Нескінченно малі та нескінченно великі величини

Зміна величина х називається нескінченно малою, якщо в процесі її зміни наступить такий момент, починаючи з якого, абсолютна величина змінної х стає і залишається менше будь-якого, скільки завгодно малого, наперед загаданого додаткового числа , тобто |х| < .

Нескінченно малі величини найчастіше позначають літерами .

Наприклад, величина при n 🡪 є нескінченно малою.

Нескінченно мала величина є змінною величиною. Але, якщо постійну величину О розглядати як змінну величину, що приймає одне й те ж значення, то в цьому розумінні вона є нескінченно малою, тобто  = 0, то нерівність || <  виконується для будь-якого  > 0 .

Жодну іншу постійну величину, якою би малою вона не була (наприклад, розмір електрона), не можна назвати нескінченно малою.

Розглянемо деякі властивості нескінченно малих величин.

Теорема 1. Алгебраїчна сума будь-якого скінченого числа нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.

Доведення. Нехай задано k нескінченно малих величин . Доведемо, що їх алгебраїчна сума буде величиною нескінченно малою. Візьмемо скільки завгодно мале  > 0. Згідно з означенням нескінченно малих в процесі їх зміни наступить такий момент, починаючи з якого будуть виконуватися нерівності:



Звідси, використовуючи властивості модуля, одержимо:



Отже, маємо: 

Ця нерівність, згідно із означенням 11, означає, що є нескінченно малою величиною. Теорема доведена.

Теорема 2. Добуток обмеженої величини на нескінченно малу величину є величина нескінченно мала.

Доведення. Нехай у – обмежена величина, - нескінченно мала. Для обмеженої величини у існує таке число М, що . Згідно з означенням нескінченно малої в процесі змінювання  наступить такий момент, починаючи з якого буде виконуватися нерівність  для будь-якого . Тому, починаючи з деякого моменту, буде використовуватись нерівність



Ця нерівність означає, що  є величиною нескінченно малою, що і треба було довести.

Наслідок 1. Добуток постійної величини на нескінченно малу є величина нескінченно мала.

Наслідок 2. Добуток скінченної кількості нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.

Дійсно, постійно та нескінченно малі величини – обмежені величини, тому для них має місце твердження теореми 2.

Змінна величина х називається нескінченно великою, якщо в процесі її зміни наступить такий момент, починаючи з якого абсолютна величина х стає і залишається більше будь-якого, скільки завгодно великого, наперед загаданого додатного числа N , тобто |x| > N.

Наприклад, величина 10n при n 🡪  є величина нескінченно велика.

Між нескінченно великими і нескінченно малими величинами існує простий зв’язок: якщо х нескінченно велика величина, то  - нескінченно мала, і навпаки, якщо у – нескінченно мала і у ≠ 0, то  буде нескінченно великою величиною.

Тому можна довести, що алгебраїчна сума скінченної кількості нескінченно великих величин буде величиною нескінченно великою, добуток нескінченно великої величини на обмежену величину також буде нескінченно великою величиною.

Ділення нескінченно малих та нескінченно великих величин поки що не визначено і буде розглянуто далі, після визначення границі змінної величини.