МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования

"Гомельский государственный университет

имени Франциска Скорины"

Математический факультет

Кафедра алгебры и геометрии

Курсовая работа

**АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ГРУППЫ МАТРИЦ**

Исполнитель:

студентка группы H.01.01.01 М-42

Мариненко В.В.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,

профессор Скиба С.В.

Гомель 2003

**Содержание**

[Введение](#_Toc241335612)

[1. Алгебраические группы матриц](#_Toc241335613)

[1.1 Примеры алгебраических групп матриц](#_Toc241335614)

[1.2 О полугруппах](#_Toc241335615)

[1.3 Компоненты алгебраической группы](#_Toc241335616)

[1.4 О ****-группах](#_Toc241335617)

[2 Ранг матрицы](#_Toc241335618)

[2.1 Возвращение к уравнениям](#_Toc241335619)

[2.2 Ранг матрицы](#_Toc241335620)

[2.3 Критерий совместности](#_Toc241335621)

[3 Линейные отображения. Действия с матрицами](#_Toc241335622)

[3.1 Матрицы и отображения](#_Toc241335623)

[3.2 Произведение матриц](#_Toc241335624)

[3.3 Квадратные матрицы](#_Toc241335625)

[Заключение](#_Toc241335626)

[Список использованных источников](#_Toc241335627)

**Введение**

Множество  матриц -ой степени над  будем рассматривать как аффинное пространство  с имеющейся на ней полиномиальной топологией. *Алгебраические группы матриц* определяются как невырожденные части алгебраических множеств из , являющиеся группами относительно обычного матричного умножения. Простейший пример такой группы - общая линейная группа . В настоящем параграфе мы начнем систематическое изучение алгебраических матричных групп.

Все топологические понятия относятся к полиномиальной топологии; черта обозначает замыкание в , диез - замыкание в , бемоль - взятие невырожденной части, т. е.  - совокупность всех невырожденных матриц из . Иногда, допуская вольность, мы употребляем для групп те же понятия, что и для подлежащих алгебраических множеств, - например, говорим об общих точках групп; это не должно вызывать недоразумений.

1. Алгебраические группы матриц

##

## 1.1 Примеры алгебраических групп матриц

Классические матричные группы - *общая, специальная, симплектическая и ортогональная*:

 

где 

 - единичная матрица и штрих обозначает транспонирование.

*Диагональная группа* , группы клеточно-диагональных матриц данного вида. *Треугольная группа*  (для определенности --- с нижним нулевым углом), унитреугольная группа  (треугольные матрицы с единичной диагональю), группы клеточно-треугольных матриц данного вида.

Централизатор произвольного множества из  в алгебраической группе , нормализатор замкнутого множества из  в .

Пересечение всех алгебраических групп, содержащих данное множество матриц  из  --- алгебраическая группа. Она обозначается  и называется *алгебраической группой, порожденной множеством *.

Каждую алгебраическую линейную группу из  можно изоморфно --- в смысле умножения и полиномиальной топологии --- отождествить с замкнутой подгруппой из  в силу формулы

 

Такое отождествление позволяет при желании ограничиться рассмотрением только таких групп матриц, которые сами являются алгебраическими множествами (а не их невырожденными частями). Это дает другое оправдание тем вольностям в терминологии, которые упоминались в начале параграфа.

Множество всех матриц из , оставляющих инвариантной заданную невырожденную билинейную форму  на .

Пусть  --- алгебра над  конечной размерности  (безразлично, ассоциативная или нет),  --- группа всех ее автоморфизмов. Фиксируя в  какую-нибудь базу  и сопоставляя автоморфизмам алгебры  их матрицы в этой базе, мы получим на  строение алгебраической группы. Действительно, пусть

 

т. е.  --- структурные константы алгебры . Пусть далее

 

где . Тогда  задается в матричных координатах  очевидными полиномиальными уравнениями, вытекающими из соотношений

 

Указать в приведенных выше примерах определяющие уравнения, найти общую точку, если она есть.

В дальнейшем нам встретится еще много примеров и конструкций алгебраических матричных групп.

**1.1.1** *Если матричная группа  содержит алгебраическую подгруппу  конечного индекса, то  сама алгебраическая.*

Доказательство. Пусть  - аннулятор группы  в ,  - его корень в . Надо показать, что . Пусть, напротив, . Пусть  - смежные классы  по . Для каждого  выберем многочлен

 

и положим

 

Очевидно, , . Получили противоречие.

Пусть  --- алгебраическая группа, ,  --- подмножество и замкнутое подмножество из . Тогда множества

 

где , замкнуты. Если  тоже замкнуто и  --- общее поле квазиопределения для , , , то , ,  квазиопределены над . В частности, если существует хотя бы одно  с условием  (соответственно, , ), то можно считать, что  (см. 7.1.5).

Если на множестве  выполняется теоретико-групповое тождество , то оно выполняется и на его замыкании . В частности, коммутативность, разрешимость, нильпотентность матричной группы сохраняются на ее замыкании в полиномиальной топологии.

## 1.2 О полугруппах

Определим действие элементов из  на рациональные функции из , , полагая

 

Для каждого  отображение  (сдвиг аргумента) есть автоморфизм поля . Отображение  есть изоморфизм полной линейной группы  в группу автоморфизмов расширения .

Имеет место следующее предложение.

**1.2.1** *Все замкнутые (в полиномиальной топологии) полугруппы из  являются группами. Более общно: замыкание  произвольной полугруппы  --- группа. Более точно: если  --- аннулятор  в , то  совпадает с*

 

Здесь вместо  можно написать .

Доказательство. Во-первых,  и, значит, . Действительно, если ,  и , то , т. е. . Подпространство  многочленов из  степени  отображается оператором  на себя, так как оно конечномерно, а опрератор обратим. Но тогда и всё  отображается на себя, как объединение всех .

Во-вторых, , т. е.  для каждого . Действительно, пусть . По уже доказанному, . Найдём  с условием . Тогда .

В-третьих, , т. е.  для всех , . Действительно, . Предложение доказано.

Таким образом, теория алгебраических полугрупп из  исчерпывается теорией алгебраических групп.

Отметим ещё одно полезное предложение.

**1.2.2** *Пусть алгебраическая группа  неприводима, т. е.  --- многообразие,  --- густое подмножество, плотное в . Тогда каждый элемент  является произведением двух элементов из ; в частности, если  --- подгруппа, то она совпадает с .*

Доказательство. Множества  и  тоже густые и плотные, поэтому пересечение  непусто (см. п. 8.2).

Если  --- полугруппа из , то .

## 1.3 Компоненты алгебраической группы

Пусть  --- алгебраическая группа матриц. Невырожденные части компонент её подлежащего многообразия  называеются *компонентами* группы . наличие в  групповой структуры позволяет высказать о компонентах ряд важных утверждений, отсутствующих в случае произвольного многообразия.

**1.3.1** Теорема. *Пусть  --- алгебраическая группа матриц. Её компонента , содержащая единицу, единственна и является нормальной подгруппой. Остальные компоненты --- смежные классы  по  (в частности, они являются связными компонентами группы  в полиномиальной топологии).  --- единственная связная замкнутая подгруппа конечного индекса в . Аннулятор  компоненты  связан с аннулятором  всей группы  следующим образом:*

 *для* *некоторого , зависящего от *

, *где  --- аннулятор единицы в ,  --- некоторый многочлен из .*

Доказательство. а) Пусть  --- общее поле определения всех компонент  группы . Пусть ,  содержат единицу , ,  --- их независимые общие точки над  и , . Имеем специализации

 

над , откуда , , . Этим доказана единственность компоненты .

б) Очевидно, что отображения

 

являются гомеоморфизмами пространства . Так как  инвариантна относительно них, то  --- нормальная подгруппа группы .

в) Пусть . Тогда  при фиксированном  --- снова все компоненты группы . В частности, , . Этим доказано, что  --- смежные классы  по  и, значит, связные компоненты группы .

г) Если  --- связная замкнутая подгруппа группы , то, предыдущему, . Если, кроме того,  конечного индекса, то она той же размерности, что и , потому совпадает с .

д) Для каждого  возьмем многочлен

 

Пусть  --- точка из , в которой . Рассмотрим многочлен

 

Он искомый. В самом деле, очевидно, . Оба включения справа налево очевидны (использовать простоту идеала ). Остается доказать включение

 

Пусть , . Имеем:

 

Если , то , если же , , то . В любом случае . Следовательно, . Теорема доказана.

Мы видим, в частности, что для алгебраической группы неприводимость и связность в полиномиальной топологии --- одно и то же; в дальнейшем мы будем пользоваться только вторым термином, чтобы избежать путаницы с понятием матричной приводимости групп (к полураспавшейся форме).

Доказать, что связанная компонента единицы алгебраической группы содержится в любой замкнутой подгруппе конечного индекса.

Подгруппа  алгебраической группы  тогда и только тогда замкнута, когда замкнуто её пересечение со связной компонентой единицы .

<<Только тогда>> очевидно. <<Тогда>> вытекает из 9.1.9, если заметить, что

 

Конечная нормальная подгруппа  связной алгебраической группы  всегда лежит в центре .

 

В заключение отметим, что если в качестве универсальной области выбрано поле комплексных чисел , то в алгебраической группе можно рассматривать две топологии --- полиномиальную и евклидову. Ясно, что вторая тоньше первой, поэтому, в частности, евклидова связная компонента единицы содержится в полиномиальной связной компоненте. Можно было бы доказать и обратное, т. е. на самом деле связные компоненты комплексной алгебраической группы в обеих топологиях одни и те же. Этот результат становится неверным, если рассматривать -порцию комплексной алгебраической группы (по поводу определения см. следующий пункт).

## 1.4. О -группах

Пусть  - поле. По определению, *алгебраическая -группа* --- это группа матриц из , выделяемая полиномиальными уравнениями с коэффициентами в . Иначе можно сказать, что это -порция, т. е. пересечение с , некоторой алгебраической группы, квазиопределенной над . Обычные алгебраические группы тоже можно трактовать как -группы по отношению к некоторой большей универсальной области . В этом смысле понятие алгебраической -группы является более общим, так как от  не требуется ни алгебраической замкнутости, ни бесконечной степени трансцендентности над простым полем.

В свойствах алгебраических групп и -групп много общего. Имеется сандартный способ перехода от первых ко вторым --- посредством поля определения (в чём и состоит основное значение этого понятия). Нам не раз представится возможность продемонстрировать этот способ. В целом же -группы в нашем изложении останутся на заднем плане, лишь иногда выходя на авансцену.

Многие результаты о -группах по формулировке и доказательству вполне аналогичны результатам об абсолютных алгебраических группах (в ) и опираются на сведения из алгебраической геометрии для -множеств, (по определению, *алгебраическое -множество* выделяется в  уравнениями с коэффициентами из ).

**2 Ранг матрицы**

## 2.1 Возвращение к уравнениям

В арифметическом линейном пространстве  столбцов высоты  рассмотрим  векторов

 

и их линейную оболочку . Пусть дан еще один вектор . Спрашивается, принадлежит ли  подпространству , а если принадлежит, то каким образом его координаты  выражаются через координаты векторов . В случае  вторая часть вопроса относится к значениям координат вектора  в базисе . Мы берем линейную комбинацию векторов  с произвольными коэффициентами  и составляем уравнение . Наглядный вид этого уравнения

 

есть лишь иная запись системы из  линейных уравнений с  неизвестными:

 

 Первое впечатление таково, что мы вернулись к исходным позициям, потеряв время и ничего не выиграв. На самом же деле мы располагаем теперь рядом важных понятий. Осталось приобрести навыки в обращении с ними.

В этом месте удобно условиться в обозначениях. В дальнейшем для сокращения записи мы часто будем обозначать сумму  значком . При этом  --- величины произвольной природы (числа, векторы-строки и т. д.), для которых выполнены все законы сложения чисел или векторов. Правила

 

достаточно понятны, чтобы их нужно было разъяснять. Будут рассматриваться также *двойные суммы*,

 

в которых порядок суммирования (по первому и по второму индексу) можно выбирать по своему желанию. Это легко понять, если расположить величины  в прямоугольную матрицу размера : в нашей воле начинать суммирование элементов матрицы по строкам или по столбцам.

Другие возможные типы суммирования будут разъясняться в нужном месте.

## 2.2 Ранг матрицы

Назовем *пространством столбцов* прямоугольной матрицы  размера  введенное выше пространство , которое мы будем обозначать теперь символом  или просто  (в --- вертикальный). Его размерность  назовем рангом по столбцам матрицы . Аналогично вводится ранг по строкам матрицы : , где  --- подпространство в , натянутое на векторы-строки ,  (г --- горизонтальный). Другими словами,

 

 

- ранги систем векторов-столбцов и соответственно векторов-строк. По теореме о существовании конечного базиса у подпространства  величины  и  определены правильно.

Будем говорить, что матрица  получена из  при помощи *элементарного преобразования типа* (I), если  для какой-то пары индексов  и  для . Если же  для всех  и , , то говорим, что к  применено *элементарное преобразование типа* (II).

Заметим, что элементарные преобразования обоих типов обратимы, т. е. матрица , получающаяся из  при помощи одного элементарного преобразования, переходит снова в  путем применения одного элементарного преобразования, причем того же типа.

**2.2.1** Лемма. *Если матрица  получена из прямоугольной матрицы  путем применения конечной последовательности элементарных преобразований, то имеют место равенства:*

(i) 

(ii) 

Доказательство. Достаточно рассмотреть тот случай, когда  получена из  путем применения одного элементарного преобразования (сокращенно э. п.).

(i) Так как, очевидно, , то э. п. типа (I) не меняет . Далее,  и, следовательно, , так что  не меняется и при э. п. типа (II).

(ii) Пусть  --- столбцы матрицы . Нам нужно доказать, что

 

Тогда всякой, в том числе и максимальной, независимой системе столбцов одной матрицы будет отвечать независимая система столбцов с теми же номерами другой матрицы, чем и устанавливается равенство . Заметим еще, что в силу обратимости элементарных преобразований достаточно доказать импликацию в одну сторону. Пусть, например, . Тогда, заменяя в (1)  на  и все  на 0, мы видим, что  --- решение однородной системы ОС, ассоциированной с линейной системой (2). По соответствующей теореме это решение будет также решением однородной системы , получающейся из ОС при помощи э. п. типа (I) или (II) и имеющей своей матрицей как раз матрицу . Так как система  кратко записывается в виде , то мы приходим к соотношению 

Основным результатом этого параграфа является следующее утверждение:

**2.2.2** Теорема. *Для любой прямоугольной -матрицы  справедливо равенство  (это число называется просто рангом матрицы  и обозначается символом ).*

Доказательство. Т. к. конечным числом элементарных преобразований, совершаемых над строками , матрицу  можно привести к ступенчатому виду:

 

с . Согласно лемме  так что нам достаточно доказать равенство .

Столбцы матриц  и  с номерами , отвечающими главным неизвестным  линейной системы (2), будем называть базисными столбцами. Эта терминология вполне оправдана. Предположив наличие соотношения

 

связывающего векторы-столбцы , ,  матрицы (3), получим последовательно: , , , , , а так как , то . Значит,  и . Но пространство , порожденное столбцами матрицы , отождествляется с пространством столбцов матрицы, которая получается из  удалением последних  нулевых строк. Поэтому . Сопоставление двух неравенств показывает, что  (неравенство  вытекает также из того очевидного соображения, что все столбцы матрицы  являются линейными комбинациями базисных; проделайте это самостоятельно в качестве упражнения).

С другой стороны, все ненулевые строки матрицы  линейно независимы: любое гипотетическое соотношение

 

как и в случае со столбцами, дает последовательно , , , . Откуда . Стало быть, 

## 2.3 Критерий совместности

Ступенчатый вид матрицы , дающий ответ на ряд вопросов относительно линейных систем, содержит элементы произвола, связанные, например, с выбором базисных столбцов или, что эквивалентно, с выбором главных неизвестных системы (2). В то же время из теоремы 1 и из ее доказательства извлекается

Следствие. *Число главных неизвестных, линейной системы (2) не зависит от способа приведения ее к ступенчатому виду и равно , где  --- матрица системы.*

Действительно, мы видели, что число главных неизвестных равно числу ненулевых строк матрицы  (см. (3)), совпадающему, как мы видели, с рангом матрицы . Ранг определялся нами совершенно инвариантным образом. Этими словами выражается тот факт, что ранг матрицы служит ее внутренней характеристикой, не зависящей от каких-либо привходящих обстоятельств. 

В следующей главе мы получим эффективное средство для вычисления ранга матрицы , устраняющее необходимость приведения  к ступенчатому виду. Это, несомненно, повысит ценность утверждений, основанных на понятии ранга. В качестве простого, но полезного примера сформулируем критерий разрешимости линейной системы.

**2.3.3** Теорема. (Кронекер - Капелли) *Система линейных уравнений (2) совместна тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы совпадает с рангом расширенной матрицы*

Доказательство. Совместность линейной системы (2), записанной в виде (1), можно трактовать как вопрос о представлении вектора-столбца  свободных членов в виде линейной комбинации векторов-столбцов  матрицы . Если такое представление возможно (т. е. система (2) совместна), то  и , откуда  (см. формулировку теоремы 1).

Обратно, если ранги матриц  и  совпадают и  --- какая-то максимальная линейно независимая система базисных столбцов матрицы , то расширенная система  будет линейно зависимой, а это означает, что  --- линейная комбинация базисных (и тем более всех) столбцов . Стало быть, система (2) совместна. 

**3. Линейные отображения. Действия с матрицами**

## 3.1 Матрицы и отображения

Пусть  и  --- арифметические линейные пространства столбцов высоты  и  соответственно. Пусть, далее,  --- матрица размера . Определим отображение , полагая для любого 

 

где  --- столбцы матрицы . Так как они имеют высоту , то в правой части (1) стоит вектор-столбец . Более подробно (1) переписывается в виде

 

Если ,

то .

Аналогично .

Обратно, предположим, что  --- отображение множеств, обладающее следующими двумя свойствами:

(i)  *для всех* ;

(ii)  *для всех* .

Тогда, обозначив стандартные базисные столбцы пространств  и  соответственно символами  и , мы воспользуемся свойствами (i), (ii) в применении к произвольному вектору

:

 

Соотношение (2) показывает, что отображение  полностью определяется своими значениями на базисных векторах-столбцах. Положив

 

мы обнаруживаем, что задание  равносильно заданию прямоугольной матрицы  размера  со столбцами , а соотношения (1) и (2) фактически совпадают. Стало быть, можно положить .

 3.1.1 . Определение. Отображение , обладающее свойствами (i), (ii), называется *линейным отображением* из  в . Часто, в особенности при , говорят о *линейном преобразовании*. Матрица  называется *матрицей линейного отображения* .

Пусть ,  --- два линейных отображения  с матрицами  и . Тогда равенство  равносильно совпадению значений  для всех . В частности, , откуда  и .

Резюмируем наши результаты:

**3.1.2** Теорема. *Между линейными отображениями  в  и матрицами размера  существует взаимно однозначное соответствие.*

Следует подчеркнуть, что бессмысленно говорить о линейных отображениях  произвольных множеств  и . Условия (i), (ii) предполагают, что  и  --- подпространства арифметических линейных пространств , .

Обратим внимание на специальный случай , когда линейное отображение , обычно называемое *линейной функцией* от  переменных, задается  скалярами :

 

Линейные функции (4), равно как и произвольные линейные отображения  при фиксированных  и  можно складывать и умножать на скаляры. В самом деле, пусть  --- два линейных отображения. Отображение

 

определяется своими значениями:

 

В правой части стоит обычная линейная комбинация векторов-столбцов.

Так как





то  - линейное отображение. По теореме 1 можно говорить о его матрице . Чтобы найти , выпишем, следуя (3), столбец с номером :



Матрицу  с элементами  естественно назвать линейной комбинацией матриц  и  с коэффициентами  и :

 

 

Итак, .

Особенно часто нами будет использоваться тот факт, что линейные комбинации линейных функций снова являются линейными функциями.

## 3.2 Произведение матриц

Соотношения (5) и (6) выражают согласованность действий сложения и умножения на скаляры в множествах матриц размера  и отображений . В случае произвольных множеств имеется еще важное понятие произведения (композиции) отображений. Разумно ожидать, что композиция двух линейных отображений должна выражаться неким согласованным образом в терминах матриц. Посмотрим как это делается.

Пусть ,  --- линейные отображения,  --- их композиция.

Вообще говоря, нам следовало бы предварительно проверить, что  --- линейное отображение, но это довольно ясно:

(i) ;

(ii) ;

поэтому по теореме 1 с  ассоциируется вполне определенная матрица .

Действие отображений на столбцы в цепочке запишем в явном виде по формуле ():

 

С другой стороны,

 

Сравнивая полученные выражения и памятуя о том, что  --- произвольные вещественные числа, мы приходим к соотношениям

 

Будем говорить, что матрица  получается в результате *умножения* матрицы  на матрицу . Принято писать . Таким образом, произведением прямоугольной матрицы  размера  и прямоугольной матрицы  размера  называется прямоугольная матрица  размера  с элементами , задающимися соотношением (7). Нами доказана

**3.2.1** Теорема. *Произведение  двух линейных отображений с матрицами  и  является линейным отображением с матрицей . Другими словами,*

 

Соотношение (8) - естественное дополнение к соотношению (6).

Мы можем забыть о линейных отображениях и находить произведение  двух произвольных матриц , , имея в виду, однако, что *символ  имеет смысл только в том случае, когда число столбцов в матрице  совпадает с числом строк в матрице *. Именно при этом условии работает правило (7) "умножения -й строки  на -й столбец ", согласно которому

 

*Число строк, матрицы  равно числу строк матрицы , а число столбцов --- числу столбцов матрицы .* В частности, произведение квадратных матриц одинаковых порядков всегда определено, но даже в этом случае, вообще говоря, , как показывает хотя бы следующий пример:

 

Умножение матриц, конечно, можно было бы вводить многими другими способами (умножать, например, строки на строки), но ни один из этих способов не сравним по важности с рассмотренным выше. Это и понятно, поскольку мы пришли к нему при изучении естественной композиции (суперпозиции) отображений, а само понятие отображения относится к числу наиболее фундаментальных в математике.

Следствие. *Умножение матриц ассоциативно:*

 

Действительно, произведение матриц соответствует произведению линейных отображений (теорема 2 и соотношение (8)), а произведение любых отображений ассоциативно. К тому же результату можно прийти вычислительным путем, используя непосредственно соотношение (7).

## 3.3 Квадратные матрицы

Пусть  (или ) --- множество всех квадратных матриц () порядка  с вещественными коэффициентами ,

Единичному преобразованию , переводящему каждый столбец  в себя, соответствует, очевидно, единичная матрица

 

Можно записать , где

 

- *символ Кронекера*. Правило (7) умножения матриц, в котором следует заменить  на , показывает, что справедливы соотношения

 

Матричные соотношения (10), полученные вычислительным путем, вытекают, конечно, из соотношений  для произвольного отображения , если воспользоваться теоремой 1 и равенством (8) с .

Как мы знаем (см. (5)), матрицы из  можно умножать на числа, понимая под , где , матрицу .

Но умножение на скаляр (число) сводится к умножению матриц:

 

 

- известная нам скалярная матрица.

В равенстве (11) отражен легко проверяемый факт перестановочности  с любой матрицей . Весьма важным для приложений является следующее его обращение.

**3.3.1** Теорема. *Матрица из , перестановочная со всеми матрицами в , должна быть скалярной.*

Доказательство. Введем матрицу , в которой на пересечении -й строки и -го столбца стоит 1, а все остальные элементы --- нулевые. Если  --- матрица, о которой идет речь в теореме, то она перестановочна,

 

Перемножая матрицы в левой и правой частях этого равенства, мы получим матрицы

 

с единственным ненулевым -м столбцом и соответственно с единственной ненулевой -й строкой. Их сравнение немедленно приводит к соотношениям  при  и . Меняя  и , получаем требуемое. 

Отметим еще соотношения , которые непосредственно вытекают из определения умножения матриц на скаляры или, если угодно, из соотношений (11) и из ассоциативности умножения матриц.

Для данной матрицы  можно попробовать найти такую матрицу , чтобы выполнялось условие

 

Если матрица  существует, то условию (12) в терминах линейных преобразований отвечает условие

 

означающее, что  --- преобразование, обратное к .  существует тогда и только тогда, когда  --- биективное преобразование. При этом  определено однозначно. Так как , то биективность  означает, в частности, что

 

Пусть теперь  --- какое-то биективное линейное преобразование из  в . Обратное к нему преобразование  существует, но, вообще говоря, не ясно, является ли оно линейным. Чтобы убедиться в линейности , мы введем векторы-столбцы

 

 

и применим к обеим частям этих равенств преобразование . В силу его линейности получим

 

 

Так как , то

 

 

откуда, в соответствии с импликацией (13), находим, что ,  --- нулевые векторы. Таким образом, выполнены свойства (i), (ii) из 3.1, определяющие линейные отображения. Имеем , где  --- некоторая матрица. Переписав условие () в виде  (см. (8)) и снова воспользовавшись теоремой 1, мы придем к равенствам (12).

Итак, *матрица, обратная к , существует в точности тогда, когда преобразование  биективно. При этом преобразование  линейно*. Биективность  равносильна условию, что любой вектор-столбец  записывается единственным образом в виде (1)

 

где  --- столбцы матрицы  (сюръективность  приводит к существованию , для которого , а инъективность  дает единственность : если , то , откуда, согласно (12), ). Значит,  совпадает с пространством столбцов  матрицы , так что .

Если матрица, обратная к , существует, то, согласно вышесказанному, она единственна. Ее принято обозначать символом . В таком случае (см. ())

 

Квадратную матрицу , для которой существует обратная матрица , называют *невырожденной* (или *неособенной*). Невырожденным называют и соответствующее линейное преобразование . В противном случае матрицу  и линейное преобразование  называют *вырожденными* (или *особенными*).

Резюмируем полученные нами результаты.

**3.3.2** Теорема. *Квадратная матрица  порядка  является невырожденной тогда и только тогда, когда ее ранг равен . Преобразование , обратное к , линейно и задается равенством (14)*.

Следствие. *Невырожденность  влечет невырожденность  и . Если  --- невырожденные  --- матрицы, то произведение  также невырождено и .*

Для доказательства достаточно сослаться на симметричность условия . 

Нами получено довольно много правил действий с квадратными матрицами порядка . Имеются в виду, ассоциативность (следствие теоремы 2), (10) и теорема 4. Обратим еще внимание на так называемые *законы дистрибутивности*:

 

где , ,  --- произвольные матрицы из .

Действительно, полагая , мы получим для любых  равенство (используется дистрибутивность в ):

 

левая часть которого дает элемент  матрицы , а правая --- элементы  и  матриц  и соответственно . Второй закон дистрибутивности (16) проверяется совершенно аналогично. Необходимость в нем обусловлена некоммутативностью умножения в . Законы дистрибутивности

 

для линейных отображений , ,  из  в  можно не доказывать, ссылаясь на соответствие между отображениями и матрицами, но можно, в свою очередь, выводить (16) из (), поскольку в случае отображений, рассуждение столь же просто.

**Заключение**

Таким образом, в данной курсовой работе мы доказали, что связанная компонента единицы алгебраической группы содержится в любой замкнутой подгруппе конечного индекса. В работе была доказана теорема: *Для любой прямоугольной -матрицы  справедливо равенство  (это число называется просто рангом матрицы  и обозначается символом ).А также было* получено эффективное средство для вычисления ранга матрицы , устраняющее необходимость приведения  к ступенчатому виду, доказана теорема: *Квадратная матрица  порядка  является невырожденной тогда и только тогда, когда ее ранг равен . Преобразование , обратное к , линейно и задается равенством (14)* и следствие этой теоремы: *невырожденность  влечет невырожденность  и . Если  --- невырожденные  --- матрицы, то произведение  также невырождено и .*

**Список использованных источников**

1. Шеметков Л.А., Скиба А.Н., Формации алгебраических систем. - М.: Наука, 1989. - 256с.
2. Русаков С.А., Алгебраические -арные системы. Минск, 1987. - 120с.
3. Кон П., Универсальная алгебра. М.:Мир, 1968.--351с.
4. Ходалевич А.Д., Свойства централизаторов конгруэнции универсальных алгебр// Вопросы алгебры.-1996.-Вып.10 с.144-152
5. Mонaxов В.С. Произведение конечных групп, близких к нильпотентным.- В кн.: Конечные группы. Мн.: Наука и техника, 1975, с. 70 - 100.