***Пошукова робота***

***на тему:***

*Канонічні рівняння кривих другого порядку (коло, еліпс, гіпербола, парабола).*

**План**

* Канонічні рівняння кривих другого порядку
* Еліпс.
* Гіпербола.
* Парабола.
* Рівняння еліпса, гіперболи, параболи в полярних координатах.

**1. Криві другого порядку на площині**

            Множині рівнянь, що зв’язують дві змінні у деякій плоскій системі координат, відповідає множина кривих найрізноманітніших форм. Пряма лінія – частинний випадок кривої. Криву можна розглядати як слід переміщення точки. У математиці криву задають аналітично, тобто її рівнянням.

            Тут ми розглянемо лише криві другого порядку, тобто їх рівняння є алгебраїчними рівняннями відносно двох змінних, які входять у нього не вище як у другому степені. Отже, в загальному плані крива другого порядку описується рівнянням

           ,           (3.36)



де  - деякі коефіцієнти.



            Найпоширеніші з кривих другого порядку – еліпс і його частинний випадок – коло, гіпербола і парабола. Про еліпс згадується ще у середній школі у зв’язку з вивченням закону всесвітнього тяжіння і рухом планет навколо Сонця та рухом штучних супутників навколо Землі. Спостерігаючи за рухом планет навколо Сонця, Кеплер склав таблиці, що описували їх положення на небесній сфері і підтверджували той факт, що всі планети рухаються навколо Сонця по еліпсах. Французький вчений Левер’є, аналізуючи таблиці Кеплера, прийшов до висновку, що в русі останньої на той час планети Уран спостерігаються значні відхилення від еліптичної траєкторії. Він робить припущення, що причиною цих відхилень є невідома на той час планета, яка знаходиться далі від Сонця, ніж Уран. Після тривалих і складних обчислень він знаходить координати нової планети. Тому про нову планету (її потім було названо Нептуном) кажуть, що вона була відкрита “на кінчику олівця”.

            З еліпсом доводиться мати справу і в техніці: еліптичний циркуль для креслення еліпса і на його зворотній дії побудовано патрон Леонардо да Вінчі для верстатів, за допомогою яких обробляються деталі з перерізом еліптичної форми. У конструкціях ряду верстатів застосовуються зубчасті еліптичні передачі (рис.3.16).

Загальновідомо також, що від прожектора світлові промені йдуть паралельним пучком, а їх дзеркала параболічні, тобто будь-який їх осьовий переріз є параболою. І навпаки, лінза з осьовим параболічним перерізом збирає паралельні промені в одну точку. На цій основі можна за допомогою такої лінзи одержувати в її фокусі високі температури.

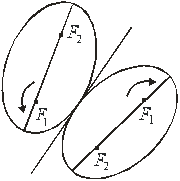


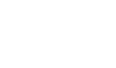
Рис.3.16

**3.6.1. Еліпс**

            Нехай у рівнянні (3.40)  дорівнюють нулю, коефіцієнти  і мають однаковий знак, протилежний знаку . Тоді рівняння кривої матиме вигляд ,



.



            Оскільки  і , то можна покласти , . Тоді рівняння набере вигляду



                                        .                           (3.37)



            Крива, що описується цим рівнянням, називається *еліпсом.* При заміні  на  і  на  рівняння не змінюється, тому крива (3.37) є центрально-симетричною фігурою, тобто її центром є початок координат .



При матимемо , а при . Виразимо з (3.37)



Виразимо з (3.37)  через . Тоді для першої чверті матимемо



                          .                                       (3.38)



            Очевидно, що , тобто .



            Це означає, враховуючи центральну симетричність кривої (3.37), що еліпс розміщений між двома прямими  і . Аналогічно можна показати, що еліпс (3.37) розміщений і між прямими і .            Отже, еліпс розміщений всередині прямокутника, визначеного вказаними чотирма прямими. З центральної симетричності еліпса і попередніх міркувань випливає, що еліпс дотикається до сторін вказаного прямокутника в точках з координатами: .



            Ці точки називаються вершинами еліпса, а відрізки і - його осями. Початок координат – точка  є центром еліпса. Відрізки і  - його осями. Початок координат – точка  є центром еліпса. Відрізки і - осі еліпса, а їх половини – півосі. При цьому вісь осі називатимемо великою віссю еліпса, а вісь  осі  - малою.



            Розглянемо на осі  дві точки  і , а на кривій довільну точку . Нехай сума  дорівнює деякому числу , тобто



            Після звільнення у цій рівності від ірраціональностей (пропонується читачеві виконати це самостійно), одержимо

.



            Щоб ця рівність збігалася з (3.41), треба прийняти  і



. Отже, . Звідси випливає, що на осі всередині прямокутника існують дві точки  і ,



що сума їх віддалей від довільної точки  еліпса дорівнює - великій осі еліпса.



            З цих міркувань одержуємо таке означення: *еліпсом* називається множина точок площини, сума віддалей яких від двох даних точок (фокусів) є величина стала  і дорівнює.



            З формули (3.38) очевидно, що при збільшенні   від    до   величина   зменшується від    до



            Оскільки друга похідна функції (3.42) по  від’ємна   то у першій  чверті крива опукла.



            Враховуючи крім того центральну симетричність еліпса, тепер можна здійснити його схематичну побудову (рис.3.17).

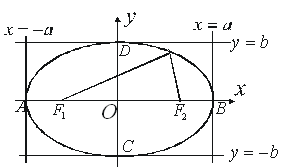


      Рис.3.17

Точну побудову еліпса можна здійснити так: у точках  і   прикріплюється нитка певної довжини. Якщо її натягнути, потім, тримаючи нитку натягнутою, олівцем описати замкнену криву, то вона і буде згідно з означенням еліпсом.



            Еліпс одержується механічно шляхом обертання гнучкого круга кільцевої форми (рис.3.18).

Слід зауважити, що звичайним циркулем еліпс побудувати неможливо, бо будь-якої довжини дуга не може збігатися з будь-якою частиною еліпса. Фігура, подібна за формою до еліпса і побудована за допомогою циркуля, не еліпс, а овал.

*Ексцентриситетом* еліпса називається відношення віддалі

між фокусами еліпса до довжини великої осі:  .

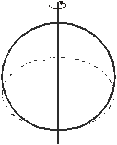


                                           Рис. 3.18

Оскільки  то   . Для кола  . Тому ексцентриситет кола  дорівнює нулю.



            Позначимо   Величини   назвемо фокальними  радіусами. З означення еліпса маємо Легко встановити, що    З останніх  двох рівнянь одержимо



                           .                      (3.39)



            На рис. 3.19 зображено еліпс і прямі  ,   довільна точка  ,  її віддаль   від прямої  . Розглянемо відношення    Якщо    то   Те саме можна  виконати і з прямою  . Отже, одержимо дві прямі  .  Ці дві прямі називаються *директрисами* еліпса. Із сказаного приходимо до такого висновку: відношення віддалей будь-якої точки еліпса до фокуса і відповідної директриси є величина стала, що дорівнює ексцентриситету   еліпса.



Якщо ексцентриситет еліпса зменшується, то директриса  еліпса віддаляються від нього, сам еліпс стає все більш опуклим і у граничному випадку, коли він стає рівним нулю, директриси віддаляються на нескінченність. Це означає, що коло не має директрис. При збільшенні ексцентриситету еліпс стає все більше розтягнутим, а директриси при цьому стають все ближчими до еліпса.

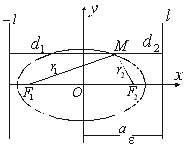


                                          Рис. 3.19

            Нехай потрібно знайти дотичну до еліпса  у точці  ,  що належить еліпсу. Розглянемо довільну пряму  , що проходить через точку .  У рівняння еліпса замість   підставимо   і розв’яжемо квадратне рівняння



            В результаті одержимо квадратне рівняння відносно . Щоб одержане рівняння мало лише один розв’язок, тобто щоб вказана пряма була дотичною до еліпса у точці , необхідно і достатньо, щоб дискримінант квадратного рівняння відносно   дорівнював нулю. З цієї умови знайдемо  . Після цього вже легко записати рівняння дотичної.   Читачеві пропонується довести вказаним способом, що рівняння дотичної матиме вигляд



            Цю ж задачу можна розв’язати і за допомогою похідної.

            Приклад. Написати рівняння дотичної, що проходить через точку  , до еліпса



            Р о з в ’ я з о к.  Нехай рівняння дотичної має вигляд



Тоді, підставивши  у рівняння  еліпса, одержимо:



                .



Після спрощення, це рівняння матиме вигляд

       .



            Щоб  пряма   була дотичною до еліпса, треба, щоб попереднє рівняння мало лише один розв’язок. Це буде тоді, коли його дискримінант дорівнює нулю, тобто



      .



Після скорочення на 4 матимемо



У результаті спрощень приходимо до рівняння



звідки



Отже через задану точку   до еліпса можна провести дві дотичні:



           Зауваження.   У цьому прикладі  не лежить на еліпсі. Тому безпосередньо скористатись наведеною формулою для дотичної неможливо, бо формула виведена для того випадку, коли точка, через



яку треба провести дотичну, лежить на еліпсі.

            Рівняння еліпса у прямокутних координатах має вигляд



            Очевидно, що коли в рівняння еліпса замість   і   підставити відповідно    і  , то одержимо тотожність , то одержимо тотожність ,       тобто формули  задовольняють рівняння еліпса. Тому     теж є рівняннями еліпса. Ці рівняння називають *параметричними рівняннями еліпса*, бо  тут залежать від параметра  .  Параметричними рівняннями можуть описуватись і криві, значно складніші за еліпс. Наприклад, крива



не є еліпсом. Але її теж можна описати параметричними рівняннями:

                                .



            Вони значно простіші, ніж рівняння, задане в прямокутній системі координат.

**3.6.2. Гіпербола**

            Якщо в рівняння (3.40) всі коефіцієнти, крім   і дорівнюють нулю, причому  мають різні знаки, то одержимо



                     .



            Останнє рівняння можна записати у вигляді

                                       ,                            (3.40)



де     або



            Далі детально зупинимось на першому з рівнянь (3.40) (із знаком “+ “ в правій частині). Крива, що описується цим рівнянням, називається *гіперболою*. Як у випадку еліпса, вона є центральносиметричною кривою. (Чому?) Виразимо з рівняння гіперболи змінну   через  , вважаючи, що    і   (перша чверть):



                                                                 (3.41)



            Областю визначення цієї функції є  , причому при



 зростанні   від   до      зростає від нуля до . Оскільки , то крива (3.41) опукла.



            Розглянемо пряму   і  оцінимо різницю



                           .



            Очевидно, що при будь-яких  матимемо . Якщо  прямує до , то вираз в дужках є невизначеністю типу  . Для її розкриття помножимо і поділимо праву частину на  . Тоді одержимо



                          .



            Тепер уже очевидно, що при  різниця  прямує до нуля, тобто   прямує до злиття з кривою .



На основі викладених міркувань легко побудувати схематично криву, що зображається першим з рівнянь (3.40), якщо врахувати при цьому, що відповідна  крива центральносиметрична (рис. 3.20).

Побудову гіперболи найкраще виконувати, перш за все побудувавши її асимптоти. Точки   і   називаються вершинами  гіперболи, вісь - дійсною, а вісь - уявною осями гіперболи.



Як і у випадку еліпса, розглянемо дві точки   і  ,



, а також точку   на кривій. Запишемо різницю:



                   .



Після тотожних перетворень одержимо

                                     .



Щоб ця рівність збігалася з (3.40), повинно бути .

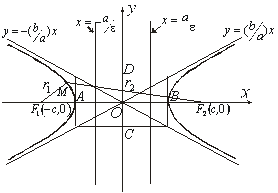


                                         Рис. 3.20

            Оскільки, то   . Звідси одержуємо таке означення гіперболи.



*Гіперболою* називається множина точок, різниця віддалей якихвід двох даних точок є сталою величиною. Точки  і   називаються фокусами гіперболи. Якщо у рівнянні гіперболи , то вона називається рівносторонньою, бо її дійсна і уявна осі рівні між собою.



Вісь   називається уявною, тому що з рівняння гіперболи при  одержуємо , де  - уявна одиниця.



            Введемо в розгляд фокальні радіуси гіперболи . Тоді на основі означення гіперболи одержимо  . Як і у рівнянні еліпса, маємо



                                   .



З цих двох рівнянь маємо



де  .



Величина  називається ексцентриситетом гіперболи. Як і у випадку



еліпса, прямі   називаються директрисами гіперболи. Через те, що , директриси розміщені між вітками гіперболи.



Так само, як і у випадку еліпса, можна довести, що відношення віддалей будь-якої точки гіперболи до фокуса і відповідної директриси є величина стала і дорівнює .



            У курсі математики і, особливо, в прикладних її розділах велику роль відіграють гіперболічні функції

      .



            Легко довести, що  .



            Розглянемо тепер гіперболу

.



            Нехай  , де  - змінний параметр. Підставивши у рівняння гіперболи вирази для  ,  одержимо  , тобто вони задовольняють рівнянню гіперболи. Тому рівняння



є параметричним рівняння гіперболи.

            Рівняння дотичної прямої до гіперболи в точці , що лежить на гіперболі, має вигляд



            Приклад.  На площині задано дві точки   (рис. 3.21).           Дві прямі обертаються навколо цих точок у протилежних напрямках з однаковою кутовою швидкістю. Перед початком руху одна з прямих збігається з прямою  , друга - перпендикулярна до . Знайти рівняння кривої, що описується точкою перетину прямих, що обертаються.



            Р о з в ’ я з о к.   Вісь   проведено через точки  , а вісь   через точку   - середину відрізка   перпендикулярно до . Розглянемо проміжне положення двох прямих, що обертаються. Нехай вони перетинаються у точці  , причому їх кутові швидкості обертання дорівнюють . Нехай від початку руху пройшов час  . Тоді  .



З рис .3.29 маємо



;



.



            Звідси  .

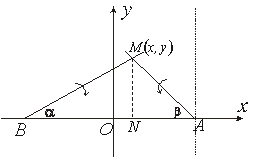


                                         Рис. 3.21

            Отже траєкторією точки перетину прямих  є рівнобічна гіпербола.

**3.6.3.Парабола**

Нехай в (3.36) всі коефіцієнти, крім  і   дорівнюють нулю. Тоді матимемо або



                                 ,                             (3.42)



де  . Зрозуміло, що коли , то , і коли       , то  .



            Розглянемо випадок, коли .



            Крива, що описується рівнянням (3.42), називається *параболою.*

            Виходячи лише з рівняння (3.42), вивчимо її властивості, форму і побудуємо графік.

            З самого рівняння ясно, що відповідна крива симетрична відносно осі  , бо при заміні   на   рівняння не змінюється. Оскільки  , то графік параболи розміщений у І-й  і  ІУ-й чвертях. Обмежуючись тимчасово І чвертю, встановимо її властивості. Маємо . Ясно, що крива проходить через початок координат, що при зростанні  зростає і ,  що  , а це означає, що відповідна крива є опуклою.



            Отже, її графік має вигляд рис.3.22.

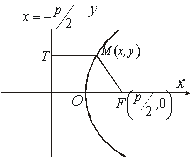


          Рис. 3.22

            Розглянемо деяку точку   і пряму  і обчислимо:,  . Вияснимо, при яких   рівність   збігається з (3.42).



            Звільнившись від ірраціональності, після спрощення, одержимо .  Тоді  . Враховуючи все це, приходимо до висновку, що співпадання з рівнянням (3.42) відбудеться при   тобто  а це означає, що  .



Виходячи з цього, маємо таке означення параболи: параболою називається множина точок, рівновіддалених від даної точки, яка називається фокусом, і даної прямої, що називається директрисою.

            З описаного випливає, що парабола має лише одну директрису , що фокус параболи знаходиться в точці і що її ексцентриситет  .



Всі три криві (еліпс, гіпербола і парабола) визначають множину точок площини, відношення яких від даної точки (фокуса) до віддалі від даної точки до даної прямої (директриси) є величина стала .

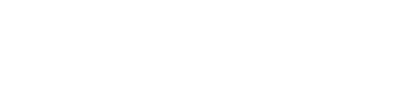
**3.6.4. Рівняння еліпса, гіперболи і параболи в полярних**

**координатах**

            Нехай  - один із фокусів еліпса або гіперболи, або фокус параболи,  - дуга однієї з вказаних кривих (рис. 3.23).   Із рисунка маємо



             З останньої рівності маємо



                                                               (3.43)



Рівняння (3.43) описує одну з кривих (еліпс, гіперболу або параболу) залежно від того, яким є  :



якщо   ,  то рівняння описує еліпс;



якщо  ,  то рівняння описує гіперболу;



якщо   , то рівняння описує  параболу.



Універсальність полягає в тому, що одним і тим самим рівнянням описуються  всі криві (еліпс, гіпербола і парабола). Рівнянням (3.43)  користуються в механіці та астрономії при вивчені руху  планет.

Вказані три криві мають спільне походження: всі вони є певними перерізами двопорожнинного конуса. Цей факт чудово ілюструється  рис.3.24 і вказує на джерело універсальності трьох розглянутих кривих.

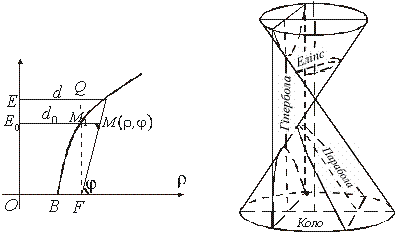


                  Рис. 3.23                                        Рис. 3.24