Курсовая работа

**"Представления конечных групп"**

**Содержание**

Основные обозначения

Введение

1. Представления конечных групп

# 1.1 Представления групп

# 1.2 Представления унитарными матрицами и полная приводимость представлений конечных групп

# 1.3 Лемма Шура

# 1.4 Соотношения ортогональности для характеров

# 1.5 Индуцированные представления

# 1.6 Произведение представлений

Заключение

Список использованных источников

**Основные обозначения**

|  |
| --- |
| – группа |
| – порядок группы |
| – единичный элемент группы |
| – единичная подгруппа, единичная группа |
| – множество всех простых делителей натурального числа |
| – множество всех простых делителей порядка группы |
| – центр группы |
| – подгруппа Фиттинга группы |
| – подгруппа Фраттини группы |
| – коммутант группы |
| – централизатор подгруппы  в группе |
| – нормализатор подгруппы  в группе |
| – группа всех автоморфизмов группы |
| – группа всех внутренних автоморфизмов группы |
| - является подгруппой группы |
| –  является собственной подгруппой группы |
| –  является максимальной подгруппой группы |
| –  является нормальной подгруппой |
| –  является субнормальной подгруппой группы |
| –  является минимальной нормальной подгруппой группы |
| – индекс подгруппы  в группе |
| – прямое произведение подгрупп  и |
| – полупрямое произведение нормальной подгруппы  и подгруппы |

**Введение**

В данной работе приведены доказательства следующих теорем:

**Теорема.** *Непустое подмножество  группы  будет подгруппой тогда и только тогда, когда  и  для всех *.

*Группой* называется непустое множество  с бинарной алгебраической операцией (умножением), которая удовлетворяет следующим требованием:

1) операция определена на , т.е.  для всех ;

2) операция ассоциативна, т.е.  для любых ;

3) в  существует единичный элемент, т.е. такой элемент , что  для всех , что  для всех ;

4) каждый элемент обладает обратным, т.е. для любого  существует такой элемент , что .

Более кратко: полугруппа с единицей, в которой каждый элемент обладает обратным, называется *группой*.

Группу с коммутативной операцией называют *коммутативной* или *абелевой*. Если  – конечное множество, являющиеся группой, то  называют *конечной группой*, а число  элементов в  – *порядком группы* .

Подмножество  группы  называется *подгруппой*, если  – группа относительно той же операции, которая определена на . Запись  означает, что – подгруппа группы , а  – что – собственная подгруппа группы , т.е.  и .

**Централизатор**. Пусть  – непустое подмножество группы . Совокупность всех элементов группы , перестановочных с каждым элементом множества , называется *централизатором множества  в группе*  и обозначается через .

**Лемма**

1. Если  – подмножество группы , то централизатор  является подгруппой.

2. Если  и  – подмножество группы  и , то 

3. Если  – подмножество группы  и , то 

**Центр группы**. *Центром группы * называется совокупность всех элементов из , перестановочных с каждым элементом группы. Центр обозначается через . Ясно, что , т.е. центр группы  совпадает с централизатором подмножества  в группе . Кроме того, .

Зафиксируем в группе  элемент . Пересечение всех подгрупп группы , содержащих элемент , назовем *циклической подгруппой, порожденной элементом *, и обозначим через .

**Теорема.** *Циклическая подгрупппа , порожденная элементом , состоит из всевозможных целых степеней элемента , т.е. *

Следствие. *Циклическая подгруппа абелева.*

**Порядок элемента.** Пусть  – элемент группы . Если все степени элемента  различны, т.е.  для всех целых , то говорят, что элемента  имеет *бесконечный порядок*.

**Нормализатор**. Если  – непустое подмножество группы  и  то  и  Элемент  называется *перестановочным с подмножеством* , если . Равенство  означает, что для любого элемента  существует такой элемент , что . Если элемент  перестановочен с подмножеством , то  и . Совокупность всех элементов группы , перестановочных с подмножеством , называется *нормализатором подмножества  в группе*  и обозначается через . Итак,



**Лемма.** *Пусть  – непустое подмножество группы ,  – произвольный элемент группы . Тогда:*

1) ;

2) ;

3) ;

4) ;

5) если  – подгруппа группы , то 

Подгруппа  называется *нормальной подгруппой* группы , если  для всех . Запись  читается: » – нормальная подгруппа группы «. Равенство  означает, что для любого элемента  существует элемент  такой, что .

**Теорема.** *Для подгруппы  группы  следующие утверждения эквивалентны:*

1) – нормальная подгруппа;

2) подгруппа  вместе с каждым своим элементом содержит все ему сопряженные элементы, т.е.  для всех ;

3) подгруппа  совпадает с каждой своей сопряженной подгруппой, т.е.  для всех .

**Лемма.** *Пусть  – подгруппа группы . Тогда:*

1) ;

2) если  и , то ;

3)  – наибольшая подгруппа группы , в которой  нормальна;

4) если , то . Обратно, если , то ;

5)  для любого непустого подмножества  группы .

**Простая группа**. В каждой группе  тривиальные подгруппы (единичная подгруппа  и сама группа ) являются нормальными подгруппами. Если в неединичной группе  нет других нормальных подгрупп, то группа  называется *простой*. Единичную группу  считают непростой.

**Представления конечных групп**

# **1.1 Представления групп**

Пусть  – группа всех невырожденных матриц порядка  над полем  комплексных чисел. Если  – произвольная группа, то ее (матричным) *представлением* называется любой ее гомоморфизм в 

G,

такой, что

,

 (единичная матрица),

. Число n называется *степенью* этого представления. Если гомоморфизм **A** иньективен, то представление называется *точным*.

**Пример 1.1** Отображение, переводящее каждый элемент группы  в , является представлением степени . Оно называется *тождественным представлением* группы  и обозначается через .

**Пример 1.2** Если  – некоторое представление группы , то для каждой невырожденной матрицы  отображение  также является представлением этой группы.

Пусть  и  – два представления группы . Если существует невырожденная матрица , такая, что что

,

то представления  и  называются *эквивалентными*. Тот факт, что представления  и  эквивалентны, мы будем обозначать так: . Отношение **** определяет *классы эквивалентных представлений* группы .

**Пример 1.3.** Пусть  – симметрическая группа степени . Для элемента



через  обозначим матрицу,  строка которой имеет вид , где 1 стоит на  месте. Другими словами,



где



Такое отображение  является точным представлением группы .

1.4. Пусть –конечная группа, состоящая из элементов  и пусть – симметрическая группа на . Отображение, которое ставит в соответствие элементу  подстановку



является инъективным гомоморфизмом группы  в . С такой подстановкой  мы свяжем матрицу



где, как и в примере ,



Тогда отображение  является точным представлением группы . Оно называется *правым регулярным представлением* этой группы. Определим  следующим образом:



Тогда



и, если , то каждый диагональный элемент равен нулю.

регулярное представление группы  определяется аналогично с использованием гомоморфизма



Другими словами,



Пусть  – некоторый гомоморфизм из  в , т.е. подстановочное представление группы . Представив подстановку  в виде матрицы , как это сделано в примере 1.3, мы получим представление 

Пусть  – представление степени . Говорят, что  *приводимо,* если существует такая невырожденная матрица , что



где  и  – квадратные матрицы порядка  и  соответственно, причем  Отметим, что представления





эквивалентны, поскольку для матрицы



Скажем, что представление  *неприводимо,* если оно не является приводимым. Отметим, что в (1.3) отображения  и  являются представлении степеней  и  соответственно.

Для заданных представлений  и  группы  степеней  и  соответственно отображение



является представление степени  этой группы. Такое, представление называется *прямой суммой* представлений  и  и обозначается через .

Представление  группы  называется *вполне приводимым,* если оно эквивалентно прямой сумме некоторых неприводимых представлений, т.е. если найдется невырожденная матрица , такая, что



где каждое  является неприводимым представлением группы .

# **1.2 Представления унитарными матрицами** **и полная приводимость представлений конечных групп**

Представление  группы  называется *унитарным,* если для всех  матрица  является унитарной, т.е. . Здесь  обозначает матрицу, транспонированную к , где , а  – величина, комплексно – сопряженная к . В этом параграфе мы покажем, что каждое представление конечной группы эквивалентно некоторому ее унитарному представлению и является мполне приводимым.

Матрица  называется *эрмитовой,* если , и *положительно определенной,* если  для каждого ненулевого столбца . Следующая лемма тривиальна.

**Лемма 2.1.** *Пусть  – произвольная невырожденная матрица. Тогда – положительно определенная эрмитова матрица. Кроме того, сумма положительно определенных эрмитовых матриц также является положительно определенной эрмитовой матрицей.*

**Лемма 2.2.** *Для любой положительно определенной эрмитовой матрицы  найдется невырожденная верхнетреугольная матрица , такая, что .*

Доказательство. Пусть . Тогда  и . Пусть

.

Положим



Тогда



и  – положительно определенная эрмитова матрица. Для завершения доказательства достаточно воспользоваться индукцией по порядку матрицы .

**Теорема 2.3.** *Пусть  – конечная группа. Для каждого представления  группы  найдется невырожденная верхнетреугольная матрица , такая, что  является унитарной матрицей для всех .*

Доказательство. Положим



Тогда в силу леммы 2.1  является положительно определенной эрмитовой матрицей. Таким образом, найдется невырожденная верхнетреугольная матрица , такая, что  и поэтому . Так как



то , т.е. ; поэтому – унитарная матрица.

**Теорема 2.4.** *Каждое представление конечной группы вполне приводимо.*

Доказательство. Пусть – приводимое представление конечной группы , и пусть  разлагается следующим образом:



В силу предыдущей теоремы существует невырожденная матрица , такая, что  – унитарная матрица. Так как  верхнетреугольная, то  имеет вид



Поскольку , мы получаем



откуда следует, что .

# **1.3 Лемма Шура**

**Лемма 3.1.** (Лемма Шура.) *Пусть  и  – неприводимые представления группы  степеней  и  соответсвенно. Пусть  – такая  – матрица, что*



Тогда либо

,

либо

 и  невырожденная.

Доказательство. Допустим, что . Покажем, что тогда имеет место . Предположим, что либо , либо  и  вырожденна. Тогда существуют матрицы  и , такие, что



где . Так как , то



где





Таким образом, , если , и , если . В любом случае  или  приводимо, что противоречит условию.

**Теорема 3.2.** *Пусть  – неприводимое представление группы . Пусть  – такая матрица, что  для всех . Тогда , где .*

Доказательство. Пусть  – некоторое собственное значение матрицы . Тогда , а, кроме того,



откуда в силу леммы Шура следует, что 

**Теорема 3.3.** *Пусть  – абелева группа. Тогда каждое ее неприводимое представление имеет степень* 1*.*

Доказательство. Пусть  – неприводимое представление группы . Поскольку  коммутирует с каждой матрицей , из предыдущей теоремы следует, что , где . Поскольку  неприводимо, отсюда вытекает, что его степень равна 1.

# **1.4 Соотношения ортогональности** **для характеров**

Ниже везде предполагается, что рассматриваемые группы конечны.

**Характеры.** Для квадратной матрицы  порядка  обозначим через  ее *след*, т.е.



Путем прямых вычислений доказывается следующая

**Лемма 4.1.**



 *для произвольной квадратной матрицы *.

Для представления  группы  положим  Тогда  – функция, принимающая значения в множестве  и называемая *характером* представления . Очевидно, что  равно степени представления . Характеры неприводимых представлений называются *неприводимыми характерами*. Из леммы 4.1 (2) вытекает следующая

**Лемма 4.2.** *Эквивалентные представления имеют один и тот же характер*.

Поскольку , имеет место равенство . Таким образом,  принимает одно и то же значение на всем классе сопряженных элементов группы . Такие функции называются *функциями классов*.

**Первое соотношение ортогональности для характеров.** Пусть  – группа порядка , а  и  – ее неприводимые представления степеней  и  соответственно. Для произвольной  – матрицы  пусть



Тогда, положив , получаем



Поскольку , как и , пробегает группу , то



Предположим, что  и  неэквивалентны. Тогда в силу леммы Шура . Отсюда для -го элемента матрицы  получаем



В частности, если взять  для некоторой пары  и  в остальных случаях, то



Пусть теперь . Тогда в силу теоремы 3.2  для некоторого . При этом -ый элемент матрицы  равен



где  и  для . Вычислив след матрицы



мы получаем  (здесь  – степень представления ), откуда



Пусть  для некоторой пары  и , если  или . Тогда



Тем самым мы получаем следующее утверждение.

**Теорема 4.3.** *Пусть – группа порядка* g*.*

(1) *Пусть  – неприводимое представление группы  степени . Тогда*



(2) Пусть  – неприводимое представление, не эквивалентное представлению . Тогда



Пусть  – характеры представлений  и . Положив в предыдущей теореме  и просуммировав по , мы получаем теорему.

**Теорема 4.4.** (Первое соотношение ортогональности для характеров.) *Пусть  – группа порядка* g.

(1) *Если  – неприводимый характер группы , то*



(2) Если  – характеры неэквивалентных неприводимых представлений группы , то



Отметим, что  для всех , поскольку теорема 2.3 утверждает, что  эквивалентно некоторому унитарному представлению  и потому



Пусть  – представители классов эквивалентности неприводимых представлений группы  и  – характеры представлений . Обозначим через  классы сопряженных элементов группы , причем , и пусть  – представители этих классов. Поскольку характеры – это функции классов, теорема 4.4 может быть переписана в следующем виде.

**Теорема **. 

Для функций , определенных на группе  порядка  и принимающих значения в поле , определим *скалярное произведение*  по следующему правилу:



В случаях, когда ясно, о какой группе идет речь, мы иногда вместо  будем писать . Очевидно, что скалярное произведение является симметричной билинейной формой:





В этих обозначениях первое соотношение ортогональности для характеров можно сформулировать так:

**Теорема **. *Пусть  – характеры попарно неэквалентных неприводимых представлений группы . Тогда *

**Кратности неприводимых представлений.** Пусть  – некоторое представление группы . Поскольку оно вполне приводимо в силу теоремы 2.3, оно эквивалентно представлению



где  – неэквивалентные неприводимые представления. Число  называется *кратностью* представления  в , и мы записываем



Пусть  – характер представления  и  – характер представления . Тогда



Если , то  и  называют *неприводимыми компонентами* представления  и характера  соответственно.

**Теорема 4.5.** *Пусть  – группа и  – характер некоторого ее представления. Пусть  – кратность неприводимого характера  в . Тогда*



Доказательство. Пусть разложение  в сумму неприводимых характеров имеет вид , где  – кратность . Тогда



**Теорема 4.6.** *Пусть  – представления группы , а  – их характеры. Тогда  и  эквивалентны в том и только том случае, когда .*

Доказательство. В силу предыдущей теоремы кратности компоненты  в  и  определяются характерами последних. Поскольку каждое представление группы  вполне приводимо, представления  и  эквивалентны тогда и только тогда, когда каждое неприводимое представление  имеет в  и  одну ту же кратность. Таким образом,  тогда и только тогда, когда .

Пусть  – характер правого регулярного представления группы  порядка . Отметим, что



Для характера  произвольного неприводимого представления  выполняется соотношение



 равно степени представления ). Следовательно, справедлива следующая

**Теорема 4.7.** *Пусть  – характер правого регулярного представления группы . Тогда каждое неприводимое представления  этой группы входит в  с кратностью , где  – степень представления . Таким образом,*



где суммирование ведется по всем неприводимым характерам  группы .

Заметим, что правое и левое регулярные представления эквивалентны, поскольку характер  левого регулярного представления также удовлетворяет равенству (4.8). Поэтому .

Теорема 4.7 утверждает, что каждый неприводимый характер входит в  в качестве компоненты, и поэтому  имеет лишь конечное число неприводимых характеров. Ниже мы покажем, что число неприводимых характеров группы  совпадает с числом ее классов сопряженных элементов.

**Теорема 4.8.** *Пусть  – полный набор различных неприводимых характеров группы . Пусть  – степень , а  – порядок группы . Тогда*



и



для .

Для доказательства достаточно вычислить  на элементе , используя (4.8).

**Второе соотношение ортогональности для характеров.** Пусть  – группа, а  – ее классы сопряженных элементов. Образуем формальную сумму элементов из класса :



Определим произведение  и  по правилу



где , а суммирование ведется по . Для элемента  обозначим через  число пар , таких, что . Тогда для  имеется в точности  пар , таких, что , поскольку  тогда и только тогда, когда  для . Поэтому каждый элемент из  появляется в правой части равенства (4.9) одно и то же число раз, т.е.



Совокупность всех элементов  для  также образует класс сопряженных элементов. Обозначим этот класс через .

Тогда



Пусть  – неприводимое представление группы  и  – степень . Определим  по правилу



Тогда



поскольку  пробегает , как и . Значит,  коммутируют с  и в силу теоремы 3.2



Взяв след от обеих частей равенства (4.12), мы получим



где  – характер представления  и . В силу (4.10)



Подставив в это равенство (4.13), мы придем к равенству



или



Пусть  – все различные неприводимые характеры группы  и  – степень . Равенство (4.14) имеет место для каждого . Просуммировав (4.14) по , получим







Отсюда



Величина  равна порядку централизатора  элемента  в группе . Поскольку в силу (4.5) , мы получаем следующее утверждение.

**Теорема 4.9.** (Второе соотношение ортогональности для характеров.) *Пусть  – множество всех различных неприводимых характеров группы , и пусть  – полный набор представителей классов сопряженных элементов группы . Тогда*



где  – порядок  и суммирование ведется по всем неприводимым характерам  группы .

**Теорема 4.10.** *Число различных неприводимых характеров группы  равно числу ее классов сопряженных элементов.*

Доказательство. Мы воспользуемся следующим простым фактом, касающимся матриц. Пусть  есть  – матрица, а  есть  – матрица. Если определитель квадратной матрицы , имеющий порядок , отличен от нуля, то .

Пусть  – все различные неприводимые характеры группы , а  – полный набор представителей классов сопряженных элементов этой группы. Тогда по теореме 



Поэтому . В силу теоремы 4.9



Отсюда следует, что  и потому .

# **1.5 Индуцированные представления**

Пусть  – группа и  – ее подгруппа. Обозначим через  и  порядки групп  и  соответственно. Если  – некоторая функция на , то через  обозначим ее ограничение на . В случае когда  – функция классов на ,  также является функцией классов на . Если  – характер некоторого представления  группы , то  представляет собой характер ограничения  представления  на .

По функции , заданной на , определим функцию  на  правилом



полагая  для , не принадлежащих . Отметим, что  является функцией классов на , даже еслм  не является функцией классов на . Если  не сопряжен ни с каким элементом из , то .

**Лемма 5.1.** *Пусть  – функция классов на группе , а  – функция классов на подгруппе  группы . Тогда*



Доказательство. Имеем



Вклад в сумму дают лишь такие пары , что . Поэтому, суммируя по тем парам , для которых  при некотором , получаем







Если  – характер некоторого представления группы , то назовем  *индуцированным характером* группы  и скажем, что  индуцирован с . Мы хотим показать, что каждый индуцированный характер действительно является характером некоторого представления группы .

Пусть  – множество представителей левых смежных классов группы  по :



Для представления  подгруппы  определим матрицу  так:



где для , не содержащихся в , полагаем . Это обобщение правого регулярного представления группы . Мы покажем, что



– представление группы  степени , где , а  – степень . При фиксированных  и  множество  содержит по одному представителю из каждого левого смежного класса по , поэтому среди матриц , лишь одна ненулевая. Аналогично, множество  содержит по одному представителю из каждого правого смежного класса по  и среди матриц , также лишь одна ненулевая. Обозначим -й блок матрицы  через . Тогда



Покажем, что . Имеется единственное число , такое, что , и единственное число , такое, что . Если , то . Если же , то  и , поскольку . В любом случае  и следовательно, . Поскольку , матрица  невырожденна. Таким образом  является представлением группы .

Пусть  – характер , а  – характер . Тогда





Тем самым мы получим . Назовем  *индуцированным представлением* группы  и будем говорить, что  индуцировано с . Сказанное суммирует следующая

**Теорема 5.2.** *Пусть  – группа и  – ее подгруппа. Пусть  – представление  степени , а  – его характер. Тогда индуцированное представление  имеет степень , где , и характер*



**Теорема 5.3.** (Закон взаимности Фробениуса.) *Пусть  – подгруппа в . Пусть  – полный набор неприводимых характеров группы , а  – полный набор неприводимых характеров группы . Тогда*



в том и только том случае, когда



Другими словами, если  – неприводимое представление группы , а  – неприводимое представление , то  является неприводимой компонентой в  кратности  тогда и только тогда, когда  является неприводимой компонентой в  кратности .

Доказательство. Пусть  и . В силу леммы 5.1



# **1.6 Произведение представлений**

Пусть  – квадратные матрицы порядков  и  соответственно, и пусть . Определим *кронекерово*, или *тензорное*, произведение  матриц  и  следующим образом:



Значит,  представляет собой квадратную матрицу порядка . Непосредственными вычислениями устанавливается следующая

**Лемма 6.1.**

(1) ,

(2) *если  имеют степень , a  – степень , то *

Пусть  и  – представления группы . Тогда в силу леммы 6.1 (2) отображение



также является представлением этой группы. Такое представление называют *произведением* представлений  и обозначают через . Пусть  – характеры представлений  соответственно. По лемме 6.1 (1)



Пусть  – полный набор неприводимых представлений группы , а  – характер . Отображение  также является неприводимым, и его характер – это , где . Пусть .

**Теорема 6.2.** *Равенство*



имеет место тогда и только тогда, когда



Доказательство.





Таким образом, кратность вхождения  в  равна кратности вхождения  в 

**Теорема 6.3.** *Пусть  – точное представление группы  и  – его характер. Пусть  – число различных значений, которые принимает  на . Тогда каждое неприводимое представление группы  входит в*



для некоторого , где .

Доказательство. Предположим, что неприводимое представление  не входит в . Пусть  – характеры  и  соответственно. Тогда



для . Пусть  принимает на  значение . Положим  и . В силу (6.1)



для  Рассмотрим (6.2) как систему линейных уравнений для . Поскольку , эта система имеет решение .

Пусть  – степень представления , т.е. . Мы можем считать, что . Покажем, что . Пусть , т.е. . Обозначим через  циклическую группу, порожденную элементом . По теореме 3.3  эквивалентно прямой сумме представлений степени 1. Значит, для некоторой невырожденной матрицы 



Пусть  – порядок элемента . Тогда . Взяв след в равенстве (6.3), получаем . Это означает, что , т.е. . Плскольку  точно, . Поэтому  и . Полученное противоречие доказывает теорему. 

**Таблицы характеров.** Пусть  – группа и  – классы сопряженных элементов в . Пусть  – нерпиводимые характеры группы , а  – представители ее классов сопряженных элементов. Отметим, что в силу теоремы 4.10 число неприводимых характеров совпадает с числом классов сопряженности. Упорядочим значения  таким образом, чтобы получить *таблицу характеров* группы , в которой строки помечены различными неприводимыми характерами, начиная с , а столбцы – классами сопряженности группы , начиная с класса .

Различные строки таблицы характеров ортогональны между собой в смысле теоремы , а в силу теоремы 4.9 столбцы ортогональны между собой в обычном смысле как векторы комплексного унитарного пространства.

Заключение

Таким образом, в данной работе мы показали, что каждое представление конечной группы эквивалентно некоторому ее унитарному представлению и является мполне приводимым.

Путем прямых вычислений доказали лемму:



 *для произвольной квадратной матрицы * и теорему: *Пусть  – группа и  – ее подгруппа. Пусть  – представление  степени , а  – его характер. Тогда индуцированное представление  имеет степень , где , и характер*



Непосредственными вычислениями была устанавлена следующая лемма: ,

(2) *если  имеют степень , a  – степень , то *

**Список использованных источников**

Сыскин С.А. Абстрактные свойства простых спорадических групп. – Усп. мат. наук, 1980, т. 35, №5, (215), с. 181–212.

Монахов В.С. О трижды факторизуемых группах. – Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1981, №6, с. 18–23.

Монахов В.С. Произведение разрешимой и циклической групп // Сб. VI всес. симпозиум по теории групп.-Киев: Наукова думка, 1980-с. 189–195

Монахов В.С. О произведении двух групп с циклическими подгруппами индекса 2 // Весцi АН Беларусi. сер. фiз.-мат. навук. – 1996, №3-с. 21–24