Реферат

## на тему:

Ймовірнісний зміст

нерівності Йєнсена.

Нові інформаційні технології в освіті неможливі без нової інформації в конкретних навчальних дисциплінах. В останні роки невпинно зростає кількість прихильників виховання ймовірнісного світогляду школярів і студентів, що вивчають математичні дисципліни. При цьому дуже важливу роль відіграють приклади проникнення ймовірнісних ідей, методів і результатів у неймовірнісні розділи математики. Про один з таких прикладів йде мова у цій роботі.

Нерівністю Йєнсена в математиці називають нерівність:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (1) |

де  - опукла на проміжку  функція, а  - довільні числа з цього проміжку, при цьому нерівність перетворюється в рівність у випадках, коли  і коли  - лінійна функція. Якщо функція угнута в , то нерівність Йєнсена записують так:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (2) |

де  - середнє арифметичне чисел ;  - середнє арифметичне чисел  . В загальному вигляді нерівність Йєнсена містить замість середніх арифметичних середні зважені. Тобто

|  |  |
| --- | --- |
| , | (3) |
| , | (4) |
| де  і | (5) |

Треба підкреслити, що нерівність Йєнсена має багато важливих застосувань [1-5]. Зауважимо, що в дискретній формі нерівність була встановлена О.Гельдером (Hölder, 1889), а інтегральна нерівність – Й.Йєнсеном (Jensen, 1906).

Інтегральну нерівність для угнутої функції записують так:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (6) |
| де  на  і . | (7) |

Нагадаємо, що функція  називається опуклою (угнутою) в , якщо

|  |  |
| --- | --- |
| , | (8) |
|  | (9) |

для довільних ,   ; при цьому рівність у співвідношеннях досягається у випадках, коли  і коли  - лінійна функція.

Треба зауважити, що є різні способи доведення (обґрунтування) нерівності Йєнсена. Так, в [1, 2] використовується метод Коші; доведення в [3] спирається на фізичне поняття центра мас системи матеріальних точок; в [4] нерівність Йєнсена отримана з формули Тейлора за умови, що функція  має в  другу похідну; в [5] запропоновано доведення нерівності Йєнсена при умові, що опукла (угнута) в  функція  диференційована в цьому проміжку.

Цікаво встановити ймовірнісний зміст нерівності Йєнсена. Зрозуміло, що ми маємо справу з випадковими величинами вже в означеннях для опуклої (8) та угнутої (9) функцій. Фактор випадковості обумовлений довільністю вибору точок ,  на проміжку . Таким чином, можна вважати , що  - випадкова величина,  - функція випадкового аргумента. При цьому для вибірки без повторень з об'ємом  дискретний розподіл має вигляд:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | (10) |
|  |  |  |  |  |

З точки зору теорії ймовірностей в означеннях (8) і (9) порівнюються математичне сподівання (вибіркове середнє) функції і значення функції від математичного сподівання аргумента (рис.1).

|  |
| --- |
|  |
| Рис.1. До означення опуклої (а) та угнутої (б) функцій. |

Для опуклої функції будь-яка точка дуги  розташована вище відповідної точки хорди , для угнутої функції – навпаки. Якщо функція  лінійна, то математичне сподівання функції співпадає з функцією математичного сподівання випадкового аргумента, а точка  відповідає середині відрізка . Таким чином, рівність у співвідношеннях (8) і (9) досягається у двох випадках: коли  і коли  - лінійна функція. У роботі [5] другий випадок лишився поза увагою автора. Будь-яка нелінійність порушує пропорційну залежність між  і . Так, для опуклої функції  збільшується множина значень, які перевищують , для угнутої функції – навпаки. Це вагомий аргумент на користь кусково-лінійної інтерполяції функцій. З точки зору фізики це означає, що для опуклої дуги  центр ваги матеріальних точок  і  завжди лежить під дугою. Ця властивість центра ваги двох матеріальних точок виконується для будь-якого числа  матеріальних точок, що лежать на опуклій кривій . В цьому випадку крива  апроксимується сукупністю прямолінійних відрізків, і ми одержуємо шукане узагальнення.

Дискретний розподіл для вибірки без повторень з об'ємом  має вигляд:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | ... |  |
|  |  |  | ... |  |
|  |  |  | ... |  |

Математичне сподівання аргументу визначається так:



Математичне сподівання функції

.

Зрозуміло, що в цьому випадку краще скористатися процедурою групування вибірки і, спираючись на попередній результат, довести нерівність Йєнсена для опуклої (1) та угнутої (2) функцій.

Перейдемо до вибірки з повтореннями. Нехай значення аргументу  повторюється  разів, а  -  разів,  - об'єм вибірки. Дискретний розподіл має вигляд:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Тут  і  - відносні частоти повторень значень  і .

Нерівність Йєнсена в цьому випадку має вигляд:

|  |  |
| --- | --- |
| для опуклої функції , | (11) |
| для угнутої функції ,  де  і . | (12) |

Рівність в (11) і (12) досягається коли , а також коли  - лінійна функція, причому другий випадок є найбільш змістовним. Якщо , нерівність Йєнсена виконується за означенням опуклої (8) і угнутої (9) функції. Цікаво з'ясувати, що зміниться у ймовірнісній схемі доведення нерівності Йєнсена, якщо . В лівих частинах нерівностей (11) і (12) під знаком  стоїть математичне сподівання випадкового аргумента:

,

в правих частинах маємо математичне сподівання функції випадкового аргумента:

.

Порівнюючи математичне сподівання функції випадкового аргумента і значення функції від математичного сподівання аргумента, неважко встановити, що (11) і (12) – це узагальнені означення опуклої і угнутої функції відповідно (рис.2).

|  |
| --- |
|  |
| Рис.2. Узагальнення означення опуклої (а) та угнутої (б) функцій . |

Цей випадок відрізняється від симетричного  лише тим, що точка  не співпадає із серединою відрізка , тому що математичне сподівання аргумента визначається не арифметичним середнім, а зваженим середнім, де ,  - вагові коефіцієнти. При цьому зберігається пропорція у приростах аргументу і лінійної на  функції:

.

Будь-яка нелінійність порушує пропорцію у приростах функції. Математичному сподіванню аргумента  тепер відповідає значення функції , і якщо функція  опукла, то , а для угнутої – навпаки . З фізичної точки зору розглянутий випадок означає, що маси матеріальних точок  і  неоднакові. Така дискретизація застосовується при визначенні координат центра ваги неоднорідного стержня. Тепер, спираючись на узагальнені означення опуклої (11) і угнутої (12) функцій, неважко довести нерівність Йєнсена з математичними сподіваннями (3) і (4). При цьому дискретний розподіл має вигляд:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | ... |  |
|  |  |  | ... |  |
|  |  |  | ... |  |

Відносні частоти , , , причому не всі  рівні між собою. Вибірку зручно розбити на групи (краще по дві варіанти), визначити для кожної групи середні зважені значення абсцис і ординат вузлових точок. Якщо  на  опукла (угнута), то всі нерівності Йєнсена на проміжках   мають однаковий зміст. Об'єднуючи відрізки в ансамбль і виконуючи усереднення групових середніх, отримаємо кінцевий результат, який полягає у тому, що точка з координатами  лежить нижче дуги кривої (якщо функція  опукла) або вище дуги (якщо функція угнута).

Інтегральна нерівність Йєнсена (6) може бути доведена за допомогою граничного переходу в дискретній нерівності. або узагальненої теореми про середнє в інтегральному численні. Нам лишається навести ймовірнісний коментар до формули (6). Варто звернути увагу на те, що в формулах (6) і (7) функція  має властивості щільності розподілу випадкової величини . В лівій частині (6) під знаком  записано математичне сподівання випадкової величини , що розглядається на проміжку :

.

В правій частині (6) маємо математичне сподівання функції  випадкового аргумента :

.

До речі, в математичному аналізі до цих самих результатів приводить узагальнена теорема про середнє в інтегральному численні. Важливо підкреслити, що при будь-якому законі розподілу ймовірностей  точка . Точка  належить хорді, що з'єднує кінці дуги  і , тому для опуклої функції

,

для угнутої

.

В теорії ймовірностей такий незбіг функції середнього і середнього функції називають "парадоксом оцінювання" [6]. Дослідження парадоксів – кращий спосіб досягти взаєморозуміння фахівців в різних областях науки. Спроби вивчати будь-яку область математики за допомогою парадоксів допомагають розвинути справжню інтуїцію, а ймовірнісні підходи сприяють зворотньому руху [7] конструктивних ідей із теорії ймовірностей до математичного аналізу та інших розділів математики.

**Використана література**

1. *Невяжский Г.Л.* Неравенства. Пособие для учителей. – М.: ГУПИ МП РСФСР, 1947.
2. *Каплан Я.Л.* Математика. Посібник для підготовки до конкурсних екзаменів до вузів. – К.: Вища школа, 1971.
3. *Ижболдин О., Курляндчик Л.* Неравенство Иенсена // Квант. №5. – М.: Наука, 1990. – С.57-62.
4. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. – М.: Мир, 1965.
5. *Вороний О.* Нерівність Йєнсена // У світі математики. – Т.6. – Вип.2. – К.: "ТВІМС", 2000. – С.9-13.
6. *Секей Г.* Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. – М.: Мир, 1990.
7. *Скороход А.В.* Особливий характер теорії ймовірностей в математичних науках // У світі математики. – Т.3. – Вип.2 – К.: "ТВІМС", 1997. – С.2-4.