Контрольна робота

З дисципліни: Теорія ймовірностей та математична статистика

Прізвище,ім’я, по-батькові студента

Данiщук Мирослава Евгенiївна

Прізвище та ініціали викладача

Степахно Ірина Василівна

Київ 2009 рік

Зміст

[Завдання 1](#_Toc267220467)

[Завдання 2](#_Toc267220468)

[Завдання 3](#_Toc267220469)

[Завдання 4](#_Toc267220470)

[Завдання 5](#_Toc267220471)

[Завдання 6](#_Toc267220472)

[Завдання 7](#_Toc267220473)

[Список використаної літератури](#_Toc267220474)

## Завдання 1

В ящику 50 куль: 36 жовтих і 14 синіх. З ящика навмання виймають одну кулю. Визначити ймовірність того, що ця куля:

а) жовта; б) синя.

**Розв’язання:**

Ймовірність того, що з ящика наймання виймають жовту кулю становить відношення кількості жовтих кульок до загального числа кульок:

а) Рч = 36/50 = 0,72

Ймовірність того, що з ящика наймання виймають синю кулю становить відношення кількості синіх кульок до загального числа кульок:

б) Рс = 14/50 = 0,28.

**Відповідь**: а) 0,72; б) 0,28.

## Завдання 2

Імовірність несплати податку для кожного з n підприємців становить p. Визначити ймовірність того, що не сплатять податки не менше m1 і не більше m2 підприємців.

n=300; p=0,05; m1=25; m2=60

n=500; p=0,05; m1=10; m2=250

**Розв’язання:**

Якщо випадкова величина попадає в інтервал .

Позначимо шукану імовірність *Рn* (*m*).

Ми доведемо що має місце наступна *формула Бернуллі*:



Позначимо через *Вm* складна подія, що полягає в тому, що в *n* досвідах подія *А* відбулося точно *m* раз. Запис  буде означати, що в першому досвіді подія *А* відбулося, у другі і третьому - не відбулися і т.п. Тому що досвіди проводяться при незмінних умовах, те



Подія *Вm* можна представити у виді суми всіляких подій зазначеного виду, причому в кожнім доданку буква *А* без риси зустрічається точно *m* раз. Доданки в цій сумі несумісні й імовірність кожного доданка дорівнює  Щоб підрахувати кількість доданків, помітимо, що їх стільки, скільки є способів для вибору *m* місць для букви *А* без риси. Але *m* місць з *n* для букви *А* можна вибрати ** способами. Отже,







## Завдання 3

Задано ряд розподілу добового попиту на певний продукт Х. Знайти числові характеристики цієї дискретної випадкової величини:

А) математичне сподівання М (Х);

Б) дисперсію D (X);

В) середнє квадратичне відхилення σ Х.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 1 | 3 | 5 | 7 | 11 |
| p | 0,10 | 0,15 | 0,42 | 0,25 | 0,08 |

**Розв’язання.**

а) Математичне сподівання величини визначається як:



Запишемо результати в таблиці.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 1 | 3 | 5 | 7 | 11 |
| P | 0,10 | 0,15 | 0,42 | 0,25 | 0,08 |
| Х\*Р | 0,10 | 0,45 | 2,10 | 1,75 | 0,88 |



б) Дисперсія визначається як:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 1 | 3 | 5 | 7 | 11 |
| Р (Х)  | 0,10 | 0,15 | 0,42 | 0,25 | 0,08 |
| Х - М (Х)  | -4,28 | -2,28 | -0,28 | 1,72 | 5,72 |
|  (Х - М (Х)) 2 | 18,32 | 5, 20 | 0,08 | 2,96 | 32,72 |
| P (Х) \* (Х - М (Х)) 2 | 1,83 | 0,78 | 0,03 | 0,74 | 2,62 |



Дисперсія характеризує розкид значень від середнього.

D (Х) =6,00.

в) середнє квадратичне відхилення *δх* знаходиться як корінь квадратний з дисперсії.



## Завдання 4

Знаючи, що випадкова величина Х підпорядковується біноміальному закону розподілу з параметрами n, p, записати ряд розподілу цієї величини і знайти основні числові характеристики:

А) математичне сподівання М (Х);

Б) дисперсію D (X);

В) середнє квадратичне відхилення σ Х. n=3; p=0,5

**Розв’язання.**

Біноміальний закон розподілу описується наступним виразом:



Підставивши значення параметрів, отримаємо:



Запишемо ряд розподілу цієї величини:

Таблиця 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| m | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Pn (m)  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Таблиця 2

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Pn (Х)  | 1.29E-01 | 9.68E-03 | 4.84E-04 | 1.82E-05 | 5.45E-07 | 1.36E-08 | 2.92E-10 | 5.47E-12 | 9.12E-14 | 1.37E-15 |



Рис.1. Графік біноміального розподілу

а) Математичне сподівання величини визначається як:



Запишемо результати в таблиці 3.

Таблиця 3

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Pn (Х)  | 1.29E-01 | 9.68E-03 | 4.84E-04 | 1.82E-05 | 5.45E-07 | 1.36E-08 | 2.92E-10 | 5.47E-12 | 9.12E-14 | 1.37E-15 |
| ХP (Х)  | 1.29E-01 | 1.94E-02 | 1.45E-03 | 7.26E-05 | 2.72E-06 | 8.17E-08 | 2.04E-09 | 4.38E-11 | 8.21E-13 | 1.37E-14 |



б) Дисперсія визначається як:



Таблиця 4

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Сума |
| Х-M (Х)  | 0.850 | 1.850 | 2.850 | 3.850 | 4.850 | 5.850 | 6.850 | 7.850 | 8.850 | 9.850 | 53.500 |
|  (Х-M (Х)) 2 | 0.723 | 3.423 | 8.123 | 14.823 | 23.523 | 34.223 | 46.923 | 61.623 | 78.323 | 97.023 | 368.725 |
| Pn (Х)  | 0.129 | 0.010 | 4.84E-04 | 1.82E-05 | 5.45E-07 | 1.36E-08 | 2.92E-10 | 5.47E-12 | 9.12E-14 | 1.37E-15 | 0.139 |
|  (Х-M (Х)) 2P (m)  | 0.093 | 0.033 | 3.93E-03 | 2.69E-04 | 1.28E-05 | 4.66E-07 | 1.37E-08 | 3.37E-10 | 7.14E-12 | 1.33E-13 | 0.131 |

Дисперсія характеризує розкид значень від середнього.

D (Х) =0,131.

в) середнє квадратичне відхилення *δх* знаходиться як корінь квадратний з дисперсії.



## Завдання 5

Побудувати графік функції щільності розподілу неперервної випадкової величини Х, яка має нормальний закон розподілу з математичним сподіванням М (Х) =а і проходить через задані точки.

a=5

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 1 | 2 | 4 | 5 |
| f (x)  | 0,033 | 0,081 | 0,081 | 0,033 |

a=2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0,5 | 1 | 3 | 3,5 |
| f (x)  | 0,13 | 0,24 | 0,24 | 0,13 |

**Розв’язання.**

а) М (Х) =5.

Нормальний закон розподілу описується формулою:



Знайдемо середньоквадратичне відхилення.

Дисперсія визначається як:

,

де М (Х) - математичне сподівання.

Математичне сподівання обчислюється за формулою:



Допоміжні розрахунки представлені в таблиці 5.

Таблиця 5

Допоміжні розрахунки

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | **Сума** |
| x | 1 | 2 | 4 | 5 | 12,00 |
| f (x)  | 0,033 | 0,081 | 0,081 | 0,033 | 0,228 |
|  | 16,000 | 9,000 | 1,000 | 0,000 | 26,000 |
|  | 0,528 | 0,729 | 0,081 | 0,000 | 5,928 |

Отже, D (X) = 5,928



Підставивши значення у вираз для ймовірності, отримаємо:



б) М (Х) =2.

Допоміжні розрахунки представлені в таблиці 6.

Таблиця 6

Допоміжні розрахунки

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | Сума |
| x | 0,5 | 1 | 3 | 3,5 | 8,00 |
| f (x)  | 0,13 | 0,24 | 0,24 | 0,13 | 0,74 |
|  | 2,25 | 1 | 1 | 2,25 | 6,50 |
|  | 0,29 | 0,24 | 0,24 | 0,29 | 1,07 |

Отже, D (X) = 1,07.



Підставивши значення у вираз для ймовірності, отримаємо:



## Завдання 6

Задано вибірку, яка характеризує місячний прибуток підприємців (у тисячах гривень).

скласти варіаційний ряд вибірки.

побудувати гістограму та полігон частот, розбивши інтервал на чотири-шість рівних підінтервалів.

обчислити моду, медіану, середнє арифметичне, дисперсію та ексцес варіаційного ряду.

**Розв’язання.**

Складемо варіаційний ряд.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 73 | 68 | 70 | 65 | 73 | 71 | 66 | 69 | 78 | 70 | 67 | 67 | 67 | 76 | 71 | 72 | 68 | 74 | 73 | 70 |

Побудуємо інтервальний ряд (4 інтервали) з рівними інтервалами. Ширина інтервалу ряду визначається співвідношенням:

,

де і  - відповідно максимальне та мінімальне значення реалізацій випадкових величин.

; ; n = 4.

.

Таблиця 7

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| І | ІІ | ІІІ | ІV |
| 65,00 - 68,25 | 68,25 - 71,50 | 71,50 - 74,75 | 74,75 - 78,00 |
| 65 | 66 | 67 | 67 | 67 | 68 | 68 | 69 | 70 | 70 | 70 | 71 | 71 | 72 | 73 | 73 | 73 | 74 | 76 | 78 |
| f=7 | 6 | 5 | 2 |
| S=7 | 13 | 18 | 20 |

Побудуємо гістограму розподілу.



Рис.1. Гістограма розподілу

Побудуємо полігон частот як лінію, що сполучає середини інтервалів



Рис.2. Полігон частот

3) Обчислимо моду, медіану, середнє арифметичне, дисперсію та ексцес варіаційного ряду.

*Мода Мо* - найпоширеніше значення ознаки, тобто варіанта, яка в ряду розподілу має найбільшу частоту.

Мода визначається, як:

,

де хо та h - відповідно нижня межа та ширина модального інтервалу;

 - частоти модального, передмодального та післямодального інтервалу.

З таблиці 2.1 найбільше число реалізацій величини з інтервалу 65,00 - 68,25. Це модальний інтервал, ширина якого h=3,25, нижня межа xo=65,00, частота fmo=7, передмодальна частота fmo-1=0, післямодальна частота fmo+1=6. Маємо:



*Медіана Ме* - це варіанта, яка припадає на середину упорядкованого ряду розподілу і ділить його дві рівні за обсягом частини:

,

де fme - частота медіанного інтервалу;

Sfme-1 - кумулятивна частота передмедіанного інтервалу:



В інтервальному ряду медіанним буде значення ознаки, для якої кумулятивна частота перевищує або дорівнює половині обсягу сукупності.

Кумулятивна частота Sme3 = 13, Sme2-1 = 7, fme = 6, хо = 68,25, h=3,25.

Підставивши у (2.2), маємо:



*Середнє арифметичне*  обчислюється за формулою:



*Дисперсія* обчислюється за формулою:



Тому знайдемо спочатку середній квадрат значень.







*Ексцес Ek*характеризує крутизну кривої розподілу.

,

де  - центральний момент четвертого порядку.

У нашому випадку:



Отже, крива розподілу має лівосторонній нахил.

Результати обчислень наведені у табл.8.

Таблиця 8

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 65,00 - 68,25 | 68,25 - 71,50 | 71,50 - 74,75 | 74,75 - 78,00 | Сума |
| x | 66.63 | 69.88 | 73.13 | 76.38 | 286.00 |
| x2 | 4 438.89 | 4 882.52 | 5 347.27 | 5 833.14 | 20 501.81 |
| f | 7 | 6 | 5 | 2 | 20.00 |
| S | 7 | 13 | 18 | 20 | 58.00 |
| dj | 0.35 | 0.30 | 0.25 | 0.10 | 1.00 |
| xjdj | 23.32 | 20.96 | 18.28 | 7.64 | 70.20 |
| xj2dj | 1 553.61 | 1 464.75 | 1 336.82 | 583.31 | 4 938.50 |
|  (xcp-m) 3 | -45.69 | -0.03 | 25.03 | 235.46 | 214.76 |
|  (xcp-m) 3dj | -15.99 | -0.01 | 6.26 | 23.55 | 13.80 |
|  (xcp-m) 4 | 163.34 | 0.01 | 73.20 | 1 453.94 | 1 690.50 |
|  (xcp-m) 4dj | 57.17 | 0.00 | 18.30 | 145.39 | 220.87 |

## Завдання 7

Перевірити, чи справджується статистична гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності за даними вибірки:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | 2 | 5 | 9 | 11 | 12 | 15 | 18 | 19 | 21 |
| mi | 1 | 2 | 3 | 8 | 19 | 18 | 16 | 13 | 9 |



Рис.1.

Нормальний розподіл задається функцією:



Розрахуємо значення середньоквадратичного відхилення (таблиця 9.1).

.

Таблиця 9.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | 2 | 5 | 9 | 11 | 12 | 15 | 18 | 19 | 21 | Всього |
| mi | 1 | 2 | 3 | 8 | 19 | 18 | 16 | 13 | 9 | 89 |
| pі | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,09 | 0,21 | 0, 20 | 0,18 | 0,15 | 0,10 | 1,00 |
| Σхірі | 0,02 | 0,11 | 0,30 | 0,99 | 2,56 | 3,03 | 3,24 | 2,78 | 2,12 | 15,16 |
|  (хі - хср)  | -13,16 | -10,16 | -6,16 | -4,16 | -3,16 | -0,16 | 2,84 | 3,84 | 5,84 | -24,42 |
|  (хі - хср) 2 | 173,11 | 103,17 | 37,91 | 17,28 | 9,97 | 0,02 | 8,08 | 14,77 | 34,14 | 398,46 |

За методом χ2-критерію узгодженості Пірсона порівнюється з критичним значенням відносна сума квадратів відхилень дослідного числа попадань в кожний інтервал hk від теоретичного їх числа fpk, де pk -ймовірність попадання величини х в k-й інтервал.

Теоретичний розподіл можна вважати правдоподібним при рівня значущості α, якщо буде виконуватись нерівність:

,

де -квантиль χ2-критерію розподілу Пірсона, що відповідає значенню параметра f=k-3;

pj=F (bk - ak) = -

теоретичне значення попадання параметру в к-й інтервал

Параметри теоретичного розподілу вибираємо, виходячи з принципу максимальної правдоподібності: .

Таблиця 9.2

Результати обчислень перевірки гіпотези про нормальний розподіл

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| k | Значення | pk | fj |  (fj-npk) /npk |
| 1 | 2 | 0,425 | 1 | 0,177 |
| 2 | 5 | 0, 193 | 2 | 1,077 |
| 3 | 9 | 0,092 | 3 | 2,619 |
| 4 | 11 | 0,073 | 8 | 8,971 |
| 5 | 12 | 0,067 | 19 | 22,579 |
| 6 | 15 | 0,060 | 18 | 18,997 |
| 7 | 18 | 0,066 | 16 | 12,523 |
| 8 | 19 | 0,071 | 13 | 8,651 |
| 9 | 21 | 0,088 | 9 | 3,856 |
| Сума | 112 | 1,134 | 89 | 79,451 |



Рис.1. Емпіричні дані розподілу

=== 10,48773.

Оскільки 79,45 > 10,4873, то гіпотеза про нормальний закон розподілу не справджується.

## Список використаної літератури

1. Дідиченко М.П. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей. - Харків, 1996. - 208 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособ. для студ. вузов. - 7. изд., стереотип. - М.: Высшая школа, 2001. - 479 с.
3. Задорожня Т.М., Коляда Ю.В., Мамонова Г.В. Збірник задач з теорії ймовірності та математичної статистики (для студентів економічних спеціальностей): Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / Державна податкова адміністрація України; Академія держ. податкової служби України. - Ірпінь: Академія ДПС України, 2001. - 76 с.
4. Колемаев В.А. Теория вероятностей в примерах и задачах. Учеб. пособие. - М.: ГУУ, 2001. - 87 с.
5. Малайчук В.П., Петренко О.М., Рожковський В.Ф. Основи теорії ймовірності і математичної статистики: Навч. посібник / Дніпропетровський національний ун-т. - Д.: РВВ ДНУ, 2001. - 163 с.
6. Салтыкова О.А. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие / Восточный ин-т экономики, гуманитарных наук, управления и права. - Уфа: Восточный университет, 2001. - 77 с.
7. Тимченко Л.С. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навчально-методичний посібник для самостійної роботи студентів економічних спеціальностей. Харків: ХДПУ, 1999. - 140 с.
8. Трошин Л.И. Теория вероятностей: Учеб. - практ. пособие / Государственный комитет РФ по статистике; Межотраслевой ин-т повышения квалификации руководящих работников и специалистов в области учета и статистики - М.: МИПК учета и статистики, 2001. - 232 с.
9. Фетисова Т.М., Тарасова О.Ю., Потапов В.И. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие по решению задач / Южно-Уральский гос. ун-т. Златоустовский филиал. Кафедра высшей математики №3. - Челябинск: Издательство ЮУрГУ, 2000. - 82 с.
10. Фигурин В.А., Оболонкин В.В. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для студ. естеств. спец. вузов. - Минск: Новое знание, 2000. - 206 с.
11. Филиппенко В.И. Элементы теории вероятностей: Учеб. пособие по курсу "Теория вероятностей" / Криворожский гос. педагогический ин-т. - Кривой Рог, 1993. - 40 с.