***31. Определение предела числовой функции. Односторонние пределы. Свойства пределов.***

Число А называется пределом функции y=f(x) в точке х0, если для любой последовательности допустимых значений аргумента xn, n€N (xn≠x0), сходящейся к х0

(т.е. ), последовательность соответствующих значений функции f(xn), n€N, сходится к числу А, т.е. . Геометрический смысл предела этой функции, что для всех точек х, достаточно близких к точке х0, соответствующие значения функции как угодно мало отличается от числа А.

Односторонние пределы.

Считается, что х стремится к х0 любым способом: оставаясь меньшим, чем х0 (слева от х0), большим, чем х0 (справа от х0), или колеблясь около точки х0.

Число А1 называется **пределом функции** y=f(x) **слева** в точке х0, если для любого ε<0 существует число σ=σ(ε)>0 такое, что при х€(x0-σ;x0), выполняется неравенство |f(x)-A1|<ε 



**Пределом функции справа** называется



Свойства пределов.

1) если предел  функция равна этому числу плюс б.м.



ε – сколь угодно малое число

|f(x)-a|=α; f(x)=a+ α

2) сумма конечного числа б.м. чисел есть б.м. число

3) предел произведения равен произведению пределов

4) константы можно выносить за знак предела

5) 

***32. Замечательные пределы.***

С

М

х

tgx

О cos x A B

1 замечательный предел.



Возьмем круг радиуса 1, обозначим

радианную меру угла MOB через Х.

Пусть 0 < X < π/2. На рисунке |АМ| = sin x, дуга МВ численно равна центральному углу Х, |BC| = tg x. Тогда



Разделим все на и получим:



Т.к. , то по признаку существования пределов следует .

2 замечательный предел.



Пусть х→∞. Каждое значение х заключено между двумя положительными целыми числами:



Если x→∞, то n→∞, тогда



По признаку о существовании пределов:



***33. Непрерывные функции и их свойства. Точка разрыва функций и их классификация.***

Пусть функция y=f(x) определена в точке х0 и в некоторой окрестности этой точки. Функция y=f(x) называется непрерывной в точке х0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке:



Это означает:

- функция определена в точке х0 и в ее окрестности;

- функция имеет предел при х→х0

- предел функции в точке х0 равен значению функции в этой точке, т.е. выполняется равенство.

Это означает, что при нахождении предела непрерывной функции f(x) можно перейти к пределу под знаком функции, то есть в функции f(x) вместо аргумента х подставить предельное значение х0

**Точки разрыва функции** – это точки в которых нарушается непрерывность функции.

Точка разрыва х0 называется *точкой разрыва 1 рода* функции y=f(x), если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа (односторонние пределы)

 и 

При этом, если:

- А1=А2 то точка х0 называется *точкой устранимого разрыва;*

- А1≠А2 то точка х0 называется *точкой конечного разрыва.*

|A1 – A2| называется скачком функции.

Точка разрыва х0 называется *точкой разрыва 2 рода* функции y=f(x), если по крайней мере один из односторонних пределов (слева или справа) не существует, либо равен бесконечности.

***34. Производная от функции. Дифференцируемость функции. Дифференциал.***

Производной функции y=f(x) в точке х0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда аргумент стремится к нулю.



Производная функции f(x) есть некоторая функция

f ’(x), произведенная из данной функции.

Функция y=f(x), имеющая производную в каждой точке интервала (a;b) называется **дифференцируемой** в этом интервале.

Операция нахождения производной называется **дифференцированием.**

**Дифференциал функции** y=f(x) в точке х называется главная часть ее приращения, равная произведению производной функции на приращение аргумента, и обозначается dy (или df(x) ).

Иначе. **Дифференциал функции** равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной.

***35. Правила дифференцирования суммы, произведения, частного функции. Производные сложных функций.***



Для нахождения производной сложной функции надо производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу.

Производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.



***36. Логарифмическое дифференцирование.***

**Логарифмическое дифференцирование -** в некоторых случаях целесообразнее функцию сначала прологарифмировать, а результат продифференцировать.



Однако производные степенных функций находят только логарифмическим дифференцированием.

*Производная степенно-показательной функции равна сумме производно показательной функции, при условии U=const, и производной степенной функции, при условии V=const.*



***37. Теоремы о среднем. Правило Лопиталя.***

Рассмотрим способ раскрытия неопределенностей 0 / 0 и ***∞ / ∞***, который основан на применении производных.

**Правило Лопиталя, при 0 / 0.**

**Пусть функции f(x) и φ(x) непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x0 и обращается в нуль в этой точке: .**

**Пусть φ ′(x) ≠ 0 в окрестности точки x0**

**Если существует предел**

**, то **

Применим к функциям f(x) и φ(x) теорему Коши для отрезка [x0;x], лежащего в окрестности точки x0 , тогда

, где с лежит между x0 и х.

х0 с х х

При x→x0 величина с также стремится к х0; перейдем в предыдущем равенстве к пределу:

****

Так как **, то .**

Поэтому****

*(предел отношения двух бесконечно малых равен пределу отношения их производных, если последний существует)*

**Правило Лопиталя, при ∞ / ∞.**

**Пусть функции f(x) и φ(x) непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x0 (кроме точки x0), в этой окрестности**

****

**Если существует предел**

**, то **

Неопределенности вида 0∙∞ ; ∞-∞ ; 1∞ ; ∞0 ; 00сводятся к двум основным.

**Например, 0∙∞**

Пусть f(x)→0, φ(x)→∞ при х→х0



***38. Дифференциалы высших порядков.***

Пусть y=f(x) дифференцируема функция, а ее аргумент х – независимая переменная. Тогда дифференциал dy=f ′(x)dx есть также функция х, можно найти дифференциал этой функции. Дифференциал от дифференциала есть второй дифференциал.

Производную можно рассматривать, как отношение дифференциала соответствующего порядка к соответствующей степени дифференциала независимой переменной.

Дифференциал n-ого порядка, есть дифференциал от дифференциала (n-1)-ого порядка, т.е. производную функции можно рассматривать, как отношение ее дифференциала соответствующего порядка к соответствующей степени дифференциала независимой переменной.

***39. Исследование условий и построение графиков.***

- найти область определения функции

- найти точки пересечения графика с осями координат

- найти интервалы знака постоянства

- исследовать на четность, нечетность

- найти асимптоты графика функции

- найти интервалы монотонности функции

- найти экстремумы функции

- найти интервалы выпуклости и точки перегиба