**1.Мн-во операций над мн-вами**

Мн-во – совокупность объектов, обладающих определенным св-вом.

Пересечением двух мн-в А и В н-ся мн-во С, состоящее из Эл-ов, принадлежащих как мн-ву А, так и мн-ву В.(А={1,2,3}, B={2,5}, AΩB={2}) Объединением двух мн-в А и В н-ся мн-во С, состоящее из Эл-ов, принадлежащих хотя бы одному из мн-в А или В.(A={1,2,3}, B={2,5} AuB={1,2,3,5}Разностью С двух мн-в А и В н-ся мн-во, состоящ. Из Эл-ов мн-ва А и не принадл. В(Разностью мн-ва целых чисел и мн-ва четных чисел явл. Мн-во нечетных чисел) Если А подмн-во В, то разность В\А н-ся дополнением А до В. Дополнением мн-ва А н-ся мн-во, состоящ. Из Эл-ов универсального мн-ва не принадлежащих мн-ву А.

**2.Мн-во вещ.чисел, основные св-ва точных граней**

Наиболее употребительные числовые мн-ва: N-мн-во натуральных чисел Q-мн-во рациональных чисел R-мн-во вещественных чисел C-мн-во комплексных чисел (Cегмент: [a,b]={x|a<x≤b} Полунтервал: (a,b]={x|a<x≤b} [a,b)={x|a≤x<b} [a,+∞)={x|a≤x<∞} (-∞,a]={x|-∞<x≤a}Интервал: (a,b)={x|a<x<b} (a,+∞)={x|a<x<+∞} (-∞,a)={x|-∞<x<a} R={x|-∞<x<∞}=(-∞,+∞) ). Все эти мн-ва н-ся промежутками a,b –концами промежутков. [a,b],(a,b),[a,b),(a,b] – конечные промежутки, остальные-бесконечные!

+можно взять из 3 вопроса

**3.Грани числовых мн-в, св-во граней**

## Пусть Х – непустое мн-во веществ. чисел.

## Мн-во Х назся огран. сверху(снизу), если сущ-ет число с такое, что для любого х Х вып-ся неравенство с≥х(х≥с). Число с наз-ся верхн.(нижн.) гранью мн-ва Х. Мн-во, огран. сверху и снизу наз-ся ограниченым

## Если мн-во имеет 1 верхнюю грань то она имеет их бесчисленное мн-во.

Пример X=R+ - ограничено снизу, но не сверху, значит не ограничено.

## Точные грани числовых мн-в

## Пусть мн-во Х ограничено сверху, если это мн-во содержит макс число, т.е. наименьшую из своих верхних граней, то это число назся макс мн-ва Х и обозначается Х\*=maxX. Если мн-во содержит мин число Х\* , то оно min мн-ва Х

## Пример Х=[0,1) то max[0,1) не ∃. min [0,1)=0

## Число Х\* наз-ся точной верхн. гранью, мн-ва Х, если во-первых оно явл. верхн. гранью этого мн-ва, а во-вторых при сколь угодном уменьшении Х\* получ. число перестает быть верх. гранью мн-ва.

## Верхн. грань – supX=x\*, а нижн. грань infX=x\*

# Теорема. Любое непустое ограниченное сверху (снизу) числ. мн-во имеет точную верх(ниж) грань.

# Таким образом у огран. мн-ва обе грани ∃, док-во основано на непрерывности мн-ва действит. Чисел.

**4.Th о сущ. т.в.г. и т.н.г.**

# Теорема. Любое непустое ограниченное сверху (снизу) числ. мн-во имеет точную верх(ниж) грань.

Док-во: Пусть Х непустное мн-во, ограниченное сверху. Тогда Y- мн-во чисел, ограничивающих мн-во Х сверху, не пусто. Из определения верхней грани следует, что для любого х€Х и y€Y любого выполняется нер-во х≤у. В силу св-ва непрерывности вещ.чисел существует такое с, что для любых х и у выполняется нер-во х≤с≤у. Из первого нер-ва следует, что число с ограничивает мн-во Х сверху, т.е. является верхней гранью. Из второго нер-ва следует, что число ч явл.наименьшим из таких чисел,т.е. явл точной верхн.гранью. Теорема док-на. Аналогична теорема о т.н.г

**5.Числовые последовательности, действия над ними**

Если для каждого нат. числа n определено некоторое правило сопоставляющее ему число xn, то мн-во чисел х1,х2, … ,хn, …(1,2,3,n –внизу) наз-ся числовой последовательностью и обозначается {xn}, причем числа образующие данную посл-ть наз-ся ее эл-ми, а эл-т хn общим эл-том посл-ти . Над числовыми последовательностями можно выполнять след. Арифметические операции: произведение, сумма, разность, произведением на число, частное.

**6.Огранич и неогранич пос-ти**

Посл-ть {xn} наз-ся огран. сверху(снизу), если найдется какое-нибудь число {xn} M(m) xn≤M ∀n (xn≥m ∀n) посл-ть наз-ся огранич., если она огранич. сверху и снизу.

Посл-ть {xn} наз-ся неогранич., если для любого полного числа А сущ-ет эл-т хn этой посл-ти, удовлетворяющий неравенству ⏐xn⏐>А.

**7. Б-м и б-б пос-ти: опр, осн. Св-ва, связь между ними**

Пос-ть Xn н-ся б-б, если для любого положительного числа А существует номер N такой, что при всех n>N выполняется нер-во |Xn|>A, т.е. (∀A>0)(∃N=N(A))(∀n>N):|Xn|>A Любая б-б пос-ть явл. неограниченной. Однако неограниченная пос-ть может и не быть б-б.

Пос-ть {An} н-ся б-м, если для любого положительного числа ε (сколь бы малым мы его ни взяли) существует номер N=N(ε) такой, что при всех n>N выполняется нер-во |An|< ε, т.е. (∀ε>0)(∃N=N(ε))( ∀n>N):|An|< ε

Св-ва: 1.Если {Xn} б-б пос-ть и все ее члены отличны от нуля, то по-сть {1\Xn} б-м и обратно. 2.Сумма и разность двух б-м пос-тей есть б-м пос-ть. (следствие: алгебраическая сумма любого конечного числа б-м постей есть б-м пость.) 3.Произведение двух б-м постей есть б-м пость.4. Произведение ограниченной пости на бесконечно малую пость есть пость б-м.

**8.Понятие сходящихся постей, lim пости.**

Опр Если для любого ε >0 найдется такой номер N, для любого n >N:⏐xn-a⏐< ε

Все посл-ти имеющие предел наз-ся сходящимися, а не имеющее его наз-ся расходящимися.

Опр Число а н-ся пределом пости Xn для любой точки окрестности а, сущ. N=N(ε), такой, что все Эл-ты Xn с номерами n>N находятся в этой ε-окрестности.

**9.Основные св-ва сход. Постей**

Теорема «Об единственности пределов»

Если посл-ть xn сходится, то она имеет единственный предел. Док-во (от противного)

{xn} имеет два разл. Предела a и b, а≠b. Тогда согласно определению пределов любая из окрестностей т. а содержит все эл-ты посл-ти xn за исключением конечного числа и аналогичным св-вом обладает любая окрестность в точке b. Возьмем два радиуса ε= (b-a)/2, т.к. эти окрестности не пересекаются, то одновременно они не могут содержать все эл-ты начиная с некоторого номера. Получим противоречие теор. док-на.

Теорема «Сходящаяся посл-ть ограничена»

Пусть посл-ть {xn}→а ε >о N:∀n>N⏐xn-a⏐<ε эквивалентна а-ε<xn<a+ε ∀n>N => что каждый из членов посл-ти удовлетворяет неравенству⏐xn⏐≤ c = max {⏐a-ε⏐,⏐a+ε⏐,⏐xn⏐,…,⏐xn-1⏐}

Теорема «Об арифметических дейсьвиях»

Пусть посл-ть {xn}→a,{yn}→b тогда арифметические операции с этими посл-тями приводят к посл-тям также имеющие пределы, причем:

а) предел lim(n→∞)(xn±yn)=a±b

б) предел lim(n→∞)(xn\*yn)=a\*b

в) предел lim(n→∞)(xn/yn)=a/b, b≠0

Док-во: а)xn±yn=(а+αn)±(b+βn)=(a±b)+(αn±βn) Правая часть полученная в разности представляет сумму числа a+b б/м посл-тью, поэтому стоящая в левой части xn+yn имеет предел равный a±b. Аналогично др. св-ва.

б) xn\*yn=(а+αn)\*(b+βn)=ab+αnb+aβn+αnβn

αn\*b – это произведение const на б/м

а\*βn→0, αnβn→0, как произведение б/м.

=> поэтому в правой части стоит сумма числа а\*b+ б/м посл-ть. По т-ме О связи сходящихся посл-тей в б/м посл-ти в правой части xn\*yn сводится к a\*b

**10. Предельный переход в нер-вах.**

**11. Монотонные пос-ти**

Посл-ть {xn} наз-ся возр., если x1<…<xn<xn+1<…;

неубывающей, если x1≤x2≤…≤xn≤xn+1≤…; убывающей, если x1>x2>…>xn>xn+1>…; невозр., если x1≥x2≥…≥xn≥xn+1≥…

Все такие посл-ти наз-ся монотонными. Возр. и убыв. наз-ся строго монотонными

Монотонные посл-ти ограничены с одной стороны, по крайней мере. Неубывающие ограничены снизу, например 1 членом, а не возрастыющие ограничены сверху.

**12. Число е**

Рассмотрим числ. посл-ть с общим членом xn=(1+1/n)^n (в степени n)(1) . Оказывается, что посл-ть (1) монотонно возр-ет, ограничена сверху и сл-но явл-ся сходящейся, предел этой пос-ти наз-ся экспонентой и обозначается символом е≈2,7128…

Док-ем формулу lim(n->∞)(1+1/n)^n(в степени n)=е

yN=; zN=yN +

1) yN монотонно растет

2) yN<zN

3) zN-yN0

4) zN монотонно убывает

Доказателство:

zN-zN+1 = yN + - yN+1 -= +-=

2=y1<yN<zN<z1=3

**e** = Lim yN = Lim zN - по лемме о вложенных промежутках имеем: yN<**e**<zN = yN + 1/(n\*n!)

Если через  обозначить отношение разности **e** - yN  к числу 1/(n\*n!), то можно записать **e** - yN =/(n\*n!), заменяя yN его развернутым выражением получаем **e** = yN + /(n\*n!), (0,1)

Число **e** иррационально:

Доказательство(от противного): Пусть **e**=m/n, mZ, nN

m/n = **e** = yN + /(n\*n!)

m\*(n-1)!= yN\*n! + /n, где (m\*(n-1)! & yN\*n!)Z, (/n)Z => противоречие

**13. Th о вложенных промежутках**

Пусть на числовой прямой задана посл-ть отрезков [a1,b1],[a2,b2],…,[an,bn],…

Причем эти отрезки удовл-ют сл. усл.:

1) каждый посл-щий вложен в предыдущий, т.е. [an+1,bn+1]⊂[an,bn], ∀n=1,2,…;

2) Длины отрезков →0 с ростом n, т.е. lim(n→∞)(bn-an)=0. Посл-ть с указанными св-вами наз-ют вложенными.

Теорема Любая посл-ть вложенных отрезков содержит единную т-ку с принадлежащую всем отрезкам посл-ти одновременно, с общая точка всех отрезков к которой они стягиваются.

**14.Понятие ф-ии, способы задания, классификация**

**15.Предел ф-ии в точке(Гейне,Коши,правый,левый) Предел ф-ии на бесконечности**

**16. Th о пределе ф-ии**

**17. Первый замечательный предел**



Доказательство: докажем для справедливость неравенства 

В силу четности входящих в неравенство ф-ий, докажем это неравенство на промежутке

Из рисунка видно, что площадь кругового сектора



, так как *х*>0, то ,

2. следовательно, что 





1. Покажем, что 





1. Докажем, что 



1. Последнее утверждение:



**18. Второй замечательный предел**

lim(n→∞)(1+1/n)^n=e Док-во:

x→+∞ n x:n=[x] => n≤x<n+1 => 1/(n+1)<1/x<1/n

Посколько при ув-нии основания и степени у показательной ф-ции, ф-ция возрастает, то можно записать новое неравенство (1/(n+1))^n≤(1+1/n)^x≤ (1+1/n)^(n+1) (4)

Рассмотрим пос-ти стоящие справа и слева. Покажем что их предел число е. Заметим (х→+∞, n→∞)

lim(n→∞)(1+1/(n+1))=lim(n→∞)(1+1/(n+1))^n+1-1= lim(n→∞)(1+1/(n+1))^n+1\*lim(n→∞)1/(1+1/(n+1))=e

lim(n→∞)(1+1/n)^n+1= lim(n→∞)(1+1/n)^n\* lim(n→∞)(1+1/n)=e\*1=e

**19.Б-м ф-ии, действия над ними**

***Опр***. Ф-ция α(х) наз-ся б/м если ее предел в этой т-ке равен 0 из этого определения вытекает следующее св-во б/м ф-ций:

а) Алгебраическая сумма и произведение б/м ф-ций есть б/м ф-ции.

б) Произведение б/м ф-ции на ограниченную ф-цию есть б/м ф-ция, т.е. если α(х)→0 при х→х0, а f(x) определена и ограничена (∃ С:⏐ϕ(х)⏐≤С)=> ϕ(х)α(х)→0 при х→х0

Для того чтобы различать б/м по их скорости стремления к 0 вводят сл. понятие:

1) Если отношение 2-х б/м α(х)/β(х)→0 при х→х0 то говорят что б/м α имеет более высокий порядок малости чем β.

2) Если α(х)/β(х)→A≠0 при х→х0 (A-число), то α(х) и β(х) наз-ся б/м одного порядка.

3) если α(х)/β(х)→1 , то α(х) и β(х) наз-ся эквивалентными б/м (α(х)~β(х)), при х→х0.

4) Если α(х)/β^n(х)→А≠0, то α(х) наз-ся б/м n-ного порядка относительно β(х).

Аналогичные определения для случаев: х→х0-, х→х0+, х→-∞, х→+∞ и х→∞.

**20. Б-б ф-ии, связь с б-м**

Опр. Ф-ия y=f(x) называется бесконечно большой в точке *а,* если ее предел в этой точке равен бесконечности. (f(x)-б-б)=lim(x->a)(f(x))=∞

Свойства :Пусть y=f(x) и y=g(x) - бесконечно большие ф-ии в точке *а*.

Ф-ия *ϕ(х)* имеет предел в точке *а*, отличный от 0

Ф-ия *α(х)* и *β(ч)* – бесконечно малые

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Произведение двух бесконечно больших ф-ий – бесконечно большая ф-ия.



1. Произведение бесконечно больших на ф-ию, имеющую отличный от нуля предел - бесконечно большая. 
2. Ф-ия, обратная величине бесконечно большой – есть бесконечно малая, и наоборот.



**21.Сравнение б-м ф-ии, сравнение б-б ф-ии**

**22.Определение непрерывности в точке, на отрезке.**

Опр1.Ф-ия у=f(x) н-ся непрерывной в т.Х0, если lim(x->x0)(f(x))=f(x0)

Опр2.Ф-ия f(x) н-ся непрерывной в т Х0, если для любой пос-ти значений аргумента Х: х1,х2,х3….,хn,…. Сходящейся к Х0 соответствующая пос-ть значений ф-ии: f(x1), f(x2),f(x3),....,f(xn),... сходится к числу f(x0), т.е. (∀{xn}->x0, xn€X):{f(xn)}->f(x0)

Опр3. Ф-ия f(x) н-ся непрерывной в т. Х0, если для любого ε>0 найдется отвечающее ему положительное число δ такое что для всех х, удовлетворяющих условию |x-x0|< δ выполняется нер-во |f(x)-f(x0)|< ε

Опр4. Ф-ия f(x) н-ся непрерывной в точке х0, если ее приращение в этой точке является бесконечно малой функцией при ▲x->0, т.е. lim(▲x->0)( ▲y)=0

**23.Th о сумме, разн, пр, частн непрер ф-ии**

Th Пусть ф-ии f(x) и g(x) непрерывны в точке х0. Тогда ф-ии f(x)±g(x), f(x)g(x),f(x)\g(x) также непрерывны в этой точке(для частно g(x0)≠0)

Докво.Т.к. ф-ия f(x) непрерывна в точке х0, то lim(x->x0)(g(x))=g(x0). Тогда по теореме о пределах ф-ии пределы ф-ии f(x)+g(x),f(x)g(x) b f(x)\g(x) существуют и соответственно равны f(x0)±g(x0),f(x0)g(x0),f(x0)\g(x0)(g(x0)≠0).Но эти величины равны соответствующим значениям ф-ии в точке х0.Следовательно, согласно определению ф-ии f(x)±g(x),f(x)g(x),f(x)\g(x) непрерывны в точке х0

**24.Точки разрыва ф-ии: (не) устранимый разрыв,1,2 рода**

Точки, в которых ф-ия не является непрерывной, называются точками разрыва ф-ии.

Все т-ки р-рыва делятся на 3 вида: т. устранимого р-рыва; точки р-рыва 1-го , и 2-го рода.

а) если в т-ке х0 ∃ оба односторонних предела, которые совпадают между собой f(x0+)= f(x0-), но ≠ f(x0), то такая т-ка наз-ся точкой устранимого р-рыва.

Если х0 т-ка устранимого р-рыва, то можно перераспределить ф-цию f так чтобы она стала непр. в т-ке х0. Если по ф-ции f построить новую ф-цию положив для нее знач. f(x0)= f(x0-)=f(x0+) и сохранить знач. в др. т-ках, то получим исправл. f.

б) если в т-ке х0 ∃ оба 1-стороних предела f(x0±), которые не равны между собой f(x0+)≠f(x0-), то х0 наз-ся т-кой р-рыва первого рода.

в) если в т-ке х0 хотя бы 1 из односторонних пределов ф-ции не ∃ или бесконечен, то х0 наз-ся т-кой р-рыва 2-го рода.

**25.Th об устойчивости знака непрерывной ф-ии**

**26.1 Th Больцано-Коши (th о прохождении ф-ии через нулевое значение при смене знаков)**

Если f(x) непр. на отрезке (a,b) и принимает на концах этого отрезка значение разных знаков f(a) f(b), то ∃ т-ка с∈(a,b),в которой ф-ия обращается в0.

Док-во Одновременно содержит способ нах-ния корня ур-ния f(x0)=0 методом деления отрезка пополам. f(d)=0 c=d Т-ма доказана.

Пусть f(d)≠0 [a,d] или [d,b] ф-ция f принимает значение разных знаков. Пусть для определ-ти [a,d] обозначим через [a1,b1]. Разделим этот отрезок на 2 и проведем рассуждение первого шага док-ва в итоге или найдем искомую т-ку d или перейдем к новому отрезку [a2,d2] продолжая этот процесс мы получим посл-ть вложения отрезков [a1,b1]>[a2,b2] длинна которых (a-b)/2^n→0, а по т-ме о вл-ных отрезков эти отрезки стягиваются к т-ке с. Т-ка с явл. искомой с:f(c)=0. Действительно если допустить, что f(c)≠0 то по св-ву сохр. знаков в некоторой δ окрестности, т-ке с f имеет тот же знак что и значение f(c) между тем отрезки [an,bn] с достаточно N попабают в эту окрестность и по построению f имеет разный знак на концах этих отрезков.

**27.2 Th Больцано-Коши(Th о прохождении непрерывной ф-ии через любое промежуточное значение)**

**28.1 Th Вейерштрасса(Th об ограниченности непрерывной на сегменте ф-ии)**

Т-ма 1(о огран. непр. ф-ции на отрезке). Если f(x) непр. на [a,b], тогда f(x) огран. на этом отрезке, т.е. ∃ с>0:⏐f(x)⏐≤c ∀x∈(a,b).

Док-во т-мы 1. Используем метод деления отрезка пополам. Начинаем от противного; f неогр. на [a,b], разделим его, т.е. тогда отрезки [a;c][c;b] f(x) неогр.

Обозн. [a1,b1] и педелим отрез. [a2,b2], где f-неогр. Продолжая процедуру деления неогр. получаем послед. влож. отрезки [an;bn] котор. оттяг. к т-ке d (d=c с надстройкой) из отрезка [a,b], общее для всех отр. Тогда с одной стороны f(x) неогр. в окр-ти т-ки d на конц. отрезка [an,bn], но с др. стороны f непр. на [a,b] и => в т-ке d и по св-ву она непр. в некоторой окрестности d. Оно огран. в d => получаем против. Поскольку в любой окр-ти т-ки d нах-ся все отрезки [an;bn] с достаточно большим 0.

Теорема ВЕЙЕРШТРАССА. Эти теремы неверны если замкнутые отрезки заменить на др. пр-ки

**29. 2 Th Вейерштрасса(Th о достижении непрерывной на отрезке ф-ии своих точных граней)**

Если f(x) непр. на [a,b], тогда она достигает своего экстр. на этом отрезке, т.е. ∃ т-ка max X\*:f(x\*)≥f(x) ∀x∈[a,b], т-ка min X\_:f(x\_)≤f(x) ∀x∈[a,b].

Док-во.Обозначим E(f) – множиством значений ф-ии f(x) на отр. [a,b] по предыд. т-ме это мн-во огран. и сл-но имеет конечные точные грани supE(f)=supf(x)=(при х∈[a,b])=M(<∞). InfE(f)= inff(x)=m(m>-∞). Для опр. докажем [a,b] f(x) достигает макс. на [a,b], т.е. ∃ х\*:f(x)=M. Допустим противное, такой т-ки не ∃ и сл-но f(x)<M ∀x∈[a,b] рассмотрим вспомогат. ф-цию g(x)=1/(M-f(x) при х∈[a,b]. g(x) – непр. как отношение 2-х непр. ф-ций и то знач. 0 согластно т-ме 1 g(x)- огран. т.е. ∃ c>0

!0<g(x)≤c g≥0, на [a,b] – 1/(M-f(x))≤c => 1≤c(M-f(x)) => f(x) ≤M-1/c ∀x∈[a,b]

Однако это нер-во противор., т.к. М-точная верхн. грань f на [a,b] а в правой части стоит “C”

Теорема ВЕЙЕРШТРАССА. Эти теремы неверны если замкнутые отрезки заменить на др. пр-ки

**30.Th о непрерывности сложной ф-ии**

**31.Th о непрерывности обратной ф-ии(без док-ва, примеры)**

Пусть ф-ия y=f(x) определена, строго монотонна и непрерывна на некотором промежутке Х и пусть У-множество ее значений. Тогда на множестве У обратная ф-ии x=φ(y) одназначна, строго монотонна и непрерывна.

**32.Понятие производной**

Пусть функция y=f(x) определена в некоторой окрестности точки x0. Пусть ▲x – приращение

аргумента в точке x0, а ▲y=f(x0+▲x)-f(x0)– соответствующее приращение функции. Составим

отношение ▲y/(поделить)▲x этих приращений и рассмотрим его предел при▲x->0. Если указанный

предел существует, то он называется производной функции f в точке x0 и обозначается , 

или , то есть

.

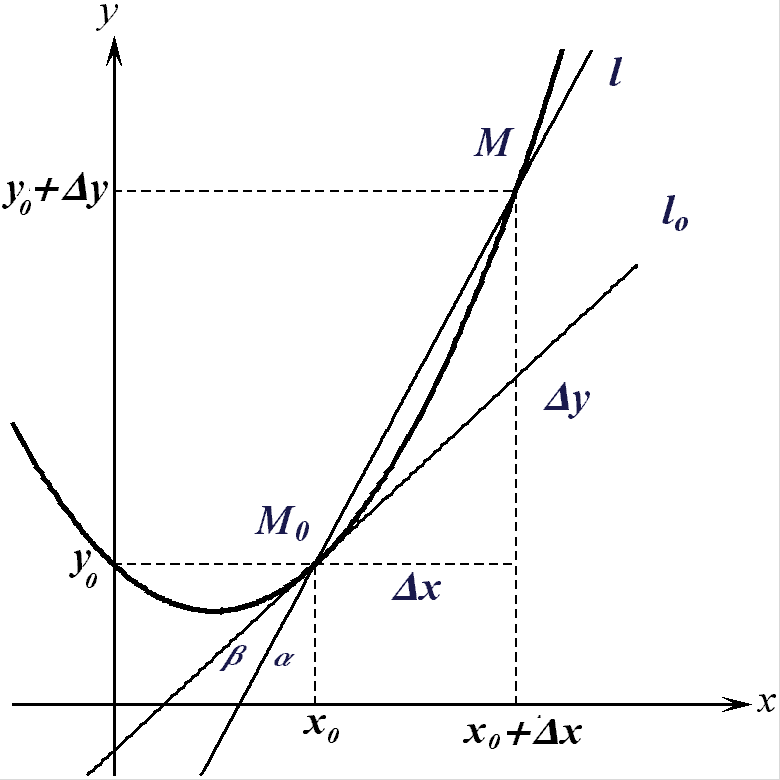
Операция вычисления производной называется дифференцированием, а функция, имеющая

производную в точке, – дифференцируемой в этой точке. Если функция имеет производную в

каждой точке интервала (a,b), то она называется дифференцируемой на этом интервале.

**33.Геометрический смысл производной**

а) Геометрический смысл производной. Рассмотрим график функции y=f(x), дифференцируемой в



точке x0 (рис. 13). Проведем через точки M0(x0,y0) и M(x0+▲x, y0+▲y) графика прямую l, и пусть

B(угол Бэтта) - угол ее наклона к оси х. Тогда (1)▲y/(деленный)▲x=tg B(бэтта)

Рис. 13.

Если ▲x стремится к нулю, то ▲y также стремится к нулю, и точка M приближается к точке M0, а

прямая l - к касательной l0(эль нулевая), образующей с осью x угол α(альфа). При этом

равенство (1) принимает вид: (2) f ’(x0)=tgα’ откуда следует, что производная функции в точке

равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке.

**34.Понятие дифференцируемости ф-ии**

*Df* : Ф-ия  дифференцируема в точке *х0* , если приращение ф-ии в точке сможет быть представлено в виде:

, *А* – const.

*Dh*: Для дифференцирования ф-ии в т. *х0* , необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовала производная.

Доказательство: (необходимость)



(достаточность): 

**35.Непрерывность и диф.**

**36.Понятие дифференциала ф-ии. Геом.смысл приблеженных вычислений с помощью dy**

Опр. Дифференциалом ф-ии y=f(x) в точке х0 н-ся главная, линейная от-но ▲х, часть приращенная ф-ии в этой точке. Для обозначения дифференциала ф-ии используют символ dy.

Из *Df* дифференцируемости следует, что приращение дифф. ф-ии можно представить в виде 

Из равенства нулю предела следует, что - б.м. более высшего порядка малости, чем , и 

Поскольку - б.м. одного порядка малости.

- б.м. одного порядка малости - б.м. эквивылентные, т.е. 

Пусть 

\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*



*Zm1:* и *х* – независимые переменные, т.е. 

*Zm1:*  для независимых переменных.



**37.Правила диференц суммы,разн,произв,частн**

1. ;
2. , где  - постоянная;
3. ;
4. ;
5. если , а , то производная сложной функции  находится по формуле

,

где индексы указывают, по какому аргументу производится дифференцирование.

**38.Вычислен производных элемент.ф-ий: x^n,nЄN,cos,sin,tg ,ctg, loga(основание)Х(а>0,a≠1,x>0)**

**39.Th о произв сложной ф-ии**

Пусть:

1. - дифф. в точке *y0* .
2. - дифф. в точке *х0* .
3. 

тогда сложная ф-ия - дифф. в точке *х0* и справедлива формула:



Доказательство:

1. - дифф. в точке *y0* 

2. - дифф. в точке *х0* 



3. - дифф. в точке *х0* а значит непрерывна в этой точке.







**40.Производная ф-ий x^α, αЄR(прием логарифм. Диф)**

**41.Th о производной обратной ф-ии**

**Предложение:** Если производная обратной функции g для ф-ции f существует в точке y0, то g’(y0)=1/f’(x0), где y0=f(x0)

Доказательство: g(f(x))=x g’(f(x))=1

g’(f(x0))=g’(f(x0))\*f’(x0)=1, g’(f(x0))=g(y0)=1/f’(x0)

**Теорема:** Пусть ф-ция f строго монотонно и непрерывно отображает () в (а,b) тогда  обратная ей ф-ция g, которая строго монотонно и непрерывно отображает (а,b) в (). Если f диф-ма в точке x0() и f’(x0)0, то g диф-ма в точке y0=f(x0) и g’(y0)=1/f’(x0)

Доказательство:

Возьмем произвольную последовательность сходящуюся к y0: yNy0, yNy0 =>  посл-ть xN: xN=g(yN), f(xN)=yN

g(yN)-g(y0)/yN-yO = xN-xO/f(yN)-f(yO) = 1/f(yN)-f(yO)/xN-xO  1/f’(xo) при nполучили при xNxO g(yN)-g(yO)/yN-yO1/f’(xO) => g’(уO)=1/f’(xO)

**42.Произв ф-ии: arcsinx,arccosx,arctgx,acctgx,a^x(a>0,a≠1)**

1) xrcsin x по теореме имеем Arcsin’x=1/Sin’y, где Sin y=x при условии, что Sin’y<0, получаем (используя производную синуса): Arcsin’x=1/Cos y, т.к. rcsin: [-1,1][-П/2,П/2] и Cos:[-П/2,П/2][0,1], то Cos y0 и, значит Arcsin’x = 1/Cos y = 1/(1-Sin2y)1/2 = 1/(1-x2)1/2

2) xArccos’x = -1/(1-x2)1/2

3) xArctg’x = 1/1+x2

4) xArcctg’x= -1/1+x2

5) y=a^x(в степени х) y ‘ =a^xlna Док-во:y=a^x является обратной для ф-ии x=loga(a-основание)y. Т.к. x’(y)=(1/y)loga(a-осн)e, то из соотношения loga(a-OCH)b=1/logb(b-OCH)a получим y’(x)=1/x’(y)=y/loga(a-OCH)e=a^x(в степени х)lna

**43.Производная высших порядков**

**Определение:** Если ф-ция f диф-ма в некоторой окрестности точки xO, то ф-ция f’(x):xf’(x) в свою очередь может оказаться диф-мой в точке xO или даже в некоторой ее окрестности. Производная ф-ции f’(x) - называется второй производной (или производной порядка 2) ф-ции f в точке xO и обознача ется f”(x). Аналогично определяется третья и четвертая производная и так далее. Для единообразия обозначаем через fN(xO) - производную порядка n функции f в точке xO и при n=0 считаем f0(xO)=f(xO).

**Замечание:** Cуществование производной порядка n требует того чтобы существовала производная пордка (n-1) уже в некоторой окрестности точки xO (следует из теоремы о связи диф-ти и непрерывности), в таком случае функция xfN-1(x) непрерывна в точке xO, а при n2 все производные порядка не выше (n-2) непрерывны в некоторой окрестности точки xO.

Пусть функции у=f(х) и х=g(t) таковы, что из них можно составить сложную функцию у=f(g(t)). Если существуют производные у’(х) и х’(t) то cуществует производная у’(t)=у’(х)\*х’(t).

Пусть функции у=f(х) и х=g(t) таковы, что из них можно составить сложную функцию у=f(g(t)) Если существуют производные у’(х) и х’(t) то существует производная у’(t)=у’(х)\*х’(t)

+нужно док-во

**44.Диференциалы высших порядков**

dy= f‘(x)dx – диф. первого порядка ф-ции f(x) и обозначается d^2y, т.е. d^2y=f‘‘(x)(dx)^2. Диф. d(d^(n-1)y) от диф. d^(n-1)y наз-ся диф. n-ного порядка ф-ции f(x) и обознач. d^ny.

Опр-ие: Дифференциалом n-го порядка функции *у=f(х)* называется дифференциал первого порядка от дифференциала (n-1)-го порядка. (обозначается *dny*)По определению *dny= d(dn-1y).* Иногда dy называют диф. Первого порядка. В общем случае, *dny=f(n)(х)dxn,* в предположении, что n-ая производная *f(n)(х)* сущ-ет.

+нужно док-во

**45.Возрастание и убывание ф-ии в точке. Достаточное условие возрастан и убыван ф-ии в точке**

**46.Понятие локального экстремума, необходимое условие локального экстремума**

Опр-ие: Функция *у=f(х)* имеет в точке *x0***локальный максимум**, если сущ-ет окрестность *(х0-δ, х0+δ),* для всех точек х которой выполняется неравенство *f(х)≤f(х0).* Аналогично определяется локальный минимум, но выполняться должно равенство *f(х)≥f(х0).*

**Теорема Ферма**: Если функция у=f(х) имеет в точке х0 локальный экстремум и дифференцируема в этой точке, то ее производная *f'(х0)* равна нулю.

Док-во: Проведем его для случая максимума в точке *х0.* Пусть *(х0-δ, х0+δ)* - та окрестность, для точек которой выполняется неравенство

Здесь возможно как 1 и 2 варианты, но | ∆х| <δ

При ∆х>0, будет ∆y:∆x ≤0, поэтому

При ∆х<0, будет ∆y:∆x ≥0, поэтому

По условию теоремы, существует производная *f'(х0)*А это означает, что правая производная *fпр'(х0)* и левая производная *fл'(х0)* равны между собой: *fпр'(х0)= fл'(х0)= f'(х0).* Таким образом, с одной стороны, *f'(х0)≤0,* с другой стороны, *f'(х0)≥0,* что возможно лишь, когда *f'(х0)=0.*

**47.Th Роля**

Пусть ф-ция f(x) удовл. сл. усл.

А)Непрерывна на [a,b]

Б) Дифференц. на (a,b)

В) принимает на коцах отрезков равные значения f(a)=f(b), тогда на (a,b) ∃ т-ка такая что f‘(c)=0, т.е. с-крит. т-ка.

***Док-во***. Р-рим сначала, тривиальный случай, f(x) постоянная на [a,b] (f(a)=f(b)), тогда f‘(x)=0 ∃ x ∈ (a,b), любую т-ку можно взять в кач-ве с. Пусть f≠ const на [a,b], т.к. она непрер. на этом отрезке, то по т-ме Вейерштрасса она достигает своего экстрем. на этом отрезке и max и min. Поскольку f принимает равные знач. в гранич. т-ках, то хотя бы 1- экстр. – max или min обязательно достигается во внутр. т-ке. с∈(a,b) (в противном случае f=const), то по т-ме Ферма, тогда f‘(c)=0, что и требовалось д-ть.

**48.Th Логранжа (формула конечн.приращен)**

Пусть ф-ция f(x) непрер. на отрезке [a,b] и диф. на интервале (a,b), тогда ∀ т. х и x+Δx ∈ [a,b] ∃ т-ка С лежащая между х и х+Δх такая что спаведлива ф-ла (f(x+Δx)-f(x))=f(c)\*Δx (7) => при сравнении с ф-лой приращения ф-ций с диф. заметим, что (7) явл. точной ф-лой, однако теперь пр-ная фолжна считаться в некоторой средней т-ке С «алгоритм» выбора которой неизвестен. Крайнее значение (a,b) не запрещены.

Придадим ф-ле (7) классический вид => x=a x+Δx=b+> тогда ф-ла (7)=(f(b)-f(a))/(b-a)=f‘(c) (7‘) – ф-ла конечных приращений Логранджа.

(f(b)-f(a))/(b-a)=f‘(c) (1)

***Док-во*** сводится к сведению к т-ме Ролля. Р-рим вспом. ф-цию g(x)=f(x)-f(a)-(f(b)-f(a))/(b-a) \* (x-a)

Пусть ф-ция g(x) удовл. всем усл. т-мы Ролля на [a,b]

А)Непрерывна на [a,b]

Б) Дифференц. на (a,b)

В) g(a)=g(b)=0

Все усл. Ролля соблюдены, поэтому ∃ т-ка С на (a,b) g‘(c)=0 g‘(c)=f‘(x)-(f(b)-f(a))/(b-a). Ф-ла (1) наз-ся ф-лой конечных приращений.

**49.Th Коши(обобщенная формула конечн.приращен)**

**Теорема Коши:** Пусть функции *у=f(х) и у=g(х)* неперырвны на отрезке [a,b],дифференцируемы хотя бы в открытом промежутке (a,b) и на этом промежутке g*'(х)* не обращается в нуль. Тогда существует такая точка c ∈ (a,b), что выполняется равенство (1)

Докозательство: Вначале отметим, что знаменатель *g(b)-g(a) ≠ 0*,т.к. из равенства *g(b)=g(a)* следовало бы по теореме Ролля, что производная g*'(х)* обратилась бы в нуль в какой-нибудь точке промежутка (a,b), что противоречит условию g*'(х)≠0*. Образуем вспомогательную функцию:

К ней применима теорема Ролля: F(х) непрерывна в [a,b] и дифференцируема в (a,b) как сумма функций, непрерывных и дифференцируемых в соответствующих промежутках, кроме того, как легко проверить непосредственно, F(a)=F(b)=0. Следовательно, существует точка c ∈ (a,b), , такая, что F'(c)=0. Вычисляем:

Подставляем x=c:



После деления на g'(х) (причем как говорилось раньше g'(х) ≠0), мы приходим к формуле (1)

**50.Усл. монотонности ф-ии по интервалам(монотонной,строгомонот ф-ии)**

**51.Правило Лопиталя (без док-ва,примеры)**

***Раскрытие 0/0***. 1-е правило Лопиталя. Если lim(x→a)f(x)= lim(x→a)g(x), то lim(x→a)f(x)/g(x)= lim(x→a)f‘(x)/g‘(x), когда предел ∃ конечный или бесконечный.

***Раскрытие ∞/∞.*** Второе правило.

Если lim(x→a)f(x)= lim(x→a)g(x)=∞, то lim(x→a)f(x)/g(x)= lim(x→a)f‘(x)/g‘(x). Правила верны тогда, когда x→∞,x→-∞,x→+∞,x→a-,x→a+.

***Неопред-ти вида 0∞, ∞-∞, 0^0, 1^∞, ∞^0***.

Неопр. 0∞, ∞-∞ сводятся к 0/0 и ∞/∞ путем алгебраических преобразований. А неопр.0^0, 1^∞, ∞^0 с помощью тождества f(x)^g(x)=e^g(x)lnf(x) сводятся к неопр вида 0

**52.Стационарные точки (достаточн.усл.экстремума)**

**53.Экстремум ф-ии, недиф. В данной точке.**

Th пусть ф-ия f(x) дифференцируема всюду в некоторой окрестности точки с за исключением,может быть,самой точки с.Тогда, если в пределах указанной окрестности f’(x)>0 слева от точки с и f’(x)<0 справа от точки с,то функция f(x) имеет в точке с локальный максимум.Если f’(x)<0 слева от точки с и f’(x)>0 справа от точки с, то ф-ия имеет в точке с локальный минимум.

Если ф-ия имеет один и тот же знак слева и справа от точки с, то экстремума в точке с нет.

(док-во такое же как в вопросе «Стационарные точки, первое достаточное условие локального экстремума)

**54.Два достаточных условия экстремума.**

**55.Направление выпуклости ф-ии (опр,признаки)**

Опр. Ф-ция явл. выпуклой (вогнутой) на (a,b) если кассат. к граф-ку ф-ции в любой т-ке интервала, лежит ниже (выше) гр. ф-ции.

y=y0+f‘(x0)(x-x0)=f(x0)+f‘(x0)(x-x0) – линейная ф-ция х, который не превосходит f(x) и не меньше f(x) в случае вогнутости неравенства хар-щие выпуклость (вогнутость) через диф. f(x)≥f(x0)+ f‘(x0)(x-x0) ∀ x,x0∈(a;b) f вогнута на (а,b). Хорда выше (ниже), чем график для вып. ф-ций (вогн.) линейная ф-ция kx+b, в частности постоянна, явл. вып. и вогнутой.

**56.Точки перегиба графика ф-ии(опр,признаки)**

Опр. Т-ки разд. интервалы строгой выпуклости и строгой вогнутости наз-ся т-ми перегиба т. х0 есть т-ка перегибы, если f‘‘(x0)=0 и 2-я пр-ная меняет знак при переходе через х0=> в любой т-ке перегиба f‘(x) имеет локальный экстремум.

Геометр. т-ка перегиба хар-ся тем что проведенная касат. в этой т-ке имеет т-ки графика по разные стороны.

**57.Достаточное усл. Точек перегиба**

**58.Ассимптоты графика: вертика, гор, накл. Геом смысл накл ассимптоты.**

В некоторых случаях, когда график ф-ии имеет бесконечные ветви, оказывается, что при удалении точки вдоль ветви к бесконечности, она неограниченно стремится к некоторой прямой. Такие прямые называют асимптотами.

.Вертикальные асимптоты – прямая  называется вертикальной асимптотой графика ф-ии  в точке *b* , если хотя бы один из разносторонних пределов равен бесконечности.

Если ф-ия задана дробно-рациональным выражением, то вертикальная асимптота появляется в тех точках, когда знаменатель равен нулю, а числитель не равен нулю.

\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*

Наклонная асимптота – прямая  наклонная асимптота ф-ии , если эта ф-ия представлена в виде 

Необходимый и достаточный признак существования наклонной асимптоты:

Для существования наклонной асимптоты  к графику ф-ии  необходимо и достаточно существование конечных пределов:

Доказательство: Пусть:



Пусть:



Следовательно существует асимптота.