

Г.П. БЕВЗ, В.Г. БЕВЗ

М АТЕМАТИКА



Підручник
для загальноосвітніх
навчальних закладів

Рівень стандарту

*Рекомендовано Міністерством
освіти і науки України*

Київ
«Генеза»
2010

Передмова

Науку математику можна розглядати з різних точок зору. Одні бачать у ній насамперед своєрідний інструмент для науковців, інженерів і техніків. Бо за допомогою математичного моделювання можна порівняно легко і швидко розв'язувати дуже важливі прикладні проблеми, які іншими методами розв'язувати надто дорого або неможливо. Ось що говорили про математику відомі люди:

«У вивчення природи математика робить найбільший внесок» (Прокл, V ст.).

«Той, хто не знає математики... не може пізнати світ» (Р. Бекон, XIII ст.).

«Люди, які засвоїли великі принципи математики, мають на один орган чуття більше, ніж прості смертні» (Ч. Дарвін, XIX ст.).

Математика не тільки корисний інструмент чи засіб, а й значна частина загальнолюдської культури. Якщо історик описує тільки війни і революції, діяльність царів, полководців і митців, його історія неповна, однобічна. Номо sariens – людина мисляча. Тому історія людства передусім має містити описи діяльності кращих мислителів, зокрема й математиків. Чи відоме вам найбільше відкриття XVII ст.? Воно стосується математики. А чи може історик обминати найважливіші відкриття? Які найістотніші зміни відбулися в другій половині XX ст.? Створення швидкодіючих електронних обчислювальних машин (ЕОМ), а на їх основі – комп'ютерів. Комп'ютеризація науки і виробництва безперечно вносить у розвиток людства зміни набагато важливіші й вагоміші, ніж зміни урядів, локальні війни і будь-що інше. Щоб правильно описати цю епоху, історик має сказати про створення ЕОМ і комп'ютерів, а для цього він повинен хоч трохи знати історію математики.

Дехто з учнів говорить: «Мені не потрібна математика, бо я не збираюся бути математиком». Подібна аргументація анітрохи не краща такої: «Мені не потрібен автомобіль, бо я не збираюся бути шофером».

Математика – це своєрідна мова, засіб спілкування. Чи ж може філолог ефективно досліджувати різні мови, не маючи уявлення про сучасну математичну мову та її історію?




Математика – основа багатьох наук, починаючи від філософії й аж до космогонії. А ще вона – логічний тренінг мислительної діяльності для фахівців з будь-якої галузі знань. Не випадково багато математиків добре виявили себе і в інших галузях. Наприклад, Піфагор, Р. Декарт, Б. Паскаль – філософи, О. Хайям – поет, П. Ферма – юрист, І. Кеплер – богослов, Г. Лейбніц –

магістр філософії, доктор права, юрист, дипломат. Цей список можна продовжувати.


Справжній математик має не тільки на один «орган чуття» більше від звичайної людини, він має також значно більше «ступенів свободи». З тривимірного простору йому зовсім не важко перейти в чотиривимірний чи в будь-який n -вимірний або в простір Банаха, Гільберта, Клейна тощо. А кожний із цих просторів – дивний своєрідний світ, багатший і корисніший від світів, вигаданих фантастами. Математика та її історія настільки багаті, що справжній філософ, історик, будь-який гуманітарій у них може знайти чимало цікавого й корисного.

У цьому підручнику пропонується інтегрований курс математики. До нього входять найважливіші теми з арифметики, алгебри, початків аналізу та з геометрії.

Окремі теми ви вже знаєте з попередніх класів, а більшість – зовсім нові. Намагайтеся опанувати їх. Читаючи теорію, основну увагу звертайте на слова, надруковані курсивом і жирним шрифтом. *Курсивом* виділено терміни, назви понять. **Жирним шрифтом** надруковано важливі твердження, теореми.

Знати математику – це насамперед уміти користуватися нею. Учитися користуватися математичними знаннями найкраще під час розв’язування задач. У підручнику є задачі до кожної теми, до кожного параграфу – різних рівнів складності. Задачі і вправи в підручнику поділено на:  «Виконайте усно», рівень А, рівень Б і  «Вправи для повторення». Завдання, рекомендовані для домашньої роботи, виділено кольором. У кожному параграфі підручника є рубрика  «Виконаємо разом», у якій подано задачі з розв’язаннями. Радимо переглянути їх, перш ніж виконувати домашнє завдання.

Цікаві доповнення до основного матеріалу містяться в рубриках «Історичні відомості».

Для узагальнення і систематизації вивченого матеріалу призначено рубрики «Головне в розділі» і  «Самостійна робота».

У додатках для тих, хто хоче дізнатися більше, пропонуються теми для робіт творчого характеру і список відповідної літератури.

Математику можна порівняти з великим і барвистим квітником, у якому кожен може дібрати собі букет за смаком. Зрозуміло, щоб зробити це, спершу треба ввійти в цей квітник.

Ласкаво просимо!

Автори

Алгебра і початки аналізу

*Математика —
це гімнастика
розуму і підготовка
до філософії.*

Ісократ (IV ст. до н. е.)

Числа, функції, рівняння



ТЕМИ РОЗДІЛУ:

- дійсні числа та обчислення;
- відсоткові розрахунки;
- числові функції, їх властивості та графіки;
- корінь n -го степеня;
- степені з раціональними показниками, їх властивості;
- степеневі функції, їх властивості та графіки;
- ірраціональні рівняння та нерівності

§ 1. Дійсні числа

Важливу роль у математиці відіграють числа. Найпростіші з них – *натуральні числа* 1, 2, 3, 4, 5, ..., які використовують під час лічби. Вони були відомі ще в доісторичні часи. Зрозуміло, що називали і записували їх раніше не так, як тепер.

Не слід ототожнювати числа із цифрами. Цифри – це значки, якими позначають числа. Натуральних чисел існує безліч, а цифр – тільки десять: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Такі цифри називають арабськими або індійськими. Іноді числа позначають також римськими цифрами I, V, X, L, C, D, M, які відповідають числам 1, 5, 10, 50, 100, 500 і 1000. Наприклад, число 1998 римськими цифрами записується так: MCMXCVIII. Якщо тисяч багато, їх відокремлюють від одиниць літерою *m*. Запис XXVIIImCCLXXXIV означає число 27 284.

Існують спеціальні позначення чисел в азбуці Морзе. А в рельєфно-точковому шрифті Брайля цифри позначають різними конфігураціями точок (мал. 1).

Згадаємо, як називають і позначають великі числа:

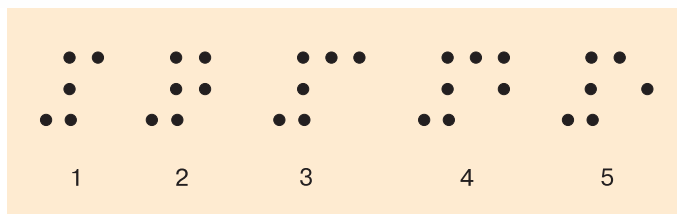
мільярд – $1\,000\,000\,000 = 10^9$;

трильйон – $1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$;

квадрильйон – $1\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{15}$;

квінтильйон – $1\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{18}$.

У різних країнах великі числа називають по-різному. Наприклад, трильйоном у США, Франції називають число 10^{12} , а в Англії, Німеччині 10^{18} . Ми словами «мільярд» і «більйон» називаємо одне й те саме число 10^9 , а в Німеччині більйоном прийнято називати число 10^{12} . Варто звернути увагу також на те, що ми число 0 не вважаємо натуральним, а в Італії, Франції та деяких інших країнах 0 відносять до натуральних чисел.



Мал. 1

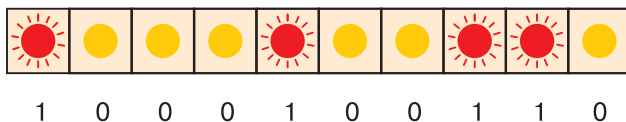
Десятьма різними цифрами записують числа у *десятковій системі*, у якій рахують одиницями, десятками, сотнями та іншими степенями числа 10. Існують також *недесяткові системи числення*. Найпростіша з них – *двійкова*, у якій рахують одиницями, двійками, четвірками та іншими степенями числа 2. Для позначення чисел у двійковій системі досить двох цифр: 0 і 1. Наприклад, записане в десятковій системі число 137 (або $1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 7$) можна подати у вигляді суми $1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^3 + 1$. Тому в двійковій системі його записують так: 10001001.

Навчившись записувати натуральні числа за допомогою лише двох цифр 0 і 1, учені одержали можливість позначати їх електричним струмом: цифра 0 – струм не проходить, 1 – проходить. Уявіть, наприклад, блок з десяти лампочок. Якщо в ньому увімкнено тільки першу, п'яту, восьму і дев'яту лампочки (мал. 2), то вважають, що позначено число 1000100110. Переключати такі блоки, тобто «записувати і витирати» числа, а отже, додавати і віднімати їх, можна за тисячні частки секунди. Удосконалюючи такі «суматори», фахівці створили швидкодіючі електронні обчислювальні машини. Об'єднавши ЕОМ з телевізорами, створили комп'ютери. В основі цього – запис числа тільки двома цифрами!

Крім натуральних, відомі також числа цілі, раціональні, дійсні та інші. Множина *цілих чисел* містить усі натуральні числа, усі протилежні їм числа і 0, тобто це числа

..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5,

Системи числення	
двійкова	десяткова
1	1
10	2
11	3
100	4
101	5
110	6
111	7
1000	8
1001	9
1010	10
1011	11



Мал. 2

Цілі числа разом з дробовими утворюють множину *раціональних чисел*. Раціональним називають кожне число, яке можна подати у вигляді дроби $\frac{m}{n}$, де m – число ціле, а n – натуральне. Кожне раціональне число можна записати у вигляді скінченного або нескінченного періодичного десяткового дроби.

Існують числа, відмінні від раціональних. Наприклад, обчислюючи значення $\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, π , дістають нескінченні неперіодичні десяткові дробі:

$$\sqrt{2} = 1,4142135\dots, \quad \sqrt{10} = 3,1622776\dots, \quad \pi = 3,1415926\dots$$

Ці числа – не раціональні.

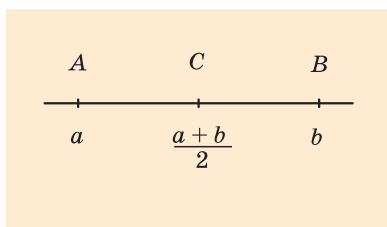
Числа, які зображаються нескінченними неперіодичними десятковими дробами, називають *іраціональними*. Іраціональний – значить не раціональний (лат. *ir* відповідає заперечувальній частці *ne*).

Іраціональними називають числа, які не можна виразити у вигляді відношення двох цілих чисел. Усі раціональні й іраціональні числа разом називають *дійсними числами*. Кожному дійсному числу на координатній прямій відповідає єдина точка і кожній точці координатної прямої – єдине дійсне число.

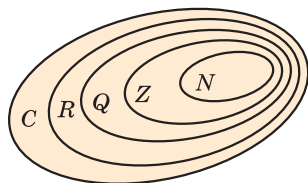
Уявіть, що на координатній прямій позначено дві довільні точки A і B з раціональними координатами a і b (мал. 3). Скільки на відрізку AB існує точок з раціональними координатами? Безліч. А точок з іраціональними координатами? Значно більше, ніж з раціональними!

Множини натуральних, цілих, раціональних, дійсних і *комплексних чисел* позначають відповідно літерами N , Z , Q , R , C . Кожна із цих множин нескінченна і є підмножиною (частиною) наступної множини (мал. 4). Тому будь-яке натуральне число можна вважати водночас і цілим, і раціональним, і дійсним, і навіть комплексним (про комплексні числа читайте на с. 78).

Множину R дійсних чисел також називають числовою прямою, а її елементи (числа) – точками числової прямої.



Мал. 3



Мал. 4



ПІФАГОР САМОСЬКИЙ (бл. 580–500 рр. до н. е.)



Давньогрецький математик, філософ. Організував свою школу (піфагорейський союз), яка була водночас і релігійним братством, і політичною партією. Досліджував проблеми теорії чисел, геометрії, гармонії, астрономії. Вважав, що все визначають числа. Досліджував різні види чисел: парні, трикутні, квадратні, досконалі, дружні тощо. Виявив, що сторона квадрата і його діагональ не мають спільної міри.

Дійсні числа можна порівнювати.

З двох додатних дійсних чисел більше те, у якого ціла частина більша. Якщо цілі частини рівні, більшим вважається те число, у якого перший з неоднакових десяткових знаків більший, а всі попередні однакові.

Приклади. $1,4148... > 1,4139... ;$
 $-1,4162... < -1,4139... ;$
 $-0,0674... < 0,00176... .$

Розглянемо деякі властивості множини дійсних чисел. Множина дійсних чисел R нескінченна, не містить ні найменшого, ні найбільшого числа. Множини N , Z і Q є її підмножинами. Як і множина Q , множина дійсних чисел скрізь щільна, тобто для будь-яких двох різних дійсних чисел завжди можна назвати таке третє дійсне число, яке більше за одне з даних, але менше за друге. Це впливає з того, що коли $a < b$, то

$$a < \frac{a+b}{2} < b.$$

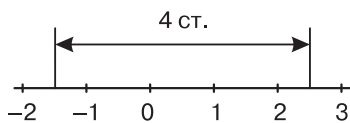


ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Як позначають натуральні числа? Наведіть приклади.
2. Наведіть приклад недесяткової системи числення.
3. Які ви знаєте назви для великих чисел? Запишіть кілька великих чисел та назвіть їх.
4. Назвіть найменше натуральне число. Чи існує найбільше натуральне число?
5. Які числа називають цілими? Як позначається множина цілих чисел?
6. Як називаються цілі додатні числа?
7. Назвіть ціле число, яке більше від найбільшого цілого від'ємного числа, але менше від найменшого додатного цілого числа.
8. Сформулюйте означення раціонального числа. Як позначається множина раціональних чисел?



Виконаємо разом



Мал. 5

1. Одна подія сталася в середині 3 ст. н. е., а друга – в середині 2 ст. до н. е. Скільки часу пройшло між цими двома подіями?

● **Розв'язання.** $1,5 + 2,5 = 4$ ст. (мал. 5).

Відповідь. 4 століття.

✓ **Зауваження.** На традиційній осі часу відсутні нульовий вік і нульовий рік, тому вона відрізняється від математичної числової осі. І якщо одна подія відбулася в m -му році до н. е., а друга – в n -му році н. е., то між цими подіями пройшло не $m + n$, а $m + n - 1$ років.

2. Доведіть, що між будь-якими двома раціональними числами a і b на числовій прямій існує безліч раціональних чисел.

● **Розв'язання.** Нехай $a < b$. Тоді $2a < a + b$ і $a + b < 2b$, звідси $a < \frac{a+b}{2} < b$. Якщо a і b раціональні, то число $\frac{a+b}{2}$ також раціональне. Позначивши його літерою m , так само переконаємося, що число $\frac{a+m}{2}$ також раціональне і т. д.

3. Подайте у вигляді десяткового дробу: а) $\frac{9}{8}$; б) $\frac{4}{11}$; в) $\frac{7}{6}$.

● **Розв'язання.** Щоб перетворити звичайний дріб у десятковий, потрібно чисельник даного дробу поділити на його знаменник. Маємо:

$$\text{а) } \frac{9}{8} = 1,125; \quad \text{б) } \frac{4}{11} = 0,363636\dots; \quad \text{в) } \frac{7}{6} = 1,1666\dots$$

Відповідь. а) 1,125; б) 0,363636...; в) 1,1666...

4. Більше чи менше від мільярда число 2^{30} ?

● **Розв'язання.** $2^{30} = (2^{10})^3 = 1024^3 > 1000^3$.

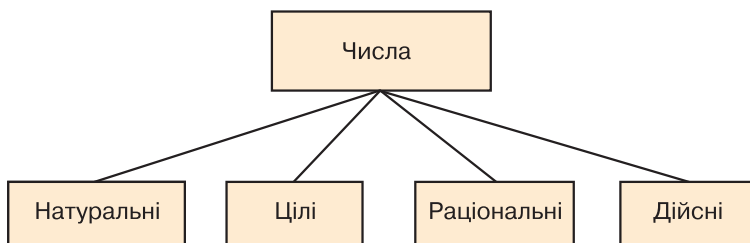
Відповідь. Число 2^{30} більше від мільярда.



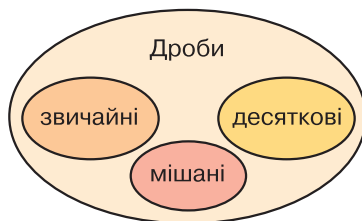
Виконайте усно

1. Які із чисел 35, -128, $\sqrt{25}$, $\sqrt{10}$, $-\sqrt{0,04}$ – раціональні, які – ірраціональні, які – дійсні?

2. Яке з тверджень правильне:
 а) кожне натуральне число є дійсним;
 б) кожне ціле число є дійсним;
 в) кожне раціональне число є дійсним;
 г) кожне ірраціональне число є дійсним;
 ґ) не кожне дійсне число є раціональним;
 д) не кожне дійсне число є ірраціональним?
3. Укажіть правильні твердження:
 а) 2π – число дійсне; б) $-\pi$ – число ірраціональне;
 в) $1 + \pi$ – число ірраціональне; г) $\pi : 2\pi$ – число раціональне.
4. Чи правильні схеми на малюнках 6 і 7?



Мал. 6



Мал. 7

5. Які із записів правильні?
 а) $-3 \in N$; б) $0 \in R$; в) $0,5 \in Z$; г) $\sqrt{80} \in N$;
 ґ) $-7 \in Q$; д) $\sqrt{5} \in R$; е) $\sqrt{0,4} \in Z$; є) $0,333 \in Q$.
6. Чи правильні твердження:
 а) будь-яке натуральне число є раціональним;
 б) будь-яке натуральне число є дійсним;
 в) будь-яке ціле число є натуральним;
 г) будь-яке раціональне число є цілим;
 ґ) будь-яке ірраціональне число є дійсним?
7. Для будь-яких дійсних чисел a, b, c правильні рівності
 $a + b = b + a$, $a + (b + c) = (a + b) + c$, $ab = ba$, $a(bc) = (ab)c$,
 $(a + b)c = ac + bc$.

Які закони дій виражають ці рівності?

8. На скільки число 3 більше від -2 ? А від 2 ?
9. Назвіть кілька раціональних чисел. Чи є раціональними числа 5 ; -3 ; $\sqrt{49}$; 0 ; $2,01$?
10. Назвіть кілька дійсних чисел, які не є раціональними. Як називаються такі числа?

А

11. Запишіть число, яке має 38 мільярдів, 7 тисяч і 5 одиниць.
12. Скільки хвилин пройшло від початку нашої ери до сьогодні?
13. Серце здорової людини робить у середньому 70 скорочень за хвилину. Скільки разів воно скорочується протягом 70 років?
14. Обчисліть:
 а) $432 \cdot (567 - 202) + 1001 : 13 + 28$;
 б) $(43 \cdot 19 - 26\,928 : 33) \cdot (16\,112 : 53 - 304)$.
15. Знайдіть суму всіх натуральних чисел, менших від 100.
16. Розгляньте рівності. Чи правильні вони? Які закономірності ви помітили? Спробуйте продовжити записи.
 а) $1 + 9 \cdot 0 = 1$, б) $1 + 8 \cdot 1 = 9$,
 $2 + 9 \cdot 1 = 11$, в) $2 + 8 \cdot 12 = 98$,
 $3 + 9 \cdot 12 = 111$; г) $3 + 8 \cdot 123 = 987$.
17. Запишіть римськими цифрами число:
 а) 47; б) 109; в) 1999; г) 2009.
18. Подайте у вигляді звичайного дробу числа:
 а) 0,25; б) 1,3; в) 0,333; г) 7; г) $5\frac{2}{3}$.
19. Подайте у вигляді десяткового дробу числа:
 а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{99}{25}$; г) $\frac{5}{8}$; г) $\frac{65}{128}$.
20. Подайте у вигляді нескінченного десяткового дробу числа:
 а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{77}{15}$; в) $\frac{21}{75}$; г) $\frac{5}{9}$; г) $\frac{1}{10}$.
21. Порівняйте числа:
 а) $\frac{5}{6}$ і $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{4}$ і $\frac{2}{7}$; в) $-\frac{4}{9}$ і $-\frac{7}{11}$; г) $-\frac{5}{9}$ і $-\frac{7}{13}$.
22. Яке з чисел менше:
 а) 0,41 чи $\frac{4}{7}$; б) $-\frac{3}{17}$ чи $-0,175$; в) $\frac{13}{11}$ чи 1,188;
 г) $-0,55$ чи $-\frac{5}{9}$; г) $1\frac{3}{8}$ чи 1,375; д) $\frac{11}{12}$ чи 0,9090...?
23. Яке з чисел більше:
 а) $\sqrt{3}$ чи 1,75; б) $\sqrt{1}$ чи 1; в) $-\sqrt{3}$ чи $-1,732$;
 г) 2π чи 6,28; г) π чи $\sqrt{9}$; д) $-\pi$ чи $-3,1$?

24. З поданих нижче чисел випишіть: а) цілі; б) ірраціональні.

$$0,5; \frac{3}{4}; \sqrt{-4}; -32; \sqrt{3}; 7; -\sqrt{49}; \frac{12}{3}; 0; 7\frac{1}{2}; \sqrt{\frac{25}{4}}; -1,111.$$

25. Які із чисел -3 ; 5 ; $-\sqrt{39}$; 6 ; $1,010010001\dots$; $\frac{2}{3}$; $\sqrt{7}$; $-\sqrt{1024}$; $\sqrt{15}$ раціональні?

26. Чи є серед чисел -9 ; $1,21$; 1 ; $-2,5\sqrt{100}$; 3 ; 0 ; $\sqrt{1000}$; $0,41$:
а) натуральні; б) дійсні?

Б

27. Числа 10 111, 1 101 110, 10 000 000 записано у двійковій системі. Запишіть їх у десятковій системі числення.

28. Спробуйте знайти суму й різницю чисел 1011 101 і 110 100, записаних у двійковій системі числення.

29. Уявіть, що якась жінка M на початку нашої ери народила двох дочок, кожна з яких до 33 років народила також не менше двох дочок, а кожна з них – також не менше двох дочок і т. д. Скільки нащадків жінки M жило б за таких умов у наші дні? Чи могло б таке бути?

30. Задумайте будь-яке трицифрове число. Допишіть до нього таке саме, щоб утворилося шестицифрове число. Поділіть це шестицифрове число на 13, знайдену частку – на 11, а нову частку – на задумане трицифрове число. Я знаю, яке число ви одержали в результаті. На основі чого я безпомилково можу вгадати результат?

31. Поет Віргілій народився в 70 р. до н. е. У якому році треба було відзначати 2000-річчя з дня його народження?

32. За візантійською хронологією від створення світу до Різдва Христового пройшло 5508 років. У літописі зазначається, що якась подія відбулася 7168 року. Про який рік ідеться?

33. Видатний український математик Михайло Пилипович Кравчук народився 27 вересня 1892 року, а помер 9 березня 1942 року. Скільки років прожив наш співвітчизник? Скільки часу пройшло від дня його народження дотепер?

34. З'ясуйте роки життя видатних українських математиків М.В. Остроградського, В.Я. Буняковського, Г.Ф. Вороного і за цими даними складіть і розв'яжіть задачі.

35. Яке з наведених чисел $\sqrt{16}$; $\sqrt{17,64}$; $4\sqrt{3}$; $3\sqrt{4}$; $\sqrt{\frac{7}{9}}$; $\sqrt{2\frac{8}{9}}$; $5-\sqrt{2}$; $-0,30033000333\dots$; $-\pi$; 2π є ірраціональним?

36. Один учень говорить, що число $\sqrt{2}-2\sqrt{2}+\sqrt{2}$ ірраціональне, а другий, що раціональне. Хто з них має рацію?

37. Чи правильно, що сума двох раціональних чисел є число раціональне? А чи завжди сума двох ірраціональних чисел є число ірраціональне?

38. Чи правильно, що сума, різниця, добуток і частка двох дійсних чисел – числа дійсні?

39. Чи може бути раціональним числом:

- а) сума ірраціональних чисел;
- б) різниця ірраціональних чисел;
- в) добуток ірраціональних чисел;
- г) степінь ірраціонального числа;
- г) частка двох ірраціональних чисел?

Відповідь обґрунтуйте.



Вправи для повторення

40. Знайдіть значення виразу:

$$а) \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{5} + 0,8 \right) \cdot \left(-3 + 5 \frac{8}{25} - 0,12 \right);$$

$$б) \left(-2 \frac{3}{4} - 0,15 - 1 \frac{8}{25} \right) : \left(-1 \frac{3}{4} + 2 \frac{1}{2} + 0,05 \right).$$

41. Розв'яжіть рівняння:

$$а) x^2 - 7x + 6 = 0;$$

$$б) x^2 - 4x - 21 = 0.$$

42. Спростіть вираз:

$$а) (x - 5)(2x + 3) + 7x;$$

$$б) (3a - 2)(a + 4) - 3a^2.$$

§ 2. Обчислення

Як ви вже знаєте, числа можна записувати в різних видах. Відповідно й обчислення можна здійснювати по-різному. Якщо дані числа раціональні, то дії над ними можна виконувати в звичайних або десяткових дробах – усно, письмово чи за допомогою калькуляторів. Якщо серед даних чисел є й ірраціональні, то обчислення можна вести у вигляді перетворень ірраціональних виразів або за допомогою десяткових наближень.

Для додавання і множення дійсних чисел a , b , c справджуються такі закони:

$a + b = b + a$ – переставний закон додавання;

$(a + b) + c = a + (b + c)$ – сполучний закон додавання;

$a \cdot b = b \cdot a$ – переставний закон множення;

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ – сполучний закон множення;

$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ – розподільний закон множення.

Віднімання означається як дія, обернена додаванню, ділення – як дія, обернена множенню.

У множині раціональних чисел Q завжди виконуються дії додавання, віднімання, множення і ділення (за винятком ділення на 0). Виконуваністю дії ділення множина Q істотно відрізняється від множини цілих чисел Z , у якій ця дія виконується не завжди.

На практиці, розв'язуючи прикладні задачі, обчислення виконують не з абстрактними числами, а з числами, які виражають значення конкретних величин (маси, відстані, часу, швидкості, площі, об'єму тощо). Існують різні одиниці вимірювання цих та інших величин. Для кількісної характеристики однієї величини можна використовувати різні одиниці вимірювання. Наприклад, у метричній системі довжину вимірюють у кілометрах, метрах, сантиметрах, міліметрах. Щоб порівнювати і виконувати дії над значеннями величин, потрібно вміти перетворювати одні одиниці виміру на інші. Для цього користуються формулами або спеціальними таблицями. Наприклад:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радіан};$$

$$1 \text{ га} = 100 \text{ ар} = 10\,000 \text{ м}^2;$$

$$1 \text{ л} = 1 \text{ дм}^3 = 1000 \text{ см}^3 = 0,001 \text{ м}^3.$$

Розв'язуючи прикладні задачі, переважно мають справу не з точними, а з наближеними значеннями величин. Щоб мати найменшу похибку в таких розрахунках, слід дотримуватися такого правила округлення.

Якщо число округлюють до деякого розряду, то всі наступні за цим розрядом цифри відкидають. Якщо перша з відкинутих цифр 0, 1, 2, 3 або 4 (5, 6, 7, 8 або 9), то останню цифру, що залишається, не змінюють (збільшують на 1).

Розв'язуючи прикладні задачі, ірраціональні числа звичайно округлюють, відкидаючи їх нескінченні «хвости» десяткових знаків. Наприклад, якщо треба знайти значення суми чисел π і $\sqrt{2}$ з точністю до тисячних, пишуть: $\pi + \sqrt{2} \approx 3,1416 + 1,4142 \approx 4,556$.

Аналогічно можна знайти наближене значення добутку даних дійсних чисел: $\pi \cdot \sqrt{2} \approx 3,1416 \cdot 1,4142 \approx 4,443$.

Тепер науковцям часто доводиться виконувати обчислення над числами, записаними в стандартному вигляді.

Запис числа у вигляді $a \cdot 10^n$, де $1 \leq a < 10$, n – ціле, називають *стандартним виглядом числа*. Число n у такому записі називають *порядком даного числа*.

Запишемо в стандартному вигляді числа, якими виражаються маси Землі, Місяця і маленької мурашки.



Виконаємо разом

1. Обчисліть значення виразу А.

$$A = \frac{3\frac{4}{5} : 0,19 + 1\frac{1}{2} \cdot 2,8}{1\frac{7}{20} : 0,25 - 3\frac{1}{5}}$$

• **Розв'язання.** Перетворимо звичайні дроби в десяткові, виконаємо відповідні дії в чисельнику і знаменнику, а потім поділимо чисельник на знаменник. Маємо:

$$A = \frac{3,8 : 0,19 + 1,5 \cdot 2,8}{1,35 : 0,25 - 3,2} = \frac{20 + 4,2}{5,4 - 3,2} = \frac{24,2}{2,2} = 11.$$

2. Рекомендовані розміри футбольного поля 115 × 75 ярдів. Якою буде площа такого поля у м²?

• **Розв'язання.** Ярד (англ. *yard*) – британська одиниця вимірювання відстані.

$$1 \text{ ярд} = 3 \text{ фути} = 36 \text{ дюймів} = 0,9144 \text{ м,}$$

$$115 \text{ ярдів} = 115 \cdot 0,9144 = 105,156 \approx 105 \text{ (м),}$$

$$75 \text{ ярдів} = 75 \cdot 0,9144 = 68,58 \approx 69 \text{ (м).}$$

$$\text{Площа футбольного поля } 105 \cdot 69 \approx 7245 \text{ (м}^2\text{).}$$

3. На фарбування 7,5 м² підлоги потрібно 0,75 кг фарби. Скільки фарби потрібно, щоб пофарбувати підлогу, розміри якої 3,2 м і 4,5 м?

• **Розв'язання.** Площа підлоги, яку потрібно пофарбувати, $3,2 \cdot 4,5 = 14,4 \text{ (м}^2\text{)}$. Маса фарби пропорційна площі підлоги, тому маємо пропорцію $7,5 \text{ м}^2 : 14,4 \text{ м}^2 = 0,75 : x$. Звідси $x = 1,44 \text{ кг}$.



Виконайте усно

Обчисліть (43, 44).

43. а) $23,5 \cdot 10$, б) $47,96 \cdot 100$, в) $12,077 \cdot 1000$,
 $0,08 \cdot 10$; $10\ 005 : 100$; $0,0036 \cdot 1000$.

44. а) $345 \cdot 0,1$, б) $29,5 \cdot 0,01$, в) $345,8 \cdot 0,001$,
 $2,3 \cdot 0,1$; $3,7 \cdot 0,01$; $67,981 : 0,001$.

45. Знайдіть значення виразу зручним способом:

а) $3,72 \cdot 2,41 - 2,72 \cdot 2,41$; б) $2,25^2 - 0,25^2$;

в) $5,27 \cdot 1,45 + 4,73 \cdot 1,45$; г) $0,04 - 10,2^2$.

46. Назвіть числа, позначені крапками:

$1 \text{ м} = \dots \text{ см}$; $1 \text{ м} = \dots \text{ дм}$; $1 \text{ см} = \dots \text{ мм}$;

$1 \text{ м}^2 = \dots \text{ дм}^2$; $1 \text{ м}^2 = \dots \text{ см}^2$; $1 \text{ дм}^2 = \dots \text{ см}^2$;

$1 \text{ т} = \dots \text{ ц}$; $1 \text{ ц} = \dots \text{ кг}$; $1 \text{ кг} = \dots \text{ г}$;

$1 \text{ год} = \dots \text{ хв}$; $1 \text{ хв} = \dots \text{ с}$; $1 \text{ год} = \dots \text{ с}$.

47. Знайдіть суму всіх цілих чисел:
 а) від -10 до 10 ; б) від -30 до 32 ; в) від 28 до 32 .
 48. На скільки сума чисел $4,35$ і $2,3$ більша за їх різницю?

A

49. Обчисліть зручним способом:
 а) $24,1 \cdot 1,4 + 24,1 \cdot 1,01 - 24,1 \cdot 1,41$;
 б) $1,3 \cdot 37 + 1,3 \cdot 63 + 2,3 \cdot 74 + 2,3 \cdot 26$.

Виконайте ділення (50–51).

50. а) $250 \text{ кг} : 50 \text{ кг}$; б) $6 \text{ ц} : 75 \text{ кг}$;
 в) $8 \text{ грн.} : 40 \text{ к.}$; г) $7 \text{ грн. } 20 \text{ к.} : 80 \text{ к.}$

51. а) $8 \text{ м} : 40 \text{ см}$; б) $3 \text{ м } 20 \text{ см} : 80 \text{ см}$;
 в) $3 \text{ год} : 45 \text{ хв}$; г) $5 \text{ год } 20 \text{ хв} : 16 \text{ хв}$.

52. Знайдіть невідомий член пропорції:

а) $24 : \frac{1}{8} = x : \frac{5}{36}$; б) $x : (-6,2) = 25 : 150$;






в) $3\frac{1}{3} : 52 = 0,5 : x$; г) $\sqrt{2} : (-6) = -\sqrt{8} : x$.

53. Поділіть число 600 на частини, пропорційні числам $2, 5$ і 8 .

54. Знайдіть середнє арифметичне і середнє геометричне чисел 2 і 18 .

55. Знайдіть суму, різницю, добуток і частку чисел $4,2$ і $2\frac{1}{3}$.

56. Продовжте обчислення, подані нижче.

Трикутні числа	
	1
	3
	6
	10
	15
Яке наступне?	
Яке десяте?	
Яке n -не?	

$9 \cdot 9 + 7 = 88$
$9 \cdot 98 + 6 = 888$
$9 \cdot 987 + 5 =$
$9 \cdot 9876 + 4 =$
$9 \cdot 98765 + 3 =$
$9 \cdot 987654 + 2 =$

$11^2 = 121$
$111^2 = 12321$
$1111^2 =$
$11111^2 =$
$111111^2 =$
$1111111^2 =$

Обчисліть значення виразу (57–65).

57. а) $4 : 6,25 + \frac{1}{7} \cdot 1,96$; б) $\left(\frac{1}{2} - 0,375\right) : 0,125$.

58. а) $\left(\frac{5}{6} - \frac{7}{12}\right) : (0,35 - 0,1)$; б) $\left(6\frac{2}{3} + 5\frac{1}{2} + 2\frac{4}{15}\right) : \frac{1}{15}$.

$$59. \text{ а) } \frac{20,88:18+45:0,36}{11,94+19,6}; \text{ б) } \frac{8,03+5,47}{(8,77+7,97):3,72}.$$

$$60. \text{ а) } \sqrt{28} \cdot \sqrt{63}; \quad \text{ б) } \sqrt{0,7} \cdot \sqrt{2,8}.$$

$$61. \text{ а) } \sqrt{14} \cdot \sqrt{56}; \quad \text{ б) } \sqrt{0,8} \cdot \sqrt{0,018}.$$

$$62. \text{ а) } (1+\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5}; \quad \text{ б) } 4\sqrt{3} + (2-\sqrt{3})^2.$$

$$63. \text{ а) } (3+2\sqrt{3})(2\sqrt{3}-3); \quad \text{ б) } (3\sqrt{5}-2)(2+3\sqrt{5}).$$

$$64. \text{ а) } \left(\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{3} \right)^4; \quad \text{ б) } (\sqrt{5} - \sqrt{0,2})^4.$$

$$65. \text{ а) } \sqrt{2} \cdot \sqrt{10} : \sqrt{0,05}; \quad \text{ б) } \sqrt{6} \cdot \sqrt{10} : \sqrt{0,6}.$$

66. Автомобіль їхав протягом a год зі швидкістю 72 км/год і b год зі швидкістю 84 км/год. Скільки кілометрів він проїхав? Обчисліть, якщо:

$$\text{ а) } a = 3 \text{ і } b = 2,5; \quad \text{ б) } a = 1,3 \text{ і } b = 3,5; \quad \text{ в) } a = 3\frac{1}{3} \text{ і } b = 2\frac{5}{6}.$$

67. Відстань від Сонця до Землі дорівнює $1,5 \cdot 10^8$ км. За який час світло проходить цей шлях, якщо швидкість світла дорівнює $3 \cdot 10^5$ км/год?

68. Для фарбування підлоги площею $12,5 \times 4,2$ м² витрачено 5,78 кг фарби. Скільки потрібно фарби для фарбування підлоги в кімнаті площею $5,2 \times 4,6$ м²?

69. Масу коня можна визначити за формулою так: маса (кг) = обхват грудної клітки (см) $\times 6 - 620$. Знайдіть масу коня, обхват грудної клітки якого наближено дорівнює: а) 180 см; б) 200 см; в) 220 см.

70. Масу коня можна визначити за іншою формулою: маса (кг) = обхват грудної клітки (см) $\times K$, де $K = 2,7$ (для легких коней), $K = 3,1$ (для середніх) і $K = 3,5$ (для великих коней). Обчисліть масу коня, обхват грудної клітки якого наближено дорівнює: а) 180 см; б) 200 см; в) 220 см. Порівняйте результати з отриманими в попередній задачі.

71. Циркова арена у формі круга з'явилась у Лондоні в кінці XVIII ст. Її діаметр – 42 фути – було обрано таким чином, щоб для вершника, який скаче на коні, створювалася оптимальна відцентрова сила. Знайдіть площу циркової арени (у м²) і довжину її кола (у м). Результати округліть до десятих.

Б

Знайдіть значення виразу зручним способом (72–75).

$$72. \text{ а) } \frac{3,72 \cdot 2,41 - 2,41 \cdot 2,72}{24,1 \cdot 1,4 + 24,1 \cdot 0,01 - 24,1 \cdot 1,41};$$

$$\text{ б) } \frac{1,3 \cdot 37 + 1,3 \cdot 63 + 2,3 \cdot 74 + 2,3 \cdot 26}{1,8 \cdot 5,7 + 1,8 \cdot 4,3}.$$

73. а) $\frac{7,6 \cdot 4,6 - 6,7 \cdot 8,5 + 7,6 \cdot 5,4 - 6,7 \cdot 1,5}{0,4 \cdot 2,3 - 0,4 \cdot 1,3};$

б) $-\frac{17,3 \cdot 2,4 - 3,27 \cdot 1,2 - 8,8 \cdot 3,27 - 3,4 \cdot 17,3}{12,5 \cdot 8,7 + 3,2 \cdot 12,5 - 10,9 \cdot 12,5}.$

74. а) $7^{50} \cdot 5^{50} - (35^{25} - 1)(35^{25} + 1);$

б) $8^{30} \cdot 9^{30} + (1 - 72^{15})(1 + 72^{15}).$

75. а) $(32^{32} - 2)(32^{32} + 2) - 8^{64} \cdot 4^{64};$

б) $(3 + 54^8)(3 - 54^8) + 6^{16} \cdot 9^{16}.$

76. Порівняйте значення величин:

а) 5 км/год і 5 м/с; б) 1250 хв і 25 год;

в) 4 дюйми і 10 см; г) 500 г і 1 фунт.

Обчисліть (77–79).

77. а) $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}};$ б) $(-2)^3 + \frac{3,5^2 - 1,5^2}{\frac{2}{3} - 0,5}.$

78. а) $\frac{(0,5 : 1,25 + 1,4 : 1\frac{4}{7} - \frac{3}{11}) \cdot 3}{(1,5 + 0,25) : 18\frac{1}{3}};$

б) $\frac{(20,48 : 25,6 + 2\frac{2}{3} \cdot 1,5) \cdot (4\frac{1}{6} - 3\frac{1}{8})}{2,25 \cdot 2\frac{2}{3} : 0,75 - 10,5 : 1\frac{3}{4}}.$

79. а) $\frac{(4\frac{2}{7} - 2,5) : 2\frac{19}{28} + \frac{12\frac{1}{2} : 1\frac{7}{8}}{(321,3 - 47\frac{1}{2} : 27,38)}}{6\frac{2}{3} \cdot 0,25};$

б) $\frac{(\frac{2}{9} + \frac{1}{5}) : \frac{2}{15} + 2\frac{1}{2} \cdot (2\frac{6}{35} - \frac{5}{21})}{2\frac{1}{7} : 5 \cdot 2\frac{2}{3}}.$

80. Що більше: $\sqrt{5} + 2$ чи $\frac{1}{\sqrt{5} - 2}$?

81. Доведіть, що $\sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} - 2\sqrt{2} + 1 = 2.$

82. Знайдіть значення виразу:

$\frac{ab + bc + ac}{abc},$ якщо $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{5}.$

83. В основі басейну для водного поло – прямокутник з розмірами 25 м і 15 м. Яку найменшу кількість літрів води має містити басейн, якщо відомо, що мінімальна глибина такого басейну має бути 1,8 м?

84. Ділянка електричного кола складається з трьох послідовно з'єднаних резисторів, які мають опори $R_1 \approx 3,869$ Ом, $R_2 \approx 4,455$ Ом, $R_3 \approx 1,61$ Ом. Знайдіть загальний опір на ділянці цього кола. Результат округліть до сотих.

85. Турист на човні рухався спочатку проти течії річки, а потім за течією. Який шлях він пройшов загалом, якщо швидкість човна в стоячій воді – 25 км/год, швидкість течії річки 2 км/год, час руху за течією t_3 , а проти течії $t_{\text{п}}$? Обчисліть за умови:

а) $t_{\text{п}} = 30$ хв, $t_3 = 1$ год 10 хв; б) $t_{\text{п}} = 15$ хв, $t_3 = 50$ хв.

86. Вартість обладнання – A грн., а вартість його капітального ремонту – r . До капітального ремонту обладнання працює n років, а з ремонтом – m років. Відомо, що капітальний ремонт є рентабельним, якщо $r \leq \frac{A}{n}(m-n)$.

Визначте, в якому випадку капітальний ремонт обладнання буде рентабельним:

а) $A = 1200$ грн., $r = 300$ грн., $n = 3$ роки, $m = 4$ роки;

б) $A = 2100$ грн., $r = 800$ грн., $n = 6$ років, $m = 10$ років;

в) $A = 3500$ грн., $r = 2000$ грн., $n = 12$ років, $m = 20$ років;

г) $A = 6000$ грн., $r = 2500$ грн., $n = 10$ років, $m = 20$ років.

87. На деякий момент часу зафіксовано курси валют, подані в таблиці.

Назва	Курс НБУ	Комерційний курс
1 долар США	7,64	7,831
1 євро	10,73	10,96
1 російський рубль	0,25	0,26

Знайдіть суму грошей у національній валюті, за курсом НБУ і комерційним, якщо в наявності було:

а) 21,3 євро, 231,3 дол., 135 руб., 12 375,5 грн.;

б) 91,5 євро, 321,5 дол., 35 руб., 1237 грн.;

в) 71,2 євро, 23 дол., 535 руб., 92 375,5 грн.



Вправи для повторення

88. Одне з двох натуральних чисел на 5 більше за інше. Знайдіть ці числа, якщо їх добуток дорівнює 266.

89. Раціональним чи ірраціональним є число?

а) $\sqrt{10\frac{9}{16}}$; б) $\sqrt{9-6\sqrt{2}} + \sqrt{9+6\sqrt{2}}$.

90. Знайдіть 12 % від числа: а) 45; б) 2,5.

91. Знайдіть число, 15 % якого дорівнює: а) 300; б) 0,6.

§ 3. Відсоткові розрахунки

Багатьом фахівцям часто доводиться виконувати обчислення за умови, якщо деякі значення виражено у відсотках. Коротко їх називають *відсотковими розрахунками*.

Нагадаємо, що *відсоток* – це сота частина.

1 % = 0,01, 10 % = 0,1, 100 % = 1.

Примітка. Відсотки часто називають процентами, а замість «скільки відсотків» іноді кажуть «який відсоток».

Існує три основні види задач на відсотки:

- ① знаходження відсотків від числа;
- ② знаходження числа за відсотками;
- ③ знаходження відсоткового відношення двох чисел.

Розглянемо приклади таких задач.

① Потрібно зорати поле, площа якого дорівнює 300 га. За перший день трактористи виконали 40 % завдання. Скільки гектарів зорали вони за перший день?

② За перший день трактористи зорали 120 га, що становить 40 % поля. Знайдіть площу всього поля.

③ Потрібно зорати поле, площа якого дорівнює 300 га. За перший день трактористи зорали 120 га. Скільки відсотків усього поля вони зорали за перший день?

Спробуйте розв'язати кожну із цих задач кількома способами, замінивши 40 % дробом $0,4$ чи $\frac{2}{5}$.

Такі задачі зручно розв'язувати *способом пропорції*. Оформлювати розв'язання сформульованих задач можна так:

$$\textcircled{1} \quad \begin{array}{l} 300 \text{ га} - 100 \% , \\ x \text{ га} - 40 \% . \end{array} \quad \frac{300}{x} = \frac{100}{40}, \quad x = \frac{300 \cdot 40}{100} = 120 \text{ (га)}.$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{array}{l} 120 \text{ га} - 40 \% , \\ x \text{ га} - 100 \% . \end{array} \quad \frac{120}{x} = \frac{40}{100}, \quad x = \frac{120 \cdot 100}{40} = 300 \text{ (га)}.$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{array}{l} 300 \text{ га} - 100 \% , \\ 120 \text{ га} - x \% . \end{array} \quad \frac{300}{120} = \frac{100}{x}, \quad x = \frac{120 \cdot 100}{300} = 40 \text{ (\%)}.$$

Крім трьох основних видів задач, існують також складніші задачі на відсотки. Насамперед це задачі, в яких ідеться про збільшення чи зменшення чого-небудь на кілька відсотків, і обернені до них. Розв'язуючи такі задачі, уточнюйте насам-

перед про відсотки від чого саме йдеться. Про це в задачі прямо не говориться, але існують домовленості про розуміння тих чи інших висловлювань.

Для прикладу розглянемо задачу.

Задача. Спочатку ціну на товар підвищили на 10 %, а потім знизили на 10 %. Як змінилася ціна на цей товар у результаті двох переоцінок?

Зверніть увагу на те, що перший раз ідеться про 10 % від початкової ціни, а другий раз – про 10 % від підвищеної ціни. А вони не однакові.

● **Розв'язання.** Нехай спочатку товар коштував a грн.

Після підвищення ціни на 10 % він став коштувати a грн. + $0,1a$ грн., або $1,1a$ грн.

10 % від підвищеної ціни становлять $(1,1a \cdot 0,1)$ грн., або $0,11a$ грн. Після зниження вартості товар став коштувати $(1,1a - 0,11a)$ грн., або $0,99a$ грн.

Отже, спочатку товар коштував a грн., а після двох переоцінок став коштувати $0,99a$ грн., тобто на $0,01a$ грн. менше. Це становить $0,01a : a = 0,01$, або 1 %.

Відповідь. Після двох переоцінок початкова ціна товару знизилася на 1 %.

Особливо часто доводиться розв'язувати задачі на відсотки бухгалтерам і працівникам банків. Розглянемо для прикладу задачі, пов'язані з нарахуванням відсоткових грошей.

Прості відсотки – це нарахування відсотків лише на початково інвестовану суму.

Наприклад, на початку року вкладник розміщує на рахунок в банку суму P під відсоток r . Через рік він одержить суму P_1 , яка дорівнює початковому вкладу (P) плюс нараховані відсотки:

$$P_1 = P + \frac{Pr}{100} = P \left(1 + \frac{r}{100} \right).$$

Через два і три роки сума на рахунок складатиме:

$$P_2 = P + \frac{Pr}{100} + \frac{Pr}{100} = P \left(1 + 2 \frac{r}{100} \right) \text{ і } P_3 = P \left(1 + 3 \frac{r}{100} \right).$$

Аналогічно можна представити суму P_n , яку вкладник одержить через n років:

$$P_n = P \left(1 + \frac{r}{100} n \right).$$

Тут P – сума початкового вкладу, P_n – сума вкладу через n років.

Нарахування за схемою простих відсотків застосовується, як правило, в короткострокових фінансових операціях, коли після кожного інтервалу нарахування кредитор виплачуються відсотки, а також у будь-яких інших випадках за домовленістю сторін, що беруть участь в операції.

У довгострокових фінансово-кредитних угодах частіше використовують **складні відсотки** – їх нараховують не тільки на основну суму, а й на нараховані раніше відсотки. У цьому випадку кажуть, що відбувається *капіталізація* відсотків у міру їх нарахування.

Припустимо, що вкладник дав ощадбанку під 9 % річних 1000 грн. Це – *початковий капітал*. Через рік банк нарахує вкладнику за це 90 грн. *відсоткових грошей* (9 % від 1000 грн.). Після цього на рахунку вкладника стане 1090 грн., оскільки $1000(1 + 0,09) = 1090$. За другий рік відсоткових грошей йому нарахують уже 9 % від 1090 грн.; *нарощений капітал* вкладника після двох років дорівнюватиме $1000(1 + 0,09)^2$ грн. Зрозуміло, що через n років нарощений капітал становитиме $1000(1 + 0,09)^n$ грн.

Взагалі, вкладений в ощадбанк початковий капітал A_0 під p % річних через n років перетвориться в нарощений капітал:

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n.$$

Це *формула складних відсотків*. За цією формулою можна розв'язувати також задачі, не пов'язані з нарощенням капіталу.

Відсоткові гроші за неповний рік нараховують пропорційно до числа днів. Наприклад, якщо 350 грн., віддані під 11 % річних, були в банку 183 дні, тобто $\frac{1}{2}$ року, то за це вкладник одержить $\frac{1}{2} \cdot 350 \cdot 0,11$ (грн.). Нарощений капітал вкладника дорівнюватиме 369,25 грн.

Подібні до поняття відсотка проміле і проба.

Проміле – це одна тисячна ($1 \text{ ‰} = 0,001$). Наприклад, розчин солі, концентрація якого 5 проміле, – це розчин, 1000 г якого містять 5 г солі.

Пробами характеризують сплави дорогоцінних металів. Так, золото 875-ї проби – це сплав, 1000 г якого містять 875 г чистого золота.

Примітка. До переходу на метричну систему мір (1918 р.) пробую називалося дещо інше. У старих підручниках арифметики пояснювалося: «Проба означає, скільки вагових частин чистого металу міститься в 96 вагових частинах сплаву». Тоді пробую називали кількість золотників чистого металу, які містяться в одному фунті сплаву. А 1 фунт дорівнював 96 золотникам. Сплав, який тепер називають золотом 750-ї проби, раніше називали золотом 72-ї проби. А в багатьох англомовних країнах його і тепер називають золотом 18-ї проби.

Проби дорогоцінних металів, з яких виготовляють різні вироби, не довільні. В Україні законом встановлено такі проби:

- для золота – 375, 500, 583, 750, 958;
- для срібла – 800, 875, 916.



ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке відсоток? А відсоток числа?
2. Що таке відсоткове відношення двох чисел?
3. Назвіть три основні види задач на відсотки.
4. Як знайти кілька відсотків від числа?
5. Як знайти число за відсотками?
6. Як знайти відсоткове відношення двох чисел?
7. Яким способом зручно розв'язувати задачі на відсотки?



Виконаємо разом

1. Під час перевірки вологість зерна дорівнювала 16%. 2 ц цього зерна просушили, після чого воно втратило 20 кг. Визначте вологість зерна після просушування.

● **Розв'язання.** 2 ц = 200 кг (мал. 9).

1) Скільки вологи містили 200 кг зерна до просушування?

$$200 \cdot 0,16 = 32 \text{ (кг).}$$

2) Скільки вологи містило зерно після просушування?

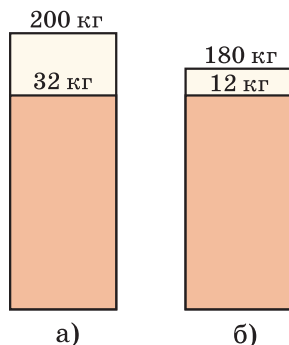
$$32 - 20 = 12 \text{ (кг).}$$

3) Якою стала маса всього зерна після просушування?

$$200 - 20 = 180 \text{ (кг).}$$

4) Якою стала вологість зерна після просушування?

$$12 : 180 = 0,0666... \approx 6,7 \text{ (\%).}$$



Мал. 9

2. На малюнку 10 наведено діаграму вікового складу українців, які жили в 1897 р. в Росії. Скільки відсотків від усього



Мал. 10

українського населення становили тоді діти віком до 10 років? А скільки діти і молодь до 20 років? Скільки новонароджених не доживало до 10 років?

● **Розв'язання.** Хлопчиків до 10 років тоді було близько 31 %, стільки ж і дівчаток. Отже, дітей до 10 років було трохи більше 30 %.

Молоді від 10 до 20 років було близько 22 %. Отже, разом з дітьми вони становили приблизно 52 %. Людей старшого віку було близько 48 %.

Оскільки діти віком до 10 років становили приблизно 31 % усіх українців, а молодь від 10 до 20 років – близько 22 %, то не доживали до 10-річного віку близько 30 % усіх дітей.

3. До 10 кг 3-відсоткового розчину солі долили 5 л води. На скільки відсотків зменшилася концентрація розчину?

● **Розв'язання.** Наявний розчин мав $10 \cdot 0,03 = 0,3$ (кг) солі. 5 л води мають масу 5 кг. Маса утвореного розчину 15 кг, він містить 0,3 кг солі. Знайдемо його концентрацію.

$$0,3 : 15 = 0,02, \quad 0,02 = 2 \%, \quad 3 \% - 2 \% = 1 \%$$

Відповідь. Відсоткова концентрація розчину зменшилася на 1 %.



Виконайте усно

92. Знайдіть 10 % від числа: 180; 6000; 40; 8; 0,75.

93. Знайдіть число, 50 % якого дорівнюють: 8; 20; 18 000; 1.

94. Виразіть у відсотках відношення:

$$9 : 100; \quad 6 : 10; \quad 7 : 20; \quad 13 : 10; \quad \frac{21}{100}; \quad \frac{9}{50}; \quad \frac{6}{10}$$

95. Скільки відсотків становлять:

а) 5 від 20; б) 15 від 60;

в) $\frac{2}{13}$ від $\frac{5}{26}$; г) $1\frac{1}{2}$ від $1\frac{1}{5}$?

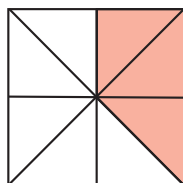
96. Скільки відсотків становлять:

а) 3 см відносно 12 см; б) 5 см відносно 1 дм;

в) 80 г відносно 1 кг; г) 5 хв відносно 1 год;

р) 0,1 м відносно 1 м; д) 0,1 г відносно 1 кг;

е) 2 с відносно 1 год; є) 3 ц відносно 1 т?



Мал. 11

97. Скільки відсотків площі всього квадрата становить площа його зафарбованої частини (мал. 11)?

98. На скільки відсотків змінилося значення величини, якщо воно: а) збільшилося вдвічі; б) збільшилося втричі; в) зменшилося вдвічі; г) зменшилося в чотири рази; г) зменшилося в п'ять разів?

99. У скільки разів збільшилося значення величини, якщо воно збільшилося на: а) 300 % ; б) 50 % ; в) 200 % ; г) 150 % ?

A

100. Із 120 випускників фінансового коледжу 20 % було направлено на роботу в банки, а 25 % – у заклади торгівлі. Скільки випускників ще не працевлаштовано?

101. У три цистерни розлили 30 000 т нафти. У першій цистерні 35 % усієї нафти, у другій – 40 %. Скільки тонн нафти міститься в третій цистерні?

102. Три баржі перевозили деякий вантаж. Перша перевезла 30 % усього вантажу, друга – 25 % усього вантажу, а третя решту 55 т. Яка маса всього вантажу?

103. У 10-А класі 24 учні і 25 % з них протягом навчального року не пропустили жодного заняття. У 10-Б класі 25 учнів і 20 % з них не пропустили жодного заняття протягом навчального року. Який відсоток учнів обох класів, які постійно відвідували заняття?

104. З 20 000 клієнтів банку триста звернулись із скаргами. Який відсоток клієнтів банку, задоволених його роботою?

105. Сторони прямокутника дорівнюють 12 см і 15 см. Знайдіть p % його площі, якщо:

а) $p = 18$; б) $p = 30$; в) $p = 125$.

106. Довжина однієї сторони трикутника дорівнює 6 м, а сума двох інших становить 150 % цієї сторони. Знайдіть периметр трикутника.

107. З молока виходить 10 % сиру. Скільки молока треба, щоб вийшло 50 кг сиру?

108. Із цукрових буряків виходить 15 % цукру. Скільки буряків потрібно переробити, щоб вийшло 3 т цукру?

109. Пошта обслуговує 3000 пенсіонерів. 1020 з них – чоловіки, решта – жінки. На скільки відсотків кількість жінок пенсіонерок перевищує кількість пенсіонерів чоловіків?

110. На склад центрального банку надійшло 95 найменувань бланків, які використовують центральний банк та його відділення. 20 % найменувань використовують тільки відділення. Скільки найменувань бланків використовує центральний банк?

111. Латунь – сплав 60 % міді і 40 % цинку. Скільки міді і цинку треба сплавити, щоб вийшло 200 кг латуні?

112. Бронза – сплав міді й олова. Скільки відсотків олова в бронзовому злитку, який містить 33 кг міді і 17 кг олова?

113. Англійську мову вивчають 165 студентів першого курсу фізико-математичного інституту педагогічного університету, що становить 75 % усіх першокурсників. Скільки всього першокурсників навчається на фізматі?

114. Страхова компанія обслужила 63 особи, що становить 15 % від усіх клієнтів. Скільки клієнтів має страхова компанія?

115. Який відсоток доби становлять 500 хвилин?

116. Сума коштів у 2000 гривень інвестована в десятирічний трастовий фонд під простий річний відсоток у 16 %. Якою буде величина капіталу в кінці десятиріччя?

117. Підприємству надано 50 000 грн. у кредит на шість місяців за ставкою 18 % річних. Яку суму підприємство має повернути банку через півроку?

Б

118. Малина під час сушіння втрачає 75 % своєї маси. Скільки свіжої малини потрібно висушити, щоб мати 5 кг сушеної?

119. З молока виходить 20 % вершків, а з вершків – 25 % масла. Скільки треба молока, щоб одержати 100 кг масла?

120. Руда містить 60 % заліза. З неї виплавляють чавун, який містить 98 % заліза. Із скількох тонн руди виплавляють 200 т чавуну?

121. Кам'яне вугілля містить у середньому 80 % вуглецю, а торф – 56 %. Скільки потрібно взяти торфу, щоб маса вуглецю в ньому була такою, як у 2 т вугілля?

122. Власник магазину підвищив ціну на чоловічі краватки на 25 %, але, як з'ясувалось, його товар перестали купувати за такими високими цінами, і йому довелося знизити нові ціни на 25 %. Ціна краватки тепер становить 126 грн. Якою була початкова ціна краватки?

123. Ціну на товар знизили спочатку на 20 %, а потім ще на 15 %, і в результаті він став коштувати 53,8 грн. Якою була початкова ціна товару?

124. В одному мішку крупи на 2 % менше, ніж у другому. На скільки відсотків у другому мішку крупи більше, ніж у першому?

125. У 10-му класі хлопців на 25 % більше, ніж дівчат. На скільки відсотків дівчат у цьому класі менше, ніж хлопців?

126. Ціна краму спочатку знизилася на 5 %, а потім ще раз на 10 %. На скільки відсотків змінилася вона після двох переоцінок?

127. Ціна на автомобіль спочатку знизилась на 15 %, а потім підвищилася на 10 %. Як змінилася ціна на автомобіль після цих двох переоцінок?

128. Випуск цукерок на кондитерській фабриці за перший рік зріс на 5 %, а за другий – на 8 %. Як зріс випуск продукції на заводі за ці два роки?

129. Площа поверхні Землі становить 510,1 млн км², з них 149,2 млн км² – суходіл. На скільки відсотків площа поверхні Землі, покрита водою, перевищує площу суходолу?

130. За 15 м тканини одного виду та 20 м другого заплатили 2208 грн. Скільки заплачено за тканину кожного виду, коли відомо, що ціна одного метра тканини першого виду на 12 % більша від ціни одного метра тканини другого виду?

131. Підприємець купує на заводі труби зі знижкою 10 % від їхньої оптової ціни, а продає їх за роздрібною, яка вища від оптової на 10 %. Який відсоток прибутку має підприємець?

132. Борошно подешевшало на 14 %. Скільки кілограмів його можна купити за ті самі гроші, за які раніше купували 150 кг?

133. Раніше 3 кг рису коштували стільки, скільки тепер коштують 2 кг. На скільки відсотків подорожчав рис?

134. Свіжі гриби містять 95 % води, а сухі – 12 %. Скільки вийде сухих грибів з 22 кг свіжих?

135. Свіжі гриби містять 90 % води, а сухі – 12 %. Скільки треба висушити свіжих грибів, щоб одержати 25 кг сухих?

136. Вологість свіжих грибів дорівнювала 99 %. Коли гриби підсушили, їх вологість зменшилася до 98 %. Як змінилася маса грибів?

137. Скільки грамів води потрібно додати до 50 г 35-відсоткової соляної кислоти, щоб отримати 10-відсоткову кислоту?

138. До 8 кг 70-відсоткового розчину кислоти долили 2 кг води. Визначте відсоткову концентрацію нового розчину.

139. Скільки потрібно змішати 10-відсоткового і 15-відсоткового розчинів солі, щоб мати 25 кг 12-відсоткового розчину?

140. Скільки золота 375-ї проби треба сплавити з 30 г золота 750-ї проби, щоб одержати сплав золота 500-ї проби?

141. Будівельна компанія взяла в банку кредит 1 250 000 грн. на 3 роки під простих 15 %. Визначте: а) скільки гривень компанія поверне банку через 3 роки; б) який прибуток одержить банк?

142. Підприємець вніс до банку 15 000 грн. під складні 16 % річних. Якою буде сума його вкладу через 4 роки?

143. На вклад у розмірі 100 000 грн. строком на 5 років банк нараховує 20 % річних. Яка сума буде на рахунок в кінці строку, якщо нарахування відсотків здійснюється за схемою:

а) простих відсотків; б) складних відсотків?

144. На скільки відсотків число $2,5 \cdot 10^8$ більше за число:

а) $5 \cdot 10^7$; б) $1,5 \cdot 10^8$; в) $7,5 \cdot 10^7$?

145. Дано два вирази:

$$\frac{ab+bc+ca}{abc} \quad \text{і} \quad \frac{ab+bc-ca}{abc}.$$

На скільки відсотків значення першого з них більше від значення другого, якщо: $a = \frac{1}{3}$; $b = \frac{1}{4}$; $c = \frac{1}{5}$?



Вправи для повторення

146. Розв'яжіть нерівність:
 а) $2x + 3 > 5(x - 12)$; б) $x^2 - 4x > (x - 1)(x + 1)$.
147. Внесіть спільний множник за дужки:
 а) $6a(x - 2) + 8b(x - 2) + 4c(2 - x)$;
 б) $x^3(2x + 3) + 3(2x^3 + 3x^2) + 3x^3(3 + 2x)$.
148. Побудуйте графіки функцій:
 а) $y = -x^2$; б) $y = 2x^2$; в) $y = x^2 - 4$; г) $y = (x + 1)^2$.



Самостійна робота № 1

Варіант 1

- Запишіть п'ять цілих чисел, які не є натуральними.
- У скільки разів число 5 більше від числа $\frac{1}{2}$?
- Чи є серед чисел $(\sqrt{3} - 1)^2$, $(\sqrt{3})^2 - 1$, $\sqrt{3} - 1^2$ раціональне число?
- Обчисліть: а) $(0,36 + 1,64)(0,36 - 1,64)$; б) $\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$.
- Знайдіть: а) 20 % від числа 35; б) число, 35 % якого дорівнює 70.

Варіант 2

- Запишіть п'ять раціональних чисел, які не є натуральними.
- У скільки разів число $\frac{1}{3}$ менше від числа 6?
- Чи є серед чисел $\sqrt{5} - 1^2$, $(\sqrt{5} - 1)^2$, $(\sqrt{5})^2 - 1$ ціле число?
- Обчисліть: а) $(1,73 + 0,27)(1,73 - 0,27)$; б) $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$.
- Знайдіть: а) 25 % від числа 40; б) число, 40 % якого дорівнює 80.

§ 4. Числові функції

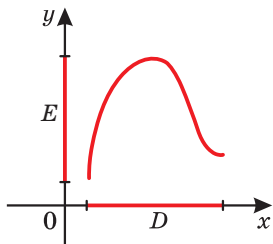
Одне з найважливіших понять математики – функція. З її допомогою моделюють і досліджують різноманітні процеси, що відбуваються навколо нас. Повторимо основні відомості про функцію, які ви знаєте з попередніх класів.

Якщо кожному значенню змінної x з деякої множини D відповідає єдине значення змінної y , то таку відповідність називають *функцією*.

При цьому x називають *незалежною змінною*, або *аргументом*, y – *залежною змінною*, або *функцією*.

Усі значення, які може набувати аргумент функції, називають *областю визначення* даної функції і позначають літерою D .

Множину всіх значень y , яких може набувати функція, називають її *областю значень* і позначають літерою E (мал. 12).



Мал. 12

Дві функції вважаються різними, якщо в них різні області визначення або правила відповідності. Наприклад, функція $y = x^2$, задана на проміжку $[-3; 3]$, і функція $y = x^2$, задана на R , різні. А задані на R функції $y = 1 - x^2$ і $y = (1 - x)(1 + x)$ однакові, оскільки вирази $1 - x^2$ і $(1 - x)(1 + x)$ тотожно рівні.

Дві функції називаються рівними, якщо їх області визначення однакові і в кожній точці області визначення вони мають рівні значення. Рівними є, наприклад, такі пари функцій:

$$y = |x| \text{ і } y = \sqrt{x^2}; \quad y = x^2 - 1 \text{ і } y = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}.$$

Щоб задати функцію, досить зазначити її область визначення і правило відповідності.

Задати функції можна різними способами. Часто їх задають *формулами*. Наприклад, відповідність між довжиною a сторони квадрата і його площею S можна задати формулою $S = a^2$.

Відповідність між радіусом r кола і довжиною C кола можна задати формулою $C = 2\pi r$.

Відповідність між значеннями змінної x і значеннями виразу $2x - 1$ можна задати формулою $y = 2x - 1$.

Задання функції формулою зручне тим, що дає можливість знаходити значення функції для довільного значення аргументу. Таке задання функції досить економне: здебільшого формула займає один рядок.

Якщо функцію задають формулою і нічого не кажуть про область її визначення, то вважають, що ця область – множина всіх значень змінної, при яких формула має зміст. Наприклад, область визначення функції $y = 2x - 1$ – множина всіх дійсних чисел, а функції $y = \frac{3}{x-1}$ – множина всіх дійсних чисел, крім 1, оскільки на 0 ділити не можна.

Задати функції можна і у вигляді *таблиці*. Наприклад, функцію $y = 2x - 1$ для перших десяти натуральних значень x можна задати у вигляді такої таблиці:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

Тут:

- область визначення: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;
- область значень: $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$.

Табличний спосіб задання функції зручний тим, що для певних значень аргументу до таблиці вже занесено відповідні значення функції, тому не треба робити будь-яких обчислень. Незручний він тим, що таблиця займає більше місця. До того ж, як правило, містить значення функції не для всіх значень аргументу, а тільки для деяких.

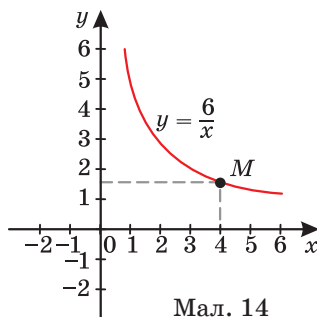
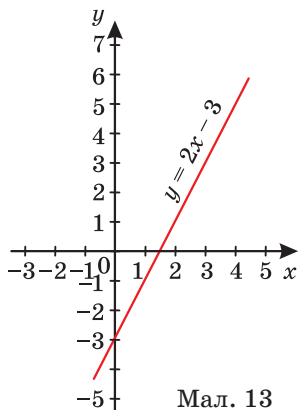
Функцію можна задавати і *словесно*. Наприклад, якщо кожному цілому числу поставити у відповідність його квадрат, то одержимо функцію, областю визначення якої є множина цілих чисел, а областю значень – множина натуральних чисел і число нуль.

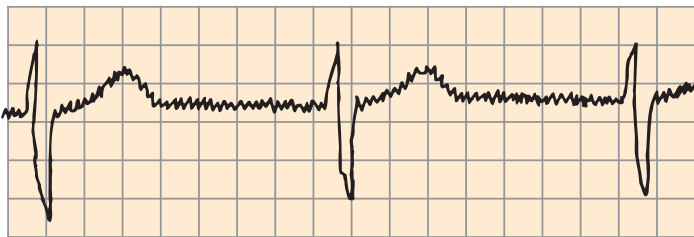
Часто функції задають у вигляді графіків, побудованих у декартовій системі координат.

Графіком функції називається множина всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції.

Наприклад, на малюнку 13 зображено графік функції $y = 2x - 3$, заданої на відрізку $[-1; 5]$, а на малюнку 14 – графік функції $y = \frac{6}{x}$ на відрізку $[1; 6]$.

Маючи графік функції, можна для будь-якого значення аргументу (з області визначення) вказати відповідне значення функції. Для прикладу знайдемо значення функції $y = \frac{6}{x}$, якщо $x = 4$, користуючись побудованим графіком. Шукаємо на осі x точку з абсцисою 4, на графіку знаходимо точку M з абсцисою 4, а на осі ординат – ординату точки M ; вона дорівнює 1,5. Отже, користуючись графіком функції, можна скласти таблицю її значень, тобто графік задає функцію. *Графічний спосіб* задання





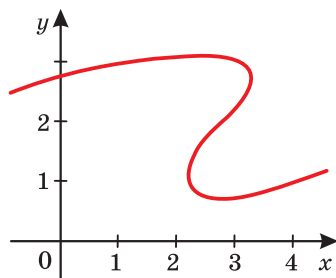
Мал. 15

функції зручний своєю наочністю. Дивлячись на графік, одразу можна з’ясувати властивості функції, яку він задає. Зокрема, можна встановити такі її характеристики:

- область визначення і область значень функції;
- при яких значеннях аргументу значення функції додатні, при яких – від’ємні, при яких дорівнюють нулю;
- на яких проміжках функція зростає, а на яких спадає.

Існують прилади – термографи, які самі креслять графік температури. Графіком функції є також кардіограма, намальована кардіографом (мал. 15). «Читаючи» такий графік, лікар діагностує роботу серця хворого. Взагалі, багатьом фахівцям треба вміти «читати» різні графіки.

Чи задає функцію графік, зображений на малюнку 16? Ні, оскільки на цьому графіку одному значенню аргументу x (наприклад, $x = 3$) відповідають три різних значення y . А згідно з означенням функцією вважається тільки така відповідність, при якій одному значенню аргументу x відповідає єдине значення функції y .



Мал. 16

Існує багато різних видів функцій. Деякі з них ви вже знаєте:

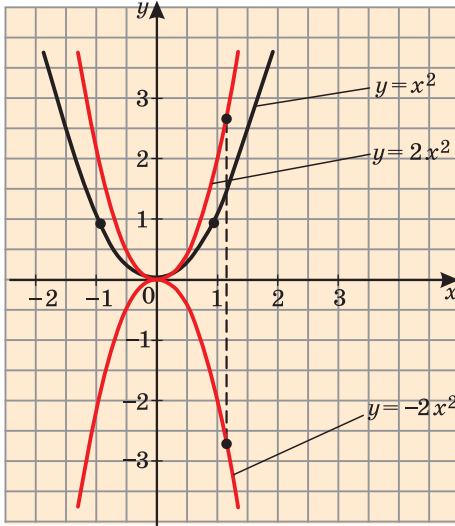
- $y = kx$ – пряма пропорційність ($k \neq 0$);
 - $y = kx + b$ – лінійна функція;
 - $y = \frac{k}{x}$ – обернена пропорційність ($k \neq 0$);
 - $y = ax^2 + bx + c$ – квадратична (або квадратна) функція ($a \neq 0$).
- Графіки найуживаніших функцій подано в таблиці 1.

Щоб будувати графіки складніших функцій, використовують такі правила.

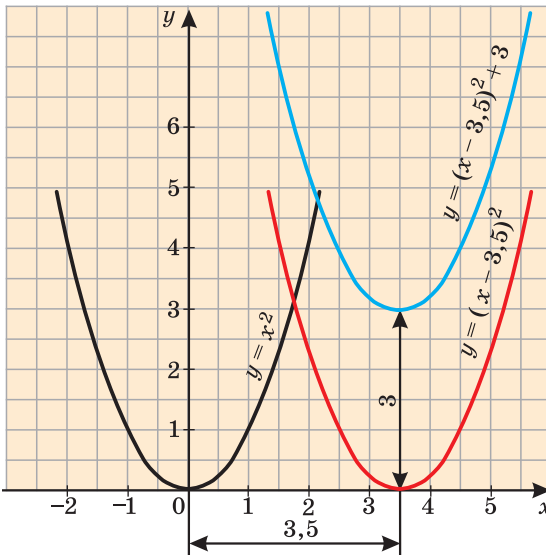
- Графіки функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$ симетричні відносно осі x .
- Щоб побудувати графік функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, треба графік функції $y = f(x)$ розтягнути від осі x у k разів, якщо $k > 1$, або стиснути його в $\frac{1}{k}$ разів до осі x , якщо $0 < k < 1$.

<p>$y = x$ графік – пряма</p> <p>$D(y) = R$ $E(y) = R$</p>	<p>$y = x^2$ графік – парабола</p> <p>$D(y) = R$ $E(y) = [0; +\infty)$</p>
<p>$y = \frac{3}{x}$ графік – гіпербола</p> <p>$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$</p>	<p>$y = x^3$ графік – кубічна парабола</p> <p>$D(y) = R$ $E(y) = R$</p>
<p>$y = \sqrt{x}$</p> <p>$D(y) = [0; +\infty)$ $E(y) = [0; +\infty)$</p>	<p>$y = x$</p> <p>$D(y) = R$ $E(y) = [0; +\infty)$</p>

- Щоб побудувати графік функції $y = f(kx)$, де $k > 0$, треба графік функції $y = f(x)$ розтягнути від осі y в $\frac{1}{k}$ разів, якщо $0 < k < 1$, або стиснути його в k разів, якщо $k > 1$.
- Щоб одержати графік функції $y = f(x) + n$, треба графік функції $y = f(x)$ перенести на n одиниць у напрямі осі y , якщо $n > 0$, або на $|n|$ одиниць у протилежному напрямі, якщо $n < 0$.
- Щоб одержати графік функції $y = f(x - m)$, досить графік функції $y = f(x)$ перенести на m одиниць у напрямі осі x , якщо $m > 0$, або на $|m|$ одиниць у протилежному напрямі, якщо $m < 0$.



Мал. 17



Мал. 18

Приклади побудови графіків $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = -2x^2$ подано на малюнку 17, а графіків $y = x^2$, $y = (x - 3,5)^2$, $y = (x - 3,5)^2 + 3$ – на малюнку 18.

Термін «функція» ввів у математику Г.В. Лейбніц.



ЛЕЙБНИЦ ГОТФРІД ВІЛЬГЕЛЬМ (1646–1716)



Видатний німецький учений. За освітою юрист, працював бібліотекарем, історіографом, організував Берлінську академію наук, досліджував проблеми політичної економії, мовознавства, хімії, геології, конструював обчислювальні машини. Основоположник символічної логіки, один з творців математичного аналізу. Ввів терміни: «функція», «абсциса», «ордината», логічну символіку, знаки множення і ділення (крапку і дво-крапку) та ін.

«Після Лейбніца, мабуть, уже не було людини, яка повністю охоплювала б усе інтелектуальне життя свого часу».

Н. Вінер



ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке функція? Як позначають функції?
2. Що таке аргумент функції, область визначення функції?
3. Як можна задавати функцію?
4. Назвіть основні види функцій. Які їх графіки?
5. Задано графік функції $y = f(x)$. Як побудувати графік функції: а) $y = af(x)$; б) $y = f(x) + b$; в) $y = f(x + a)$?
6. Які функції називають рівними? А нерівними? Наведіть приклади.



Виконаємо разом

1. Знайдіть область визначення функції:

$$\text{а) } y = \frac{x+3}{9-x^2}; \quad \text{б) } y = \sqrt{1-2x+x^2}.$$

- **Розв'язання.** а) Проаналізуємо функцію $y = \frac{x+3}{9-x^2}$.

Змінна x може набувати будь-яких значень, крім тих, при яких знаменник дроби $\frac{x+3}{9-x^2}$ дорівнює нулю. Щоб їх знайти, розв'яжемо рівняння $9 - x^2 = 0$, $(3 - x)(3 + x) = 0$, звідси $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

Отже, область визначення функції – множина дійсних чисел, крім $x = \pm 3$.

$$D(y) = (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty).$$

б) Розглянемо функцію $y = \sqrt{1 - 2x + x^2}$. Виконаємо тотожні перетворення: $y = \sqrt{1 - 2x + x^2} = \sqrt{(1 - x)^2}$, отже, $y = \sqrt{(1 - x)^2}$. При будь-яких значеннях змінної x вираз $(1 - x)^2 \geq 0$, а тому область визначення функції – уся множина дійсних чисел.

$$D(y) = R.$$

2. Чим різняться графіки функцій

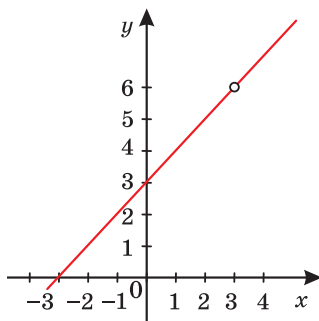
$$y = x + 3 \text{ і } y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}?$$

● **Розв'язання.** Праві частини да-

них рівностей тотожно рівні, оскільки

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3. \text{ Але перший}$$

вираз має числові значення при всіх дійсних значеннях x , а другий – при всіх, крім $x = 3$. Тому графік першої функції – пряма, а другої – пряма без однієї точки (мал. 19).



Мал. 19



Виконайте усно

149. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = 3x^2 - 2$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = 2,5$; г) $y = 4 - x$.

150. Як називається графік функції, заданої формулою:

а) $y = 3x + 1$; б) $y = x^2$; в) $y = 3$; г) $y = x^{-1}$?

151. Графік якої з функцій проходить через початок координат:

а) $y = -5x$; б) $y = 3x - 2$; в) $y = 2x^2$; г) $y = x(x - 2)$?

152. Які з функцій, заданих формулами $y = 15 - x$, $y = |x|$, $y = 3(x - 2)$, $y = x^2 + 5$, не можуть мати від'ємних значень.

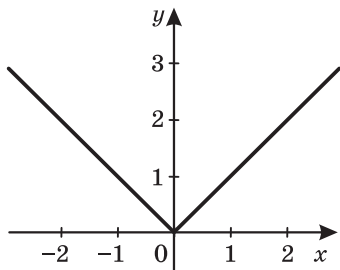
153. Чи є площа круга функцією його радіуса? А його діаметра?

154. Чи є об'єм куба функцією довжини його ребра? Спробуйте задати цю функцію формулою.



155. Задайте формулою функцію, яка виражає площу квадрата через його периметр P .

156. Побудуйте графік функції, яка виражає залежність периметра правильного трикутника від довжини його сторони.



Мал. 20

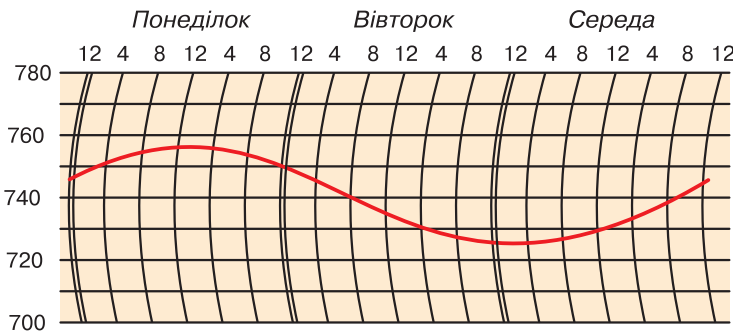
157. На малюнку 20 зображено графік функції. Один учень стверджує, що цю функцію можна задати формулою $y = \sqrt{x^2}$, інший – що графіку відповідає формула $y = |x|$. Хто з них правий?

158. У США основною одиницею довжини вважається ярд, який дорівнює $\frac{3600}{3937}$ м. Задайте формулою

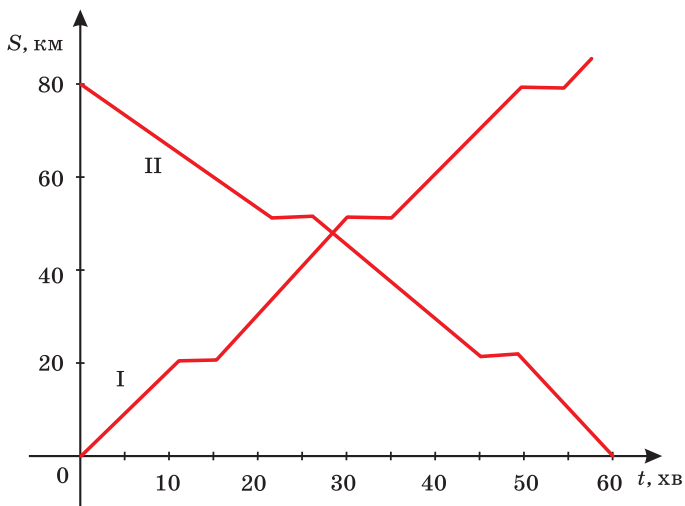
залежність довжини L , вираженої в метрах, від числа ярдів l .

159. «Прочитайте» графік зміни атмосферного тиску, зображений на малюнку 21.

160. На малюнку 22 зображено графіки руху двох електропоїздів. Проаналізуйте ці рухи: скільки зупинок робив кожен поїзд; коли вони зустрілися; скільки часу тривала кожна зупинка?



Мал. 21



Мал. 22

161. Знайдіть $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, якщо функцію задано формулою:

а) $f(x) = 3x - 1$; б) $f(x) = 2x^2 + 3$; в) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$.

162. Функцію задано формулою $y = -0,5x + 2$. Знайдіть значення функції, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює -24 ; -10 ; 0 ; 5 . При якому значенні аргументу значення функції дорівнює -6 ; 0 ; 5 ; $7,5$?

163. Знайдіть значення функції, заданої формулою:

а) $y = 8x - 5$, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює -2 ; 0 ; $1,5$; 12 ; 25 ;

б) $y = -\frac{x}{2} + 1$, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює -8 ; -1 ; 0 ; 1 ; 20 .

164. Функцію задано формулою $y = 0,25x - 1$. Заповніть таблицю.

x	-10	-5							
y			-2	-1	0	1	$1,5$	4	25

165. Функцію задано формулою $y = \sqrt{x+5}$ на області визначення $D = \{-4; -2,75; -1; 1,25; 4; 11\}$. Задайте її таблично і графічно.

166. Функцію задано таблицею.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

Задайте її формулою. Укажіть її область визначення й область значень.

167. У яких точках графік функції $y = x^2 - 3x$ перетинає:

а) вісь y ; б) вісь x ?

168. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = 2x - 7$; б) $y = \sqrt{x+1}$; в) $y = 2 - \sqrt{x}$;

г) $y = \frac{1}{x-1}$; д) $y = \frac{x+3}{x^2-9}$; е) $y = \frac{x^2-3}{3-x^2}$.

169. Функцію $y = x^2$ задано на проміжку $[-2; 5]$. Знайдіть її область значень.

170. Знайдіть область визначення функції $y = x^3$, якщо її область значень $[-8; 27]$.

Б

Побудуйте графік функції (**171**, **172**).

171. а) $y = -4x$; б) $y = 4x^2$; в) $y = x + 4$;

г) $y = \frac{x}{4}$; д) $y = 2x - \frac{1}{2}x$; е) $y = \frac{4}{x}$.

172. а) $y = 0,5x$; б) $y = x(x+2)+1$; в) $y = -2x^2$;
 г) $y = 3-2x$; д) $y = (1-x)(1+x)$; е) $y = \sqrt{x}$.

173. Маса порожньої бочки 40 кг, а маса 1 л бензину 0,8 кг. Виразіть формулою залежність маси m бочки з бензином від об'єму V бензину в ній. Чи є ця залежність лінійною функцією?

174. Прямокутний паралелепіпед зі сторонами основи a см, b см і висотою 6 см має об'єм, що дорівнює 72 см^3 . Виразіть формулою залежність b від a .

175. Щоб пошити одну сорочку, потрібно 2,5 м тканини. Запишіть формулу для обчислення залишку тканини після пошиття x сорочок, якщо в сувої 200 м тканини. Яких значень може набувати x ?

176. Знайдіть значення аргументу, при якому:

а) значення функції $y = -3x + 2$ дорівнює -7 ; 0 ; 5 ;

б) значення функції $y = \frac{4}{x-3}$ дорівнює -20 ; 2 ; $\frac{1}{2}$;

в) значення функції $y = x(x-3)$ дорівнює -2 ; 0 ; 10 ;

г) значення функції $y = \frac{2}{x} + \frac{1}{x-4}$ дорівнює $-\frac{5}{8}$; 0 ; $1,4$.

177. Задайте формулою функцію, якщо:

а) значення функції на 4 більші від значень аргументу;

б) значення функції на 9 менші від значень аргументу;

в) значення функції втричі більші від значень аргументу;

г) значення функції протилежні значенням аргументу;

д) значення функції обернені до значень аргументу.

178. Функцію задано формулою $y = \frac{4}{1-x}$, де $-7 \leq x < 1$. Заповніть таблицю.

x	-7	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
y							

Побудуйте графік цієї функції.

179. Функцію задано формулою $y = \frac{6}{x} + 3$, де $1 \leq x < 6$. Побудуйте графік цієї функції, склавши спочатку таблицю її значень.

180. Відомо, що графік лінійної функції проходить через точки $A(-2; 1)$ і $B(3; 6)$. Задайте цю функцію формулою.

181. Задайте формулою обернену пропорційність, графік якої проходить через точку $A(3; 4)$.

182. Чи проходить графік функції $y = x^2 - 5x + 6$ через точку $A(0; 5)$? А через точку $B(5; 6)$?

183. Чи правильно, що графік функції $y = x^2 - 4x + 5$ відрізняється від графіка функції $y = x^2 - 4x$ тільки тим, що його зміщено на 5 одиниць угору вздовж осі y ?

184. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 4x + 4$.

185. Побудуйте графік функції $y = x^2 + 4x - 2$.

Побудуйте в одній системі координат графіки функцій (**186–188**).

186. а) $y = x^3$, $y = -x^3$, $y = -x^3 + 1$;

б) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} + 2$, $y = \sqrt{x} - 1$;

в) $y = -3x$, $y = -3x + 2$, $y = -3x - 0,5$.

187. а) $y = 0,5x^2$, $y = 0,5x^2 - 1$, $y = 0,5x^2 + 3$;

б) $y = -\frac{12}{x}$, $y = -\frac{12}{x} + 3$, $y = -\frac{12}{x} - 1$;

в) $y = 2\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x} - 3$, $y = 2\sqrt{x} + 2$.

188. а) $y_1 = 2x$, $y_2 = 2(x-1)$, $y_3 = 2(x+3)$;

б) $y_1 = -x^2$, $y_2 = -(x+2)^2$, $y_3 = -(x-3)^2$;

в) $y_1 = \frac{4}{x}$, $y_2 = \frac{4}{x-3}$, $y_3 = \frac{4}{x+1}$.

189. Розв'яжіть графічно рівняння:

а) $2x - 6 = \sqrt{x}$; б) $x^2 = x + 2$; в) $x = x^3$; г) $\frac{3}{x} = 3x$.

190*. Вважають, що при заглибленні на кожні 30,5 м внутрішня температура Землі підвищується на 1°C . На глибині 5 м вона дорівнює 15°C . Задайте залежність температури t від глибини h . Яка температура на глибині 1 км? А на глибині 3 км?

191. Чим різняться поняття «графік функції» і «графік рівняння»? Наведіть приклади.



Вправи для повторення

192. Розв'яжіть рівняння:

а) $3x^2 - 5x + 2 = 0$; б) $x^2 + 6x + 6 = 0$; в) $5x^2 - x + 1 = 0$.

193. З двох розчинів солі – 10-відсоткового і 15-відсоткового – треба утворити 40 г 12-відсоткового розчину. Скільки грамів кожного розчину потрібно взяти?

194. Спростіть вираз, якщо a , b , c – додатні числа:

а) $\sqrt{9a^4b^2c^6}$; б) $\sqrt{0,25a^2b^6c^{10}}$;

в) $-\sqrt{16a^4b^4c^6}$; г) $-\sqrt{2,25a^2b^2c^8}$.