Q}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial Q}{\partial z} \quad (4)$$

в прямоугольном пространстве с базисом **i,j,k**. Вторым вектором является дифференциал радиус-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y + \mathbf{k}\,z$, определяющего, очевидно, в этом пространстве точку на поверхности, в которой градиент (4) и является нормалью к этой поверхности.

Производная скалярной величины Q по некоторому параметру t имеет, соответственно, вид:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \mathbf{grad}\,Q \cdot \frac{d\,\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{grad}\,Q \cdot \mathbf{v}, \quad (5)$$

где в качестве векторного сомножителя градиента выступает вектор скорости $\mathbf{v} = \frac{d\,\mathbf{r}}{dt}$, если параметром t является время. Этот вектор принято считать вектором *скорости точки*, которую определяет радиус-вектор. На самом деле это вектор *геометрической скорости* радиус-вектора. Ведь сугубо математически скорость есть мера *изменения радиус-вектора*, а не точки, которая остается *неизменной*, несмотря на изменение ее положения в пространстве.

Легко заметить, что непосредственно из выражения (3) следует очевидное соотношение:

$$\mathbf{grad}\,Q = \frac{dQ}{d\,\mathbf{r}} \quad (6)$$

С точки зрения классической математики это соотношение не вызывает сомнений в корректности. Но с точки зрения векторного исчисления, которое опирается на *линейную* векторную алгебру, это соотношение оказывается некорректным, поскольку его правая часть выражает *нелинейную операцию деления скаляра на вектор*. А такая операция выходит за рамки допустимых в линейной векторной алгебре. Следовательно, надо либо примириться с этим неприятным *противоречием*, либо найти способ его корректного разрешения. Второе полезнее, но придется искать этот способ издалека.

В векторном исчислении градиент, дивергенция и ротор определяются как объемные производные скалярного или векторного поля, получаемые следующим образом (цитата из справочника [1]): «*1) точка* **r** *поля* U(**r**) *или* **W**(**r**) *окружается замкнутой оболочкой* Σ*; 2) вычисляется интеграл по поверхности* **Σ** $\left(\oint_\Sigma U \cdot d\,\mathbf{S},\quad \oint_\Sigma \mathbf{W}\cdot d\,\mathbf{S},\quad \oint_\Sigma \mathbf{W}\times d\,\mathbf{S}\right)$*; 3) находится предел отношения этого интеграла к объему* V*, заключенному внутри этой поверхности* Σ*, если этот объем стремится к нулю*» в смысле стремления к нулю не величины объема, а диаметра тела в качестве расстояния между двумя наиболее удаленными точками этого тела. Цитата приводится потому, что в ней уже вербально определен, в сущности, *локальный объем* V*, как часть пространства, ограниченная замкнутой поверхностью* **S**. Уместно заметить, кстати, что здесь оболочка Σ отличается от поверхности **S** наличием *толщины*, которая у поверхности отсутствует. С физической точки зрения стягивание объема в точку – а именно таков смысл упомянутого стремления объема к нулю – процедура не без последствий: либо оболочка лопнет, либо сил не достанет. Хотя, конечно, сугубо математически – то есть, мысленно – можно делать с объемом все, что угодно. Но должна, все-таки, быть дистанция между математикой (субъективным отображением реальности) и физикой (той самой объективной реальностью). Важно, однако, что в цитируемом определении остается достаточно неопределенным объем, который и должен стягиваться в точку. Поэтому для начала следует уточнить понятие объема, а заодно и понятие замкнутой поверхности, чтобы не формально, а по существу и со знанием дела, «стягивать» в точку этот объем, или производить с ним какие-либо иные действия, хотя бы и теоретически. При этом полезно заметить, что в цитируемом определении упоминается не какой-либо объем вообще, *а объем внутри замкнутой поверхности*. Здесь и далее часть пространства, заключенная *внутри* замкнутой поверхности называется *локальным* объемом V.

По классической математике дифференциал локального объема в виде функции координат $V = V(x, y, z)$ выражается через его частные производные в виде:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = \mathbf{grad}\, V \cdot d\,\mathbf{r}\,, \quad (7)$$

откуда непосредственно следует соотношение:

$$\mathbf{grad}\, V = \frac{dV}{d\,\mathbf{r}} \quad (8)$$

Это соотношение, как и соотношение (6), интересно тем, что явным образом выражает *нелинейную* операцию деления на вектор, которой нет, и не может быть места в *линейной* векторной алгебре. А именно эта алгебра является основой теории поля. В равенстве (8) ключевым является отношение:

$$\frac{1}{d\,\mathbf{r}}$$

Поэтому надлежит подробно рассмотреть именно эту операцию в виде общего анализа вектора $\mathbf{B}$, обратного заданному вектору $\mathbf{A} = \mathbf{i}\,A_x + \mathbf{j}\,A_y + \mathbf{k}\,A_z$. Очевидно, что оба вектора должны быть связанны соотношением:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\mathbf{i}\,A_x + \mathbf{j}\,A_y + \mathbf{k}\,A_z} \quad (9)$$

Поскольку оба вектора должны находиться в одном пространстве (общий базис), постольку левую часть этого соотношения можно выразить через неизвестные координаты B_n, подлежащие определению через координаты A_n обратного вектора:

$$\mathbf{i}\,B_x + \mathbf{j}\,B_y + \mathbf{k}\,B_z = \frac{1}{\mathbf{i}\,A_x + \mathbf{j}\,A_y + \mathbf{k}\,A_z} \quad (10)$$

Но это значит, что компоненты исходного и обратного векторов имеют одинаковое направление, поскольку орты и представляют собой векторы направления. А это, в свою очередь, означает, что взаимно-обратными могут быть только (ненулевые!) координаты рассматриваемых векторов. То есть, должны выполняться равенства:

$$B_x = \frac{1}{A_x}, \qquad B_y = \frac{1}{A_y}, \qquad B_z = \frac{1}{A_z} \quad (11)$$

На этом основании единственно возможной корректной *нелинейной* интерпретацией соотношения (9) может быть равенство:

$$\mathbf{i}\,B_x + \mathbf{j}\,B_y + \mathbf{k}\,B_z = \mathbf{i}\frac{1}{A_x} + \mathbf{j}\frac{1}{A_y} + \mathbf{k}\frac{1}{A_z} \quad (12)$$

Это равенство здесь понимается как определение вектора, обратного данному вектору. Но тогда, по аналогии, правую часть соотношения (8) можно преобразовать к виду:

$$\frac{dV}{d\,\mathbf{r}} = dV\frac{1}{\mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz} = dV\frac{\mathbf{i}\,dy\cdot dz + \mathbf{j}\,dx\cdot dz + \mathbf{k}\,dx\cdot dy}{dx\cdot dy\cdot dz} \quad (13)$$

и числитель в правой части соотношения (13) выразить через векторные произведения:

$$\mathbf{i}\,dy\cdot dz + \mathbf{j}\,dx\cdot dz + \mathbf{k}\,dx\cdot dy = \mathbf{j}\,dy\times\mathbf{k}\,dz + \mathbf{k}\,dz\times\mathbf{i}\,dx + \mathbf{i}\,dx\times\mathbf{j}\,dy \quad (14)$$

Если на компонентах дифференциала $d\,\mathbf{r}$ радиус-вектора построить параллелепипед (пусть это будет некий *микроскопический*, скорее даже бесконечно малый параллелепипед), то объем этого параллелепипеда оказывается *минимальным объемом, обусловленным только и исключительно дифференциалом (приращением) радиус-вектора*. Этот объем и принимается за *локальный элементарный объем*:

$$dV = dx\cdot dy\cdot dz\,, \quad (15)$$

ограниченный в данном случае замкнутой поверхностью из 6 граней этого микро-параллелепипеда. Из выражения (14) следует, что каждое векторное произведение в его правой части есть вектор площадки на координатной плоскости, соответствующей одной из трех смежных граней упомянутого параллелепипеда. Если выражение (14) понимать, как векторную характеристику замкнутой поверхности, ограничивающей объем упомянутого параллелепипеда, то эта поверхность оказывается *минимальной поверхностью, обусловленной только и исключительно дифференциалом (приращением) радиус-вектора.* Эта векторная характеристика и принимается за *элементарный вектор* $d\,\mathbf{S}$ *замкнутой поверхности* элементарного объема:

$$d\,\mathbf{S} = \mathbf{i}\,dy\cdot dz + \mathbf{j}\,dx\cdot dz + \mathbf{k}\,dx\cdot dy \quad (16)$$

Легко заметить, что эта минимальная поверхность представляет собой бесконечно малую плоскую площадку, нормаль к которой и выражает вектор (16). При этом выражение (13) преобразуется к виду:

$$\frac{dV}{d\,\mathbf{r}} = d\,\mathbf{S} = \mathbf{grad}\,V \quad (17)$$

и его следует понимать, как математическое утверждение о том, что в общем случае *дифференциал замкнутой поверхности есть градиент локального объема, ограниченного этой замкнутой поверхностью*. Этот дифференциал по своей сущности является *вектором линейной плотности локального объема*. Важным следствием выражения (17) является очевидный *критерий незамкнутой поверхности*:

$$\frac{dV}{d\,\mathbf{r}} = \infty \quad (18)$$

Кроме того, в учебниках и справочной литературе встречается выражение дифференциала объема в виде:

$$dV = \mathbf{S}\cdot d\,\mathbf{r}\,,$$

которое теперь можно уверенно считать некорректным. Корректным оказывается только равенство:

$$dV = d\,\mathbf{S}\cdot d\,\mathbf{r} \quad (19)$$

Действительно, равенство $dV = \mathbf{S}\cdot d\,\mathbf{r}$ может быть корректным только при условии линейной зависимости поверхности от своего дифференциала, а такая поверхность является плоскостью и замкнутой быть не может, почему и исключается корректность этого равенства. Кроме того, легко заметить, что в равенстве (19) обе его части есть величины *третьего порядка малости*, тогда как в равенстве $dV = \mathbf{S}\cdot d\,\mathbf{r}$ левая часть также величина третьего порядка малости, а правая часть есть величина первого порядка малости, что указывает на очевидную некорректность этого равенства.

На основании равенства (17) дифференциал радиус-вектора можно понимать, как производную локального объема по ограничивающей его замкнутой поверхности и представить в виде:

$$d\,\mathbf{r} = \frac{dV}{d\,\mathbf{S}} \quad (20)$$

Тогда дифференциал радиус-вектора по своей сущности оказывается вектором *поверхностной плотности локального объема*. Соответственно, обратное отношение:

$$\frac{1}{d\,\mathbf{r}} = \frac{d\,\mathbf{S}}{dV} \quad (21)$$

оказывается производной замкнутой поверхности по локальному объему, ею ограниченному, и выражает вектор *объемной плотности замкнутой поверхности*.

Равенство (12), определяя вектор, обратный данному вектору, позволило непротиворечиво обосновать нелинейную операцию (13) *скалярного деления* на вектор. Таким образом, рассмотренное противоречие разрешено, как представляется, корректным способом и можно перейти к другому противоречию.

Пусть в упомянутом выше пространстве некоторая векторная величина **W** определена в виде функции трех независимых переменных (координат):

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}(x, y, z) \quad (22)$$

Классическое выражение дифференциала этой величины имеет вид:

$$d\,\mathbf{W} = \frac{\partial\,\mathbf{W}}{\partial x}dx + \frac{\partial\,\mathbf{W}}{\partial y}dy + \frac{\partial\,\mathbf{W}}{\partial z}dz \quad (23)$$

Как известно, *дивергенция* вектора **W** является *скалярной* величиной D, которую представляет математическое соотношение:

$$D = div\,\mathbf{W} = \mathbf{i}\frac{\partial\,\mathbf{W}}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\,\mathbf{W}}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\,\mathbf{W}}{\partial z} \quad (24)$$

На этом основании дифференциал (23) можно представить в виде очевидного произведения скаляра на вектор:

$$d\,\mathbf{W} = D \cdot d\,\mathbf{r} = div\,\mathbf{W} \cdot d\,\mathbf{r} \quad (25)$$

(*Здесь дивергенция обозначена символом* D). Непосредственно из выражения (25) следует очевидное равенство:

$$\frac{d\,\mathbf{W}}{d\,\mathbf{r}} = div\,\mathbf{W} = D \quad (26)$$

Как и равенство (8), оно корректно с точки зрения классической математики, но по меркам *линейной* векторной алгебры его нельзя было признать корректным, поскольку оно выражает *нелинейную* операцию деления вектора на вектор. Но теперь сомнение в корректности снимается и равенство (26) здесь считается справедливым для любого вектора.

Между прочим, полезно отметить, что по своей сущности векторы (6) и (8) представляет собой линейную плотность скаляра, а скаляр (26) – линейную плотность вектора.

Как известно, всякий вектор может быть выражен через его координаты. Для заданного вектора (22) координаты по осям можно обозначить символами W_x, W_y, W_z и тогда его выражение через координаты принимает вид:

$$\mathbf{W} = \mathbf{i}W_x + \mathbf{j}W_y + \mathbf{k}W_z \quad (27)$$

Гамильтон даже ловко *придумал* символический вектор ∇ с символическими же координатами:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \quad (28)$$

Скалярное произведение символического вектора (28) с заданным вектором (27) в теории поля и называется дивергенцией заданного вектора:

$$div\,\mathbf{W} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\mathbf{i}W_x + \mathbf{j}W_y + \mathbf{k}W_z\right) = \nabla\cdot\mathbf{W} \qquad (29)$$

Очевидным результатом этого произведения является *формальная* сумма:

$$div\,\mathbf{W} = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z} \qquad (30)$$

Формальной эта сумма здесь названа потому, что каждое слагаемое этой суммы является *вполне определенной* информацией о заданном векторе в *строго определенном* направлении пространства. В частности, такой информацией является линейная плотность вектора вдоль соответствующего координатного направления. То есть, это *различные*, но вполне *определенные* и важные информационные признаки вектора. Однако их арифметическая сумма оказывается *общей*, но *неопределенной* информацией о векторе – некое число в качестве суммы плотностей, в котором утрачена важная индивидуальность. А такая информация превращается в свою противоположность – *дезинформацию*. Поэтому скаляр в качестве дивергенции следует рассматривать только, как тройку чисел со своими знаками (упорядоченных по базису пространства), то есть, исключительно как формальную сумму. Возможно, не все с этим согласятся. Все-таки, непривычно.

Пусть в качестве заданного вектора **W** выступает радиус-вектор **r**:

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z \qquad (31)$$

Тогда классическое выражение его дифференциала, в соответствии с равенствами (23) и (25), принимает вид:

$$d\,\mathbf{r} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}dx + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}dy + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}dz = div\,\mathbf{r}\cdot d\,\mathbf{r} \qquad (32)$$

Непосредственно из этого выражения следует очевидное значение дивергенции радиус-вектора:

$$div\,\mathbf{r} = \frac{d\,\mathbf{r}}{d\,\mathbf{r}} = 1 \qquad (33)$$

Но, в соответствии с равенством (30), эта же дивергенция принимает иное значение:

$$div\,\mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 \qquad (34)$$

Если это значение полагать формальной суммой, то линейная плотность радиус-вектора по равенству (33) всего лишь *детализируется* равенством (34) и не искажает информацию о радиус-векторе. А эта информация заключается в том, что компоненты радиус-вектора одинаково распределены по координатным осям и коэффициент распределения равен 1. То есть, равенство (34) в виде формальной суммы устанавливает изотропность векторного поля, порожденного радиус-вектором. Но в математике *принято* дивергенцию полагать именно арифметической суммой тройки чисел, ее представляющих. Поэтому в математических справочниках приводится *неверное* значение дивергенции центрального поля:

$$div\,\mathbf{r} = 3 \qquad (35)$$

Отсюда можно сделать вывод: *сущность* дивергенции в качестве следствия выражения (32) вступает в *противоречие* с принятой ее интерпретацией в качестве арифметического следствия (35) выражения (34). А это может оказаться причиной не только математических, но и физических заблуждений. Кстати, о сущности дивергенции.

Выражение (31) означает, что заданный вектор **W** является частным случаем *линейной* функции радиус-вектора:

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}) = D_0\cdot\mathbf{r}$$

Для этого случая скалярный коэффициент пропорциональности равен тройке чисел:

$$D_0 = 1 + 1 + 1\,.$$

Принадлежность каждого числа в этой тройке можно формально определить соответствующими ортами в скобках, упорядочив тем самым тройку чисел по базису пространства:

$$D_0 = (\mathbf{i}) \cdot 1 + (\mathbf{j}) \cdot 1 + (\mathbf{k}) \cdot 1$$

Чтобы не загромождать выражение, можно это упорядочивание предполагать по умолчанию и проще всего разделить запятыми эти числа:

$$D_0 = 1\mathbf{,}1\mathbf{,}1$$

Пусть вектор (22) является какой-либо еще частной функцией радиус-вектора, например, линейной функцией:

$$\mathbf{W}_1 = D_1 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{i}\,2x - \mathbf{j}\,8y + \mathbf{k}\,5z \qquad (36)$$

Представляется очевидным, что в этом случае скалярный коэффициент пропорциональности равен тройке иных чисел:

$$D_1 = 2\mathbf{,}-8\mathbf{,}+5 \qquad (37)$$

Если по каким-либо причинам вектор (36) не известен, но известна его дивергенция (37), то по дивергенции именно в таком виде этот неизвестный вектор легко может быть определен интегрированием по координатам:

$$\mathbf{W}_1 = \int D_1 \cdot d\,\mathbf{r} = \mathbf{i}\int 2 \cdot dx - \mathbf{j}\int 8 \cdot dy + \mathbf{k}\int 5 \cdot dz = \mathbf{i}\,2x - \mathbf{j}\,8y + \mathbf{k}\,5z$$

Традиционная интерпретация этой же дивергенции имеет вид *одного* числа в качестве арифметической суммы:

$$D_{1T} = 2 - 8 + 5 = -1 \qquad (38)$$

В этом случае интегрирование по координатам приведет к искаженному значению вектора:

$$\mathbf{W}_{1T} = D_{1T} \cdot \mathbf{r} = -\mathbf{i}\,x - \mathbf{j}\,y - \mathbf{k}\,z \qquad (39)$$

А кроме интегрирования по координатам никакого другого способа определить вектор по его дивергенции не существует.

Наконец, пусть задан вектор $\mathbf{W}_2$, определяющий некоторое векторное поле:

$$\mathbf{W}_2 = \mathbf{i}\,2x - \mathbf{j}\,8y + \mathbf{k}\,6z$$

Его дивергенция D_2 равна:

$$D_2 = 2 - 8 + 6$$

В качестве формальной суммы эта дивергенция не дает оснований *качественно* отличать заданный вектор от вектора $\mathbf{W}_1$: дивергенции D_1 и D_2 в виде формальных сумм указывают на различные анизотропности соответствующих векторных полей. Но в качестве арифметической суммы эта дивергенция равна 0. А такое значение, как известно, принимает только дивергенция вектора-константы. Следовательно, по данной дивергенции в традиционном ее толковании можно сделать неверный качественный вывод о векторе $\mathbf{W}_2$ и его поле. То есть, в данном случае справедливо математическое утверждение:

$$D_2 = 2 - 8 + 6 = 2\mathbf{,}-8\mathbf{,}6 \neq 0$$

Из изложенного следует, что дифференцирование по радиус-вектору (и, в общем случае, по произвольному вектору), есть нелинейная операция, результатом которой является преобразование скаляра в вектор, или вектора в скаляр, в зависимости от характера величины, подвергающейся такому дифференцированию. Это один из выводов. Но напрашивается и второй вывод: всякий скаляр есть результат дифференцирования вектора по вектору и представляет собой тройку чисел со своими знаками в виде формальной суммы. Если же этот скаляр определен в виде единственного числа, то его следует понимать, как тройку чисел, равных этому единственному числу, определяющему *одинаковую* плотность дифференцируемого вектора по всем координатным направлениям (физически это означает изотропность векторного поля). При этом результат произведения скаляра на вектор представляет собой новый вектор, в котором каждая компонента умножаемого вектора умножена на соответствующее число тройки скаляра (если эта тройка упорядочена по базису пространства). В частности, дифференциал (19) локального объема равен скаляру в *виде тройки чисел*:

$$\begin{aligned} dV &= d\,\mathbf{S}\cdot d\,\mathbf{r} = \left(\mathbf{i}\,dy\cdot dz + \mathbf{j}\,dz\cdot dx + \mathbf{k}\,dx\cdot dy\right)\cdot\left(\mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz\right) = \\ &= dx\cdot dy\cdot dz, dx\cdot dy\cdot dz, dx\cdot dy\cdot dz = dx\cdot dy\cdot dz \end{aligned} \qquad (40)$$

Пусть произвольная скалярная величина $U(\mathbf{r})$ определена в рассмотренном нетрадиционном виде линейной функции координат:

$$U(\mathbf{r}) = a\cdot x, b\cdot y, c\cdot z$$

Тогда вектор $\mathbf{W}_U$ градиента этой скалярной функции равен:

$$\mathbf{W}_U = \mathbf{grad}\,U = \mathbf{i}\,a + \mathbf{j}\,b + \mathbf{k}\,c = const\,,$$

а дивергенция этого вектора равна:

$$div\,\mathbf{grad}\,U = \frac{da}{dx},\frac{db}{dy},\frac{dc}{dz}$$

При условиях: $a = const$, $b = const$, $c = const$ эта дивергенция принимает значение:

$$div\,\mathbf{grad}\,U = 0,0,0 = 0$$

То есть, *дивергенция градиента скалярного поля равна нулю в том и только в том случае, если скалярное поле есть линейная функция координат прямоугольного пространства*. Следовательно, *дивергенция градиента скалярного поля равна нулю в том и только в том случае, когда каждая ее компонента равна нулю.*

Попытка разрешить противоречие в численном значении дивергенции центрального поля неожиданно привела к переопределению понятия скалярной величины. Это далеко не самый лучший исход дела, поскольку ставится под сомнение одно из фундаментальных понятий теории поля. Но иной способ разрешить это противоречие пока не обнаружен ни в учебниках, ни в справочной литературе. Возможно, это переопределение понятия скалярной величины является заблуждением. Но оно может оказаться и вполне корректным, причем, с далеко идущими последствиями.

Однако уж если переопределение состоялось, то его уместно проверить в дальнейшем, например, на понятии массы. Но пока можно проверить его на простых нелинейных операциях. В частности, уместно рассмотреть операцию *скалярного деления* вектора на вектор, результатом которой должна быть скалярная величина в виде тройки самостоятельных чисел.

Пусть векторы **A** и **B** определены в прямоугольной системе координат выражениями:

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}\,A_x + \mathbf{j}\,A_y + \mathbf{k}\,A_z \qquad \text{и} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{i}\,B_x + \mathbf{j}\,B_y + \mathbf{k}\,B_z$$

Пусть скалярная величина u выражает скалярное отношение двух векторов:

$$u = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$$

Это отношение можно представить через обратный вектор:

$$u = \left(iA_x + jA_y + kA_z\right)\cdot\left(i\frac{1}{B_x} + j\frac{1}{B_y} + k\frac{1}{B_z}\right) = \frac{A_x}{B_x} + \frac{A_y}{B_y} + \frac{A_z}{B_z} = \frac{A_x}{B_x},\frac{A_y}{B_y},\frac{A_z}{B_z}$$

Естественно теперь проверить, насколько это представление скаляра согласуется с *умножением* вектора на скаляр и с *делением* вектора на скаляр.

Упомянутое отношение предполагает справедливость равенства:

$$\mathbf{A} = u\cdot\mathbf{B}$$

Операция *умножения* вектора на скаляр в этом случае имеет вид:

$$u\cdot\mathbf{B}=\left(\frac{A_x}{B_x},\frac{A_y}{B_y},\frac{A_z}{B_z}\right)\cdot\left(\mathbf{i}B_x+\mathbf{j}B_y+\mathbf{k}B_z\right)=$$

$$=\mathbf{i}B_x\frac{A_x}{B_x}+\mathbf{j}B_y\frac{A_y}{B_y}+\mathbf{k}B_z\frac{A_z}{B_z}=\mathbf{i}A_x+\mathbf{j}A_y+\mathbf{k}A_z=\mathbf{A}$$

и в полной мере подтверждает справедливость упомянутого отношения. Но это отношение предполагает также справедливость равенства:

$$\mathbf{B}=\frac{\mathbf{A}}{u}$$

А это равенство требует определения скаляра, обратного заданному. Но, коль скоро скаляр теперь определен, как тройка чисел, естественно определить обратный скаляр тройкой чисел, обратных числам тройки скаляра, то есть, все как у вектора. Поэтому операция *деления* вектора на скаляр в этом случае имеет вид:

$$\frac{\mathbf{A}}{u}=\frac{\mathbf{i}A_x+\mathbf{j}A_y+\mathbf{k}A_z}{\frac{A_x}{B_x},\frac{A_y}{B_y},\frac{A_z}{B_z}}=\left(\mathbf{i}A_x+\mathbf{j}A_y+\mathbf{k}A_z\right)\left(\frac{B_x}{A_x},\frac{B_y}{A_y},\frac{B_z}{A_z}\right)=\mathbf{i}B_x+\mathbf{j}B_y+\mathbf{k}B_z=\mathbf{B}$$

и, опять же, вполне подтверждает справедливость указанного равенства.

Вообще говоря, если вектор определен тройкой чисел (координат) вдоль соответствующих направлений (ортов $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$), то любые скалярные операции с векторами должны рассматриваться, как операции с этими числами только вдоль этих направлений, причем результаты одних операций носят векторный характер, а результаты других операций оказываются скалярными величинами. Например, возведение в квадрат радиус-вектора (31) представляет собой его скалярное произведение на самого себя:

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}=\left(\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z\right)\cdot\left(\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z\right)=x^2+y^2+z^2=x^2,y^2,z^2$$

Скалярный результат этой операции представлен уже в переопределенном виде. Но этот скалярный результат предполагает обратную операцию извлечения квадратного корня из скаляра с результатом в векторном виде:

$$\sqrt{x^2,y^2,z^2}=\mathbf{i}\sqrt{x^2}+\mathbf{j}\sqrt{y^2}+\mathbf{k}\sqrt{z^2}=\pm\left(\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z\right)$$

Если же скалярная величина задана одним числом u, то результат извлечения квадратного корня из него должен иметь векторный вид:

$$\sqrt{u}=\mathbf{i}\sqrt{u}+\mathbf{j}\sqrt{u}+\mathbf{k}\sqrt{u}\ ,$$

хотя это и не очень привычно.

Профессиональные математики, возможно, сочтут это исследование некорректным, но вот что из него следует.

Дивергенцию (26) вектора (22) в виде производной по радиус-вектору можно выразить через локальный объем известным методом замены переменной:

$$div\,\mathbf{W}=\frac{d\,\mathbf{W}}{d\,\mathbf{r}}=\frac{d\,\mathbf{W}}{dV}\frac{dV}{d\,\mathbf{r}}\qquad(41)$$

Тогда, обозначив *вектор объемной плотности* вектора (22) символом ρ_W:

$$\rho_W=\frac{d\,\mathbf{W}}{dV}\qquad(42)$$

и принимая во внимание равенство (17), выражение (41) можно переписать в виде скалярного произведения двух векторов:

$$div\,\mathbf{W}=\rho_W\cdot\mathbf{grad}\,V=\rho_W\cdot d\,\mathbf{S}\qquad(43)$$

Это значит, что вектор (22) теперь можно представить в *трех эквивалентных интегральных* представлениях:

$$\mathbf{W}=\int div\,\mathbf{W}\cdot d\,\mathbf{r}=\int\left(\rho_W\cdot d\,\mathbf{r}\right)d\,\mathbf{S}=\int\rho_W\cdot dV\qquad(44)$$

Эти представления иллюстрируют *очевидную связь объемного, поверхностного и криволинейного интегралов.*

Теперь уместно рассмотреть две простые задачи, связанные с известной формулой Остроградского-Гаусса [1]:

$$\oint_S \mathbf{H}\cdot d\,\mathbf{S} = \oint_V div\,\mathbf{H}\cdot dV$$

В школе с первых же уроков изучения уравнений толковый учитель математики предостерегает своих учеников от грубых ошибок: «Если в вашем уравнении не соблюдается единство размерностей – ищите у себя грубую ошибку». Это безотказное правило математики. В этом же ряду, очевидно, должно стоять и правило единства порядков малости. В левой части приведенной формулы подынтегральное выражение является величиной второго порядка малости, тогда как подынтегральное выражение в правой ее части есть величина третьего порядка малости. Налицо некорректность. Вот почему рассматриваются следующие задачи.

1. Пусть задана некая скалярная величина Q такая, что:

$$\frac{dQ}{d\,\mathbf{S}} = \mathbf{H} \qquad \text{и} \qquad \frac{dQ}{dV} = div\,\mathbf{H}\,, \qquad (45)$$

причем, должно быть понятно, что **H** есть некий вектор и:

$$div\,\mathbf{H} = \nabla\,\mathbf{H} = \frac{d\,\mathbf{H}}{d\,\mathbf{r}} \qquad (46)$$

Тогда функция Q представляет собой скалярный поток векторного поля **H** через поверхность **S**, а производные (45) выражают сущность формулы Остроградского (в дифференциальной форме), которая, как известно, выражается равенством поверхностного и объемного интегралов:

$$\oint_S \mathbf{H}\cdot d\,\mathbf{S} = \oint_V div\,\mathbf{H}\cdot dV = Q \qquad (47)$$

Правый ее интеграл содержит дифференциал объема, который определен равенством (19). На основании этого равенства выражение (47) принимает вид:

$$\oint_S \mathbf{H}\cdot d\,\mathbf{S} = \oint_V div\,\mathbf{H}\cdot d\,\mathbf{S}\cdot d\,\mathbf{r} \qquad (48)$$

Но, в силу равенства (46), эту формулу тогда необходимо записывать в виде:

$$\oint_S \mathbf{H}\cdot d\,\mathbf{S} = \oint_S d\,\mathbf{H}\cdot d\,\mathbf{S}\,, \qquad (49)$$

который, к сожалению, нельзя отнести к числу *математически корректных*. Проблема в том, что всякая искривленная поверхность (выпуклая или вогнутая) в *естественном физическом смысле* является следствием некоторого локального силового воздействия (давления) на плоскость. В результате этого воздействия образуется поверхностное натяжение, за счет чего плоскость и деформируется естественным образом в искривленную поверхность. В теории же поверхностного интеграла замкнутую поверхность *искусственно составляют* из двух полуповерхностей с различным направлением векторов, их определяющих. Эти полуповерхности, будучи *уже сформированными*, не испытывают поверхностного натяжения, равно как не испытывают и никакого воздействия на себя. А это значит, что принятая математическая модель не адекватна исследуемому физическому явлению (отклонению от плоскости), на что и указывает выявленная некорректность.

2. Пусть теперь задана некая скалярная величина G такая, что:

$$\frac{dG}{d\,\mathbf{S}} = d\,\mathbf{H} \qquad \text{и} \qquad \frac{dG}{dV} = div\,\mathbf{H}\,, \qquad (50)$$

подобно соотношениям (45). Методом замены переменной первое из этих равенств легко приводится к виду:

$$\frac{dG}{d\mathbf{S}} = \frac{dG}{dV} \cdot \frac{dV}{d\mathbf{S}} = d\,\mathbf{H} \quad (51)$$

Теперь, с учетом второго из равенств (50) и равенства (19), можно полученное выражение представить в виде:

$$d\,\mathbf{H} = div\,\mathbf{H} \cdot d\,\mathbf{r},$$

откуда следует:

$$div\,\mathbf{H} = \frac{d\,\mathbf{H}}{d\,\mathbf{r}} \quad (52)$$

То есть, в принятом определении скалярной величины G противоречия исключены. Поэтому вполне корректные равенства:

$$dG = d\,\mathbf{H} \cdot d\,\mathbf{S} \qquad \text{и} \qquad dG = div\,\mathbf{H} \cdot dV$$

позволяют записать столь же корректное (в смысле единства порядков малости) уравнение:

$$G = \oint_S d\,\mathbf{H} \cdot d\,\mathbf{S} = \oint_V div\,\mathbf{H} \cdot dV \quad (53)$$

Это уравнение и следует полагать *скорректированной* формулой Остроградского-Гаусса.

Представляется полезным комментарий к полученным результатам по рассмотренным задачам.

В первом случае скалярная величина Q была определена таким образом, чтобы сразу *формально* получить формулу Остроградского в традиционной ее форме. Но внимательный читатель легко заметит, что в определениях (45) этой скалярной величины *уже заложена некорректность*. Действительно, второе из этих двух равенств:

$$\frac{dQ}{dV} = div\,\mathbf{H}$$

легко преобразовать к виду:

$$dQ = div\,\mathbf{H}\,dV = \frac{d\,\mathbf{H}}{d\,\mathbf{r}} d\,\mathbf{S}\,d\,\mathbf{r} = d\,\mathbf{H}\,d\,\mathbf{S}, \quad (54)$$

который очевидным образом противоречит первому из равенств (45), если его привести к аналогичному виду:

$$dQ = \mathbf{H}\,d\,\mathbf{S} \quad (55)$$

Но *только при таком противоречии из определения (45) следует традиционная формула (47) Остроградского.* А это противоречие обусловлено упомянутым *искусственным* математическим приемом «складывания» замкнутой поверхности. Но всякая искусственность есть проявление субъективности, которая неминуемо приводит к искажению объективной реальности. В данном случае искусственность проявляется в том, что дифференциал объема есть величина *третьего* порядка малости, как следует из равенства (15), тогда как равенство (55) выражает величину *второго* порядка малости (определяется дифференциалом поверхности), почему и оказывается математически некорректным равенство (49). Замена в равенстве (55) вектора $\mathbf{H}$ на его дифференциал устраняет искусственность. А это непременно влечет за собой корректировку формулы Остроградского.

<u>Литература</u>.

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. – Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. Изд. «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. М., 1967.