**Функция многих переменных. Предел и непрерывность функции многих переменных. Частные производные.**

**План.**

**1. Определение функции многих переменных.**

**2. Предел функции многих переменных. Непрерывность функции многих переменных.**

**3. Частные производные.**

1. Обозначим через *D* некоторое множество точек в *п*-мерном пространстве.

Если задан закон *f*  , в силу которого каждой точке *М*(*х*;...;*х*) *D* ставится в соответствие число *и*, то говорят, что на множестве *D* определена функция *и*= *f*(*х*;...;*х*).

Множество точек *М*(*х*;...;*х*), для которых функция *и*= *f*(*х*;...;*х*) определена, называют *областью определения* этой функции и обозначают *D*(*f*).

Функции многих переменных можно обозначать одним символом *и*=*f*(*М*), указывая размерность пространства, которому принадлежит точка *М*.

Функции двух переменных можно изобразить графически в виде некоторой поверхности.

Графиком функции двух переменных *z=f*(*х*;*у*) в прямоугольной системе координат *Оху* называется геометрическое место точек в трехмерном пространстве, координаты которых (*х*;*у*;*z*) удовлетворяют уравнению *z=f*(*х*;*у*).

1. Обозначим через (*М*;*М*) расстояние между точками *М* и *М.* Если *п*=2, *М*(*х*;*у*), *М*(*х*;*у*), то

(*М*;*М*)=.

В *п*-мерном пространстве

(*М*;*М*)=.

Пусть на множестве *D* задано функцию *и*=*f*(*М*).

Число *А* называется *пределом функции и*=*f*(*М*) в точке *М,* если для произвольного числа >0 найдётся такое число >0, что для всех точек *М* *D*, которые удовлетворяют условию 0<(*М*;*М*)<, выполняется неравенство

.

Свойства пределов функций одной переменной сохраняются и для функций многих переменных, то есть если функции *f*(*М*) и *g*(*М*) имеют в точке *М* конечные пределы, то

1. = *с*,

2. =,

3. =.

4.  если .

Заметим, что если предел  существует, то он не должен зависеть от пути, по которому точка *М* стремится к точке *М*.

Функция *и*=*f*(*М*) называется *непрерывной в точке* *М*, если

= *f*(*М*).

Функция *и*=*f*(*М*) называется *непрерывной на множестве D,* если она непрерывна в каждой точке *М**D.*

Точки, в которых непрерывность функции нарушается, называются *точками разрыва* функция. Точки разрыва могут быть изолированными, создавать линии разрыва, поверхности разрыва и т. д.Например, функция *z=* имеет разрыв в точке (0;0), а функция *z=* имеет разрыв на параболе 

**3.** Множество точек *М*, которые удовлетворяют неравенству (*М*;*М*)<, называют -окрестностью точки *М*.

Пусть функция двух переменных *z=f*(*x*;*у*) (для большего количества переменных всё аналогично) определена в некоторой окрестности точки *М*(*x*;*у*). Дадим переменной *х* приращение так, чтобы точка (*х+*;*у*) принадлежала этой окрестности. При этом функция *z=f*(*x*;*у*) изменится на величину

,

которая называется *частичным приращением функции z=f*(*x*;*у*) *по переменной х.*

Аналогично величину



называют *частичным приращением функции* *по переменной у.*

Если существует предел

,

то его называют *частной производной функции z=f*(*x*;*у*) *в точке* *М*(*x*;*у*) *по переменной х* и обозначают такими символами:

,,,.

Аналогично

= .

Из таких определений следует, что правила вычисления производных, совпадают с правилами дифференцирования функций одной переменной. Следует только помнить, что при вычислении частной производной по одной переменной остальные переменные считаются постоянными.

Частные производные характеризуют скорость изменения функции в направлении соответствующих координатных осей.

Частные производные от частных производных ,  функции *z=f*(*x*;*у*) называются *частными производными второго порядка.* Функция двух переменных может иметь четыре частные производные второго порядка, которые обозначают так:

, ,

, .

Производные  и  называются *смешанными.* Можно доказать, что если они непрерывны, то равны между собой.

Частные производные от частных производных второго порядка называются *частными производными третьего порядка* и т. д.

**Лекция 11. Тема – Дифференцируемость функции. Производная в направлении. Градиент. Локальные экстремумы.**

**План.**

**1. Дифференцируемость функции. Полный дифференциал. Дифференциалы высших порядков.**

**2. Производная в направлении. Градиент и его свойства.**

**3. Локальные экстремумы функции высших порядков.**

**1.** Пусть функция *z=f*(*x*;*у*) непрерывна в некоторой окрестности точки *М*(*x*;*у*) вместе со своими частными производными (*х*;*у*),(*х*;*у*). Выберем приращение и так, чтобы точка (*х+*;у+) принадлежала рассматриваемой окрестности.

Если полное приращение функции *z=f*(*x*;*у*) в точке *М*(*x*;*у*)

= *f*(*x+*;*у*+)- *f*(*x*;*у*)

можно записать в виде

=(*х*;*у*)+ (*х*;*у*)+,

где - бесконечно малые функции при , , то функция *z=f*(*x*;*у*) называется *дифференцированной* в точке *М*(*x*;*у*), а линейная относительно и  часть её полного приращения  называется *полным дифференциалом* функции и обозначается

*dz=*+.

Дифференциалами независимых переменных называют приращения этих переменных *dх=*, *dу=*. Поэтому

*dz=* *dх* + *dу*,

или в других обозначениях

*dz=* *dх* + *dу*.

Для функции трёх переменных *и= f*(*x*;*у*; *z*)

*dи=* *dх* + *dу+* *dz.*

Полный дифференциал функции *z=f*(*x*;*у*)

*dz=* *dх* + *dу*,

который ещё называют дифференциалом первого порядка, зависит от независимых переменных *х*, *у* и от их дифференциалов *dх, dу.* Заметим, что дифференциалы *dх, dу* не зависят от *х*, *у.*

Дифференциалы второго порядка определяют по формуле

*d2 z= d*(*dz*).

Тогда

*d2 z= d*(*dх+* *dу*)= (*dх+* *dу*) *dх+*(*dх+* *dу*) *dу=**dх2+* *dу dх+*

+ *dх dу+**dу2*,

откуда

*d2 z=**dх2+*2 *dх dу+**dу2*.

Символически это можно записать так:

*d2 z=*(*dх+* *dу*)2 *z.*

Аналогично можно получить формулу для полного дифференциала *п*-го порядка:

*dп z= d*(*dп-1 z*) =(*dх+* *dу*)*п z.*

**2.** Производная функции *z=f*(*x*;*у*) в направлении вектора  вычисляется по формуле

+,

где , - направляющие косинусы вектора :

= , = .

Если частные производные характеризуют скорость изменения функции в направлении соответствующих координатных осей, то производная в направлении вектора определяет скорость изменения функции в направлении вектора .

*Градиентом* функции *z=f*(*x*;*у*) называется вектор

grad *z=*(,).

*Свойства градиента*

1. Производная  имеет наибольшее значение, если направление вектора  совпадает с направлением градиента, причём это наибольшее значение производной равно .

2. Производная в направлении вектора, перпендикулярного градиенту, равна нулю.

**3.** Пусть функция *z=f*(*x*;*у*) определена на множестве *D* и точка *М*(*х*;*у*)*D.* Если существует окрестность точки *М*, которая принадлежит множеству *D*, и для всех отличных от *М* точек *М* выполняется неравенство

*f*(*М*)< *f*(*М0*) (*f*(*М*)> *f*(*М0*)),

то точку *М* называют *точкой локального максимума (минимума)* функции *z=f*(*x*;*у*), а число *f*(*М0*) - *локальным максимумом (минимумом)* этой функции. Точки максимума и минимума функции называют её *точками экстремума.*

Теорема 5.1 (*необходимые условия экстремума*). Если функция *z=f*(*x*;*у*) в точке *М*( *х*;*у*) имеет локальный экстремум, то в этой точке частные производные , равны нулю или не существуют.

Точки, в которых == 0, называются *стационарными.* Стационарные точки и точки, в которых частные производные не существуют, называются *критическими.*

Поэтому функция может достигать экстремальных значений только в критических точках; однако не всякая критическая точка является точкой экстремума.

Пусть в стационарной точке *М*( *х*;*у*) и некоторой её окрестности функция *z=f*(*x*;*у*) имеет непрерывные частные производные второго порядка. Введём обозначения:

*А=*( *х*;*у*), *В=*( *х*;*у*), *С=*( *х*;*у*), =*АС-В2*.

Теорема 5.2 (*достаточные условия экстремума*).

1. Если >0, то функция *z=f*(*x*;*у*) в точке *М* имеет экстремум, причём максимум при *А*<0 и минимум при *А*>0.

2. Если <0, то в точке *М* нет экстремума.

Для случая, когда количество переменных *п*>2, пользуются такой теоремой.

Теорема 5.3 Функция *и*= *f*(*х*;...;*х*) имеет минимум в стационарной точке *М*, если дифференциал второго порядка этой функции в точке *М* положителен *d2f*(*М*)>0, и максимум, если *d2f*(*М*)<0.

Пример. Исследовать на экстремум функцию

*z=*(*х+*2)2+(*у -*1)2.

Решение.

   

Функция имеет одну критическую точку *М*(-2;1).

   *А=*2, *В=*0, *С=*2,

=*АС-В2*= 2\*2-02= 4>0, *А*>0.

Значит, в точке *М*(-2;1) функция имеет минимум: min *z=z*(-2;1)=(-2+2)2+(1-1)2=0.

**Лекция 12. Тема – Интегральное исчисление функций. Первообразная. Неопределённный интеграл. Методы интегрирования.**

**План.**

**1. Первообразная функции. Неопределённный интеграл. Свойства неопределённого интеграла.**

**2. Таблица основных интегралов. Метод подстановки (замены переменной).**

**3. Интегрирование по частям. Интегралы, которые ”не берутся”.**

Интеграл – одно из центральных понятий математики. Оно возникло в связи с двумя задачами: 1) о восстановлении функции по её производной; 2) о вычислении площади криволинейной трапеции. Эти задачи приводят к двум связанным между собой видам интегралов: определённого и неопределённого. Термин ”интеграл” ввёл Якоб Бернулли в 1690 году.

1. Функция *F*(*x*) называется *первообразной функции f*(*x*) на некотором промежутке, если во всех точках этого промежутка выполняется равенство *F’*(*x*)= *f*(*x*).

Например. первообразными функции *f*(*x*)=3*х*2 будут функции *х*3, *х*3+1, *х*3+0,5 и вообще *F*(*x*)= *х*3+*С*, где *С* – произвольная постоянная, поскольку *F’*(*x*)=( *х*3+*С*)’=3*х*2. Этот пример показывает, что если функция *f*(*x*) имеет одну первообразную, то она имеет их бесконечно много. Возникает вопрос: как найти все первообразные данной функции, если известна одна из них? Ответ даёт такая теорема.

Теорема 6.1 Если *F*(*x*) – первообразная функции *f*(*x*) на некотором промежутке, то всякая другая первообразная функции *f*(*x*) на этом промежутке имеет вид *F*(*x*) +*С*, где *С* – произвольная постоянная.

Множество всех первообразных *F*(*x*) +*С* функции *f*(*x*) называют *неопределённым интегралом функции f*(*x*) и обозначают . Таким образом, по определению

= *F*(*x*) +*С*, если *F’*(*x*)= *f*(*x*).

При этом *f*(*x*) называют подынтегральной функцией, *f*(*x*)*dх* – подынтегральным выражением, *х* – переменной интегрирования, знак - знаком интеграла, *С* – постоянной интегрирования.

Операцию нахождения первообразной функции *f*(*x*) называют интегрированием этой функции.

Операции дифференцирования и интегрирования являются обратными по отношению друг к другу.

Возникает вопрос: для каждой ли функции *f*(*x*) существует первообразная, а значит, и неопределённый интеграл? Оказывается не для каждой. Но справедлива такая

Теорема 6.2. Всякая непрерывная на промежутке [a;b] функция имеет на этом промежутке первообразную.

СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

1. ()’= *f*(*x*).
2. = *F*(*x*) +*С.*
3. *d*= *f*(*x*)*dх.*
4. =.
5. Если = *F*(*x*) +*С* и *и*=- произвольная функция, которая имеет непрерывную производную, то

= *F*(*и*) +*С.*

В частности,

= *F*(a*x+b*) +*С*.

Из очень важного свойства 5 следует, что таблица интегралов остаётся верной независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или произвольной дифференцированной функцией. Таким образом, из одной формулы можно получать много других.

Пример.

=+*С *==+*С*, ==+*С*, =+*С.*

1. **ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ**

1.  .

2. 

3.  *а*>0, .

4. 

5. 

6. 

7. 

8. 

9. 

10. 

11. 

12. 

13. 

14. 

15. 

16. 

17. 

18. 

Непосредственным интегрированием называют вычисление интегралов с помощью основных свойств неопределённого интеграла и таблицы интегралов.

Пример.



Метод подстановки является одним из основных методов интегрирования. Больше того, изучение методов интегрирования в основном сводится к выяснению того, какую подстановку надо сделать в том или ином случае.

Пример.



Этот пример можно было бы решить и так:



Такой метод интегрирования называется методом введения функции под знак дифференциала.

**3.** Пусть *и*(*х*), *v*(*x*) – функции, которые имеют на некотором промежутке непрерывные производные. Тогда

*d*(*uv*) = *udv + vdu*

или

*udv= d*(*uv*) – *vdu.*

Интегрируя это равенство, получим



или, учитывая свойство 2 неопределённых интегралов,

.

Эту формулу называют формулой интегрирования по частям.

Укажем некоторые интегралы, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям:

1. в интегралах  , где *k* – натуральное число, за *и* следует брать *хk,* а за *dv* – выражение, которое осталось;
2. в интегралах  , следует обозначать *dv= хkdx.*

Неопределённый интеграл существует для произвольной непрерывной функции *f*(*x*), то есть = *F*(*x*) +*С.* Но при этом не всегда первообразная *F*(*x*) является элементарной функцией. О таких интегралах говорят, что они ”не берутся”. Например,

= *F*(*x*) +*С*, где *F*(*x*) = *х - +-+... .*

Не берутся такие интегралы:

 - интегральный логарифм,  - интегральный синус, - интегральный косинус, ,  - интегралы Френеля и другие.

В связи с этим важно выделить такие классы функций, интегралы от которых всегда выражаются через элементарные функции. Одним из таких классов функций, интегралы от которых всегда ”берутся”, является класс рациональных функций.

**Лекция 13. Тема – Элементарные дроби и их интегрирование. Интегрирование некоторых иррациональных и тригонометрических функций.**

**План.**

**1. Рациональные функции. Элементарные дроби и их интегрирование.**

**2. Разложение правильной рациональной дроби на элементарные дроби.**

**3. Интегрирование некоторых иррациональных и тригонометрических функций.**

**1.** *Рациональной функцией или рациональной дробью* называют дробь



где *Рт*(*х*), *Qn*(*x*) – многочлены степени *т* и *п*:

*Qn*(*x*) = *хп+**хп -1+...+*, *Рт*(*х*) = *хт+**хт -1+...+*.

Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя *т<* *п*, и *неправильной*, если *тп.*

Неправильную дробь всегда можно записать в виде суммы многочлена и правильной дроби.

Поскольку многочлены интегрируются очень легко, то задача интегрирования рациональных функций сводится, таким образом, к интегрированию правильных дробей. Правильные дроби, в свою очередь раскладываются на элементарные дроби. Поэтому рассмотрим интегрирование элементарных дробей.

Различают четыре вида элементарных дробей:

І., ІІ. , ІІІ. , ІV. ,

где *п=*2,3,..., а трехчлен *х2+рх+q* не имеет действительных корней, то есть *D=р2-*4 *q<*0.

Рассмотрим, как интегрируются эти дроби.

І.

ІІ. 

ІІІ. Пример.

---= -.

**2.** Как известно из алгебры, многочлен *Qn*(*x*) степени *п* может быть разложен на линейные и квадратичные множители

*Qn*(*x*) = (*х-х*)*k…*(*х-хr*)*k*(*x2+px+q*)*l*…( *x2+p x+q*)*l*,

где , *х*, *p*, *q* - действительные числа; *k*, *I -* натуральные числа; *k+…+ k+*2(*I+…+ I*)=*n*, *р2-* 4 *q<*0.

Рассмотрим правильную рациональную дробь



знаменатель которой уже разложен на линейные и квадратичные множители. Тогда эту дробь можно разложить на сумму элементарных дробей по таким правилам:

1. множителю (*х-а*) *k* соответствует сумма дробей вида

++…+;

1. множителю (*x2+px+q*) *I* соответствует сумма дробей вида

++…+,

где *А*, *М*, *N* - неопределённые коэффициенты.

Искать эти неопределённые коэффициенты можно исходя из того, что равные многочлены имеют равные коэффициенты при одинаковых степенях *х.*

Пример. Вычислить интеграл

.

Решение.

+,

*х+*5=*А*(*х+2*)+*В*(*х+*1)*,*

* А=*4, *В*=-3.

= 4-3= 4ln-3ln+*C.*

1. 1. Интегралы вида



где *R*(*х*, *у*) – рациональная функция относительно *х* и *у*, , сводятся к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки

*ax+b=t*.

2. Интегралы вида



где *R* – рациональная функция, *p*, *q* - целые числа, сводятся к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки

*=t*,

где *п –* общий знаменатель дробей ,,… .

3. Интегралы вида

 (6.1)

всегда сводятся к интегралам от рациональных функций с помощью, так называемой, универсальной тригонометрической подстановки

, , ,

*х=*2arctg*t*, *dx=*.

Замечание. Универсальная тригонометрическая подстановка всегда приводит к цели, но в силу своей универсальности она часто требует неоправданно громоздких вычислений. Поэтому во многих случаях удобнее пользоваться другими подстановками. Рассмотрим некоторые из них.

1. Если в интеграле (6.1) *R*(-sin *x*, cos *x*)= - *R*(sin *x*, cos *x*), то удобно делать подстановку cos *x=t.*
2. Если *R*(sin *x*,-cos *x*)= - *R*(sin *x*, cos *x*), то удобно делать подстановку sin *x=t.*
3. Если *R*(-sin *x*, -cos *x*)= *R*(sin *x*, cos *x*), то удобно делать подстановку

tg *x=t*, , ,

*х=*arctg*t*, *dx=*.

4. Рассмотрим более детально интегралы вида

,

где *т*, *п –* целые числа.

1. Если *т* – нечётное положительное число, то удобно делать подстановку cos *x=t.*
2. Если *п* – нечётное положительное число, то удобно делать подстановку sin *x=t.*
3. Если оба показателя *т* и *п –* чётные неотрицательные числа, то надо делать понижение степени синуса и косинуса по формулам

, .

4) Для нахождения интегралов вида

, 

удобно пользоваться формулами

 

5. В интегралах

, , , 

надо подынтегральную функцию записать в виде суммы функций с помощью формул







**Лекция 14. Тема – Задача о площади криволинейной трапеции. Определённый интеграл его геометрический смысл и свойства.**

**Формула Ньютона-Лейбница.**

**План.**

**1. Задача о площади криволинейной трапеции. Определение и существование определённого интеграла.**

**2. Геометрический смысл определённого интеграла. Свойства определённого интеграла.**

**3. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.**

**1.** Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная линией *у*= *f*(*x*) и прямыми *х=а, х=b, у=*0. Будем считать, что *f*(*x*)на [*a*;*b*].

*у* *у*= *f*(*x*)

0 *а х хх b x*

Разобьём отрезок [*a*;*b*] произвольным образом на *п* частей точками *а=х*<*x*<…< *х*< *х*<…<*х=b.*

На каждом отрезке [*х*; *х*] возьмём произвольную точку **  ивычислимзначение *f*(**). Тогда площадь *S*заштрихованного прямоугольника, будет равна

*S= f*(**), где = *х- х*.

Площадь *S* всей трапеции приблизительно равна

*S.*

Пусть . Естественно считать, что

*S.* (6.2)

К пределам вида (6.2) приводят много других задач, поэтому возникает необходимость всестороннего изучения таких пределов независимо от конкретного содержания той или иной задачи.

Пусть функция *у*= *f*(*x*) определена на отрезке [*a*;*b*]. Разобьём этот отрезок на *п* произвольных частей точками

*а=х*<*x*<…< *х*< *х*<…<*х=b.*

На каждом из созданных отрезков [*х*; *х*] возьмём произвольную точку **  и составим сумму

**, где = *х- х*,

которую будем называть *интегральной суммой функции*  *f*(*x*).

Обозначим . Если существует конечный предел интегральной суммы **, при , который не зависит ни от способа разбиения отрезка [*a*;*b*], ни от выбора точек**, то этот предел называется *определённым интегралом функции*  *f*(*x*) на отрезке [a;b] и обозначается символом, где функция *f*(*x*) называется интегрированной на отрезке [a;b].

То есть, по определению,

=**.

Числа *а* и *b* называются соответственно нижним и верхним пределом интегрирования.

Относительно существования определённого интеграла имеет место такая теорема

Теорема 6.3. Если функция *f*(*x*) ограничена на отрезке [a;b] и непрерывна на нём везде, кроме конечного числа точек, то она интегрируема на этом отрезке.

**2.** Если *f*(*x*), то  равен площади соответствующей криволинейной трапеции: =*S.* Если *f*(*x*)<0, то = -*S.*

Отсюда следует, что если на симметричном относительно начала координат отрезке [-a;а], а>0 задана нечётная функция, то=0. Например, Если функция *f*(*x*) чётная, то =2.

Свойства определённого интеграла

Будем считать, что все интегралы, которые рассматриваются, существуют.

1. =. Величина определённого интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования.

2. =0.

3. = -.

4. =+.

5. =*А*.

6. =.

7. Если на отрезке [a;b] *f*(*x*), то .

8. Если *т* и *М* – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции *f*(*x*), на отрезке [a;b], то

*т*(*b-a*) *M*(*a-b*).

9. (теорема о среднем значении функции).

Если функция *f*(*x*) непрерывна на отрезке [a;b], то на этом отрезке существует такая точка *с*, что = *f*(*с*) (*b-a*).

Число *f*(*с*)=  называют средним значением функции *f*(*x*) на отрезке [a;b].

**3.** Пусть функция *у*= *f*(*x*) непрерывна на отрезке [*a*;*b*]. Тогда она интегрируема на любом отрезке [*a*;*х*] [*a*;*b*], то есть для произвольного *х*[*a*;*b*] существует интеграл , который, очевидно, является функцией от *х*. Обозначим эту функцию через Ф(*х*)

Ф(*х*)=  (6.3)

и назовём *интегралом с переменным верхним пределом.*

Теорема 6.4. Если функция *f*(*x*) непрерывна на отрезке [a;b], то интеграл (6.3) является дифференцированной функцией на этом отрезке, причём Ф’(*х*)=*f*(*x*).

Другими словами, интеграл с переменным верхним пределом является одной из первообразных подынтегральной функции *f*(*x*).

Пусть функция *у*= *f*(*x*) непрерывна на отрезке [*a*;*b*] и *F*(*x*) – первообразная функции *f*(*x*). Поскольку функция Ф(*х*) = также является первообразной функции *f*(*x*), а две первообразные одной функции отличаются только постоянным слагаемым, то

Ф(*х*)= *F*(*x*) +*С*, или = *F*(*x*)+*С*. (6.4)

Считая в (6.4) *х=а,* получим

=0= *F*(*а*)+*СС=- F*(*а*).

Равенство (6.4) можно записать в виде

= *F*(*x*) *- F*(*а*).

Заменим *х* на *b* и *t* на *x.* Получим формулу

= *F*(*b*) *- F*(*а*),

которая называется формулой Ньютона-Лейбница. Часто её записывают в виде

= *F*(*x*).

Формула Ньютона-Лейбница даёт удобный способ вычисления определённых интегралов.

Если функция *и=и*(*х*), *v=v*(*x*) и их производные *и’*(*х*), *v’*(*x*) непрерывны на отрезке [*a*;*b*], то справедлива формула интегрирования по частям

=*uv**-*.

Если функция *f*(*x*) непрерывна на отрезке [a;b], а функция *х=*и её производная *х’=* непрерывны на отрезке [*a*;*b*], причём **, **, то справедлива формула

=.

Заметим, что, в отличие от неопределённого интеграла, в определённом интеграле нет необходимости делать обратную замену, поскольку появляются новые пределы интегрирования.

При определении определённого интеграла



как предела интегральных сумм предусматривалось, что: 1) отрезок интегрирования [a;b] конечный и 2) подынтегральная функция *f*(*x*) на этом отрезке ограничена. Такой интеграл называется собственным, хотя слово «собственнный», как правило, опускается.

Если же хотя бы одно из двух приведенных условий нарушается, то интеграл называют *несобственным.* Различают два вида несобственных интеграла.

1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

(*несобственные интегралы І рода*).

Если функция *f*(*x*) непрерывна при , то считают

= (6.5)

и в зависимости от существования или не существования конечного предела в правой части формулы (6.5) несобственный интеграл І рода  называют сходящимся или расходящимся. Аналогично

=, =.

1. Несобственные интегралы от неограниченных функций (*несобственные интегралы ІІ рода*).

Если функция *f*(*x*) неограничена в любой окрестности точки *с*(*a;b*) и непрерывна при , и , то по определению считают

=+ . (6.6)

Если оба предела в правой части равенства (6.6) существуют и конечны, то несобственный интеграл считают сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Если функция *f*(*x*) неограничена только на одном из концов отрезка [*a*;*b*], то соответствующие определения несобственного интеграла ІІ рода упрощаются:

=,



если функция *f*(*x*) неограничена в точке *х=а*, и

=,



если функция *f*(*x*) неограничена в точке *х=b.*

**Лекция 15. Тема – Дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, однородные дифференциальные уравнения.**

**План.**

**1. Основные понятия.**

**2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.**

**3. Однородные дифференциальные уравнения.**

**1.** *Дифференциальными уравнениями* называют уравнения, которые содержат неизвестную функцию, её производные и аргументы.

*Обыкновенным*  называется дифференциальное уравнение, в котором неизвестная функция является функцией одной переменной. Если неизвестная функция является функцией многих переменных, то соответствующее уравнение называется *дифференциальным уравнением в частных производных.*

*Порядком дифференциального уравнения* называется наивысший порядок производной, которая входит в это уравнение.

Пример 7.1.

1)  - обыкновенное дифференциальное уравнениеІ порядка.

2) - обыкновенное дифференциальное уравнениеІІІ порядка.

3) +=0 - дифференциальное уравнениев частных производных ІІ порядка (уравнение Лапласа)*.*

Далее будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Наиболее общий вид дифференциального уравнения І порядка такой:

*F*(*x*,*у*,*у*’)=0. (7.1)

Решением этого уравнения на некотором промежутке называется дифференцированная на этом промежутке функция , которая при подстановке её в уравнение превращает его в тождество.

Пример 7.2. Решить уравнение .

Решение.

= *у*, =, ln = *x+*ln, *у=Сех.*

Получили множество решений.

*у*

*С*=2

*С*=1

2

1 *С*=0

0

-1 *С*= -1

-2

*С*=-2

Функция , где *С* – произвольная постоянная, называется *общим решением* уравнения (7.1) в области *D*, если:

1. функция является решениемуравнения (7.1) для всех значений переменной *С* из некоторого множества;
2. для произвольной точки () существует единственное значение *С=С*0, при котором функция удовлетворяет начальному условию

Решение , полученное из общего решения при *С=С*0, называется *частным решением* уравнения (7.1).

С геометрической точки зрения решение определяет некоторое бесконечное множество кривых, которые называются *интегральными кривыми* данного уравнения. Частное решение определяет только одну интегральную кривую, которая проходит через точку с координатами ().

Если общее решение уравнения (7.1) найдено в неявном виде Ф(*х*,*у*,*С*)=0, то такое решение называют *общим интегралом* дифференциального уравнения; равенство Ф(*х*,*у*,*С*0)=0 называют *частным интегралом* дифференциального уравнения.

Значит, для уравнения (7.1) можно поставить две задачи:

1. найти общее решение уравнения (7.1);
2. найти частное решение уравнения (7.1), которое удовлетворяет начальному условию .

Вторая задача называется *задачей Коши* для обыкновенного дифференциального уравненияІ порядка.

Пример 7.3. Решить задачу Коши

, *у*(0)=2.

Решение. Сначала ищем общее решение дифференциального уравнения: *у=Сех.*

Из начального условия имеем: 2= *Се*0  *.*

Решением задачи Коши является такая функция: *у=*2*ех*.

Если уравнение (7.1) можно решить относительно *у’*, то его записывают в виде



и называют уравнением первого порядка, решенным относительно производной, или уравнением в нормальной форме.

Теорема 7.1 (*существования и единственности решения задачи Коши*). Если функция  непрерывна в некоторой области *D*, которая содержит точку *М*(), то задача Коши

, 

имеет решение. Если, кроме этого, в точке *М* непрерывна частная производная , то это решение единственное.

Процесс нахождения решений дифференциальных уравнений называется интегрированием этих уравнений. Если этот процесс сводится к алгебраическим операциям и вычислению конечного числа интегралов и производных, то говорят, что уравнение интегрируется в квадратурах. Однако класс таких уравнений очень ограничен. Поэтому для решения дифференциальных уравнений широко применяют разные приближённые методы интегрирования дифференциальных уравнений с использованием вычислительной техники.

Рассмотрим некоторые типы уравнений, интегрируемых в квадратурах.

**2.**  Дифференциальное уравнение вида



называется *дифференциальным уравнением с разделёнными переменными.*

Чтобы найти его общее решение, достаточно проинтегрировать обе его части.

.

Дифференциальное уравнение вида



называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.*

Чтобы найти его общее решение, надо сначала отделить переменные

****

а затем проинтегрировать

Пример 7.4. Найти общее решение уравнения



Решение. Сначала отделим переменные

 ,

а затем проинтегрируем

, , *у=С*ln*x.*

**3.** Функция называется однородной функцией *п*-го измерения относительно переменных *х* и *у*, если для произвольного числа  выполняется тождество

**

Пример 7.5.

1) =, **

- однородная функция третьего измерения.

2) =- однородная функция нулевого измерения.

Уравнение *y’=*называется *однородным дифференциальным уравнением первого порядка*, если функция является однородной функцией нулевого измерения, то есть, если

** (7.2)

Очевидно, уравнение вида



будет однородным тогда и только тогда, когда функции *Р*(*х*,*у*) и *Q*(*х*,*у*), будут однородными функциями одного и того же измерения. Например, уравнение



однородное. Считая, в соотношении (7.2) , получим

**

Поэтому можно дать ещё одно определение однородного уравнения: *однородным дифференциальным уравнением* называется уравнение вида

** (7.3)

Применим в уравнении (7.3) подстановку

, , 

Тогда получим уравнение с разделяющимися переменными

,

которое всегда интегрируется в квадратурах:

,

.

После интегрирования надо сделать обратную замену, то есть вместо *и* нужно подставить 

Вывод. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка всегда сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными подстановкой ,.

Пример 7.6. Найти общее решение уравнения

**

Решение. Применим подстановку ,. Тогда получим

,

, ,

, , .

Пример 7.7. Решить задачу Коши

, *у*(1)=2.

Решение. Поскольку обе функции

 

однородные измерения два, то данное уравнение однородное. Запишем его в виде

**

и применим подстановку ,. Тогда получим

, 

, , .

Из начального условия найдём постоянную интегрирования:



Подставив найденное значение *С* в общее решение, получим решение задачи Коши:



**Лекция 16. Тема – Уравнения Бернулли. Комплексные числа. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.**

**План.**

**1.Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли.**

**2. Комплексные числа.**

**3. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.**

**1.** *Линейным дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

 (7.4)

где - известные функции переменной *х*.

Термин «линейное уравнение» поясняется тем, что неизвестная функция *у* и её производная *у*’ входят в уравнение в первой степени, то есть линейно.

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка всегда интегрируемо в квадратурах, поскольку его можно всегда свести к двум уравнениям с разделяющимися переменными таким образом (методом Бернулли).

Будем искать решение уравнения (7.4) в виде произведения

 (7.5)

где - неизвестные функции *х*. Находя производную



и подставляя значение *у* и *у’* в уравнение (7.5), получим

 (7.6)

Выберем функцию  так, чтобы выражение в скобках равнялось нулю. Для этого надо решить уравнение с разделяющимися переменными.



Решая его, находим



. (7.7)

Постоянную интегрирования в выражении (7.7) не пишем, поскольку нам достаточно найти только какую-нибудь одну функцию , которая преобразовывает в ноль выражение в скобках в уравнении (7.6).

Подставляя (7.7) в (7.6), получим



 (7.8)

Подставляя (7.7) и (7.8) в (7.5), найдём общее решение уравнения (7.4):

 (7.9)

Замечание. На практике помнить формулу (7.9) не обязательно: достаточно лишь помнить, что линейные дифференциальные уравнения первого порядка, а также уравнения Бернулли, решаются методом Бернулли с помощью подстановки .

*Уравнением Бернулли* называется уравнение вида



где - известные функции *х*, .

**2.** *Комплексным числом* называется выражение

, (7.10)

где *х*, *у* – действительные числа, а символ *i* – мнимая единица, которая определяется условием . При этом число *х* называется *действительной частью* комплексного числа *z* и обозначается , а *у* – *мнимой частью z* и обозначается (от французских слов: *reel –* действительный, *imaginare –* мнимый). Выражение (7.10) называется *алгебраической формой комплексного числа*.

Два комплексных числа и , которые отличаются только знаком мнимой части, называются *сопряжёнными*.

Два комплексных числа и считаются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части:

 

Комплексные числа можно изображать на плоскости. Так число (7.10) изображается в прямоугольной системе координат точкой *М*(*х*;*у*). Такая плоскость называется *комплексной плоскостью* переменной *z*, ось *Ох* называется *действительной*, *у*

а ось *Оу* – *мнимой.*

При *у*=0 комплексное число является одновременно

*у*  *М*(*х*;*у*)

действительным числом. Поэтому действительные числа являются 

отдельным случаем комплексных, они изображаются на оси *Ох.*  

Комплексные числа , в которых *х*=0, называются *чисто*   

*мнимыми*; такие числа изображаются на оси *Оу.*

0 *х х*

Полярные координаты точки *М*(*х*;*у*) на комплексной плоскости называются *модулем* и *аргументом* комплексного числа и обозначаются



Поскольку , то по формуле (7.10) имеем

.

Это выражение называется *тригонометрической формой* комплексного числа *z*.

Модуль комплексного числа определяется однозначно, а аргумент – с точностью до 2:

.

Здесь - общее значение аргумента, а - главное значение аргумента, которое находится на промежутке [0; и отсчитывается от оси *Ох* против часовой стрелки.

Если , то считают, что а - неопределён.

Арифметические действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме, выполняются по обычным правилам действий над двучленами с учётом того, что . Так, если

, , то

1) 

2) 

3) 

4) .

Рассмотрим действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Пусть

, .

Тогда

=



Значит, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Это правило распространяется на произвольное конечное число множителей. В частности,

.

Последняя формула называется *формулой Муавра.*

При делении комплексных чисел имеем

.

Рассмотрим извлечение корня из комплексного числа. Если для данного комплексного числа  надо найти корень *п-*й степени , то по определению корня и формуле Муавра имеем

.

Отсюда

,  .

Поскольку *r* и  положительные, то , где под корнем понимают его арифметическое значение. Поэтому

.

Давая *k* значения 0,1,2,…, *п -*1, получим *п* разных значений корня. Для других значений *k* аргументы будут отличаться от найденных на число, кратное 2, поэтому значения корня будут совпадать с уже найденными.

Известно, что показательную функцию с мнимым показателем можно выразить через тригонометрические функции по формуле Эйлера . Отсюда следует, что всякое комплексное число можно записать в форме , которая называется *показательной формой* комплексного числа *z*.

**3**. Уравнение вида

 (7.11)

где *р*, *q* – постоянные числа, называется *линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.* Для его решения сначала надо составить *характеристическое уравнение*

 (7.12)

В зависимости от корней  уравнения (7.12) общее решение уравнения (7.11) приобретает один из таких видов:

1) , если действительные и ;

2) , если действительные и ;

3) , если ,  ().

Пример 7.8. Решить уравнение

 (7.13)

Решение. Сначала составим и решим соответствующее характеристическое уравнение:

 *D* = 32- 4\*5= -11, 

Характеристическое уравнение имеет два сопряжённых корня:

.

Поэтому общее решение уравнения (7.13) будет таким:

.

**Лекция 17. Тема – Ряды. Числовые ряды. Признаки сходимости. Степенные ряды.**

**План.**

**1. Основные понятия. Необходимое условие сходимости ряда.**

**2. Признаки сравнения. Признаки Даламбера и Коши. Признак Лейбница.**

**3. Степенные ряды. Теорема Абеля. Ряды Тейлора и Маклорена.**

**1.** Пусть задана последовательность чисел:



Выражение



называется *числовым рядом*; числа  называются членами ряда; число называется общим членом ряда.

Сумма *п* первых членов ряда



называется *п-ой частичной суммой ряда.*

Если существует конечный предел

,

то число *S* называют *суммой ряда* , а сам ряд называют *сходящимся.* Если же предел не существует или равен бесконечности, то говорят, что ряд *расходящийся.*

Рассмотрим ряд

.

Это сумма геометрической прогрессии, *q* – знаменатель прогрессии. Если , прогрессия называется убывающей. Сумму первых *п* членов этой прогрессии находят по формуле

. (8.1)

Если , то и . Значит, бесконечно убывающая геометрическая прогрессия всегда сходится. Если , то  и прогрессия расходится.

Если числовой ряд сходится, то разность  между его суммой *S* и частичной суммой  называется *п-м остатком ряда*, то есть

= *S*-.

*Остаток ряда*  является той погрешностью, которая получится, если вместо *S* взять . Поскольку , то, взяв достаточно много первых членов сходящегося ряда, можно сумму этого ряда вычислить с любой точностью.

Отсюда становится понятным, что основной задачей теории рядов является исследование сходимости ряда. Задача нахождения суммы сходящегося ряда имеет второстепенное значений, поскольку после установления сходимости ряда его сумма может быть легко найдена.

Свойства рядов

1. Если ряды и сходятся и их суммы *U* и *V*, то ряд также сходится и его сумма равна *U*  *V.*
2. Если ряд сходится и его сумма равна *S*, то ряд , где *А=const*, также сходится и его сумма равна  *АS.*
3. Конечное количество членов ряда на его сходимость не влияет.

Теорема 8.1. (необходимое условие сходимости ряда). Если ряд сходящийся, то предел его общего члена равен нулю

.

Доказательство.

.

Отсюда . Если ряд сходящийся, то и . Поэтому -- *S*=0.

Следствие. Если , то ряд расходящийся.

Замечание. Условие является необходимым условием сходимости ряда, но не достаточным, то есть выполнение этого условия не гарантирует сходимости ряда.

Пример 8.1. Рассмотрим ряд .

Хотя необходимое условие сходимости ряда выполняется,

,

но ,  и ряд является расходящимся, несмотря на то, предел его общего члена равен нулю.

**2.** Первый признак сравнения. Пусть члены рядов и удовлетворяют условию

 *п*=1,2,3,… .

Тогда, если рядсходящийся, то сходящийся и ряд , а если ряд расходящийся, то расходящийся и ряд .

Второй признак сравнения. Пусть члены рядов и положительны, причём существует конечный предел

.

Тогда оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

Сравнивать ряди удобно с рядами и , сходимость которых известна.

Ряд  является суммой бесконечной геометрической прогрессии. Он сходится при (когда прогрессия убывающая) и расходится при.

Ряд называется обобщенным гармоническим рядом. Он сходится при  и расходится при .

Признак Даламбера. Если для членов ряда с положительными членами существует предел

,

то ряд будет сходящимся при и расходящимся при .

Радиальный признак Коши. Если для членов ряда с положительными членами существует предел

,

то ряд будет сходящимся при и расходящимся при .

Интегральный признак Коши. Если , где - положительная невозрастающая непрерывная функция, то ряд и интеграл  сходятся или расходятся одновременно.

Применим интегральный признак Коши для исследования обобщенного гармонического ряда.

1. ,  - гармонический ряд.

=, ==- расходится.

2. , =, 

Значит, ряд  сходится при  и расходится при .

*Знакочередующимися* называют ряды, в которых знаки членов строго чередуются

, где . (8.2)

Признак Лейбница. Если для членов ряда (8.2) выполняется два условия:

1) .

2) ,

то этот ряд сходится, его сумма положительна и не превышает .

Следствие. Если сумму *S* сходящегося ряда (8.2) заменить суммой *S* его *п* первых членов, то допущенная при этом погрешность не превышает абсолютной величины первого из отброшенных членов, то есть

.

Это следствие широко используется при приближённых вычислениях.

*Знакопеременными* называются ряды, у которых члены имеют разные знаки.

Знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд , составленный из абсолютных величин его членов.

Знакопеременный ряд называется *условно сходящимся*, если он сходящийся, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходящийся.

Теорема 8.2. Любой абсолютно сходящийся ряд сходится.

Для чего надо различать абсолютную и условную сходимость? Как ответ на этот сформулируем две теоремы.

Теорема 8.3. Абсолютно сходящийся ряд остаётся абсолютно сходящимся при произвольной перестановке его членов. При этом сумма ряда не зависит от порядка его членов.

Теорема 8.4. Члены условно сходящегося ряда всегда можно переставить так, чтобы его сумма равнялась наперёд заданному числу. Более того, можно так переставить члены условно сходящегося ряда, что новый ряд будет расходящимся.

Интересные свойства условно сходящихся рядов показывает такой пример.

Пример 8.2. Пусть 1-.

Запишем ряд иначе:

=

=(1-,

  2=1?

Значит, переставляя члены условно сходящегося ряда, получили неверный результат.

**3.**  Ряд , членами которого является функцией от *х*, называется *функциональным* рядом. Давая переменной *х* конкретные числовые значения, получим разные числовые ряды, которые могут быть сходящимися или расходящимися.

Множество всех значений *х*, для которых ряд сходящийся, называется *областью сходимости* этого ряда.

Функциональный ряд вида  (8.3)

где - числа, называется *степенным рядом.*

Переобозначив на *х*, ряд (8.3)всегда можно свести к виду  (8.4)

Для простоты будем изучать ряды вида (8.4). Ряд (8.4) всегда сходится, по крайней мере, в точке *х*=0.

Теорема Абеля.(1802-1829). Если ряд (8.4) сходящийся при , то он абсолютно сходящийся для всех значений *х*, что удовлетворяют неравенству , то есть в интервале . Если при  ряд (8.4) расходящийся, то он расходящийся для всех значений *х*, что удовлетворяют неравенству .

Из теоремы Абеля следует, что если ряд (8.4) сходится хотя бы в одной точке , то существует такое число *R*>0, что при ряд сходится абсолютно, а при  расходится. Это число *R* называют *радиусом сходимости* степенного ряда, а интервал - его *интервалом сходимости.*

Радиус сходимости ряда (8.5) можно найти по формулам

 или . (8.5)

Вывод. Чтобы найти область сходимости ряда (8.5) надо:

1. найти интервал сходимостиряда, применяя к ряду  признаки Даламбера и Коши, или пользуясь формулами (8.5);
2. исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости, то есть в точках .

В середине интервала сходимости степенные ряды можно почленно интегрировать и дифференцировать, причём полученные при этом ряды будут иметь тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

Если функция *f*(*х*) в интервале имеет производные всех порядков и существует такое число *М*>0, что, , *п*=0, 1, 2,…, где , то функцию *f*(*х*) можно разложить в *ряд Тейлора*

.

При ряд Тейлора имеет вид



и называется *рядом Маклорена.*

Приведём примеры рядов Маклорена некоторых элементарных функций.

 ;

  ;

  ;

 ;

=  ;

 ;

Ряды широко используются для приближённого вычисления функций, интегралов, для приближённого интегрирования дифференциальных уравнений.