А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

АЛГЕБРА

Підручник для 10 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Профільний рівень

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Харків
«Гімназія
2010

УДК 373:512
ББК 22.141я721
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С.
М52 Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів : Проф. рівень. — Х. : Гімназія, 2010. — 416 с.: іл.
ISBN 978-966-474-094-1.

УДК 373:512
ББК 22.141я721

ISBN 978-966-474-094-1

Від авторів

ЛЮБІ ДЕСЯТИКЛАСНИКИ!

Ви починаєте вивчати новий шкільний предмет — **алгебру і початки аналізу**.

Цей предмет надзвичайно важливий. Мабуть, немає сьогодні такої галузі науки, де б не застосовувалися досягнення цього розділу математики. Фізики та хіміки, астрономи та біологи, географи та економісти, навіть мовознавці та історики використовують «математичний інструмент».

Алгебра і початки аналізу — корисний і дуже цікавий предмет, який розвиває аналітичне і логічне мислення, дослідницькі навички, математичну культуру, кмітливість.

Ви зробили серйозний життєвий крок: вирішили продовжити освіту в профільному класі, де математика вивчається на підвищеному рівні. Ми вітаємо вас з цим вибором і сподіваємося, що ви не розчаруєтеся у своєму рішенні.

Навчатися в профільному класі не просто. Потрібно бути наполегливим і завзятим, уважним і акуратним, при цьому найголовніше — не бути байдужим до математики, а любити цю красиву науку. Сподіваємося, що ви з інтересом будете засвоювати нові знання. Ми маємо надію, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте. Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник розділено на п'ять параграфів, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним *шрифтом***. Також не залишайте поза увагою слова, надруковані *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту підібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, які позначено зірочкою (*)). Свої знання можна перевірити, розв'язуючи задачі у тестовій формі з рубрики «Перевір себе».

Крім того, у підручнику ви зможете прочитати оповідання з історії математики, зокрема про діяльність видатних українських математиків. Назви цих оповідань надруковано синім кольором.

Дерзайте! Бажаємо успіху!

ШАНОВНІ КОЛЕГИ!

Ми знаємо, що підготовка до уроку в класі з підвищеним рівнем викладання математики — робота нелегка. Організація такого навчального процесу вимагає великих зусиль учителя, який формує навчальний матеріал по крихтах, збираючи його в багатьох посібниках. Ми сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій і шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано обширний і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Червоним кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу на розсуд учителя можна розв'язувати усно.

Бажаємо творчого натхнення й терпіння.

Умовні позначення

n° — завдання, що відповідають початковому і середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ — завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

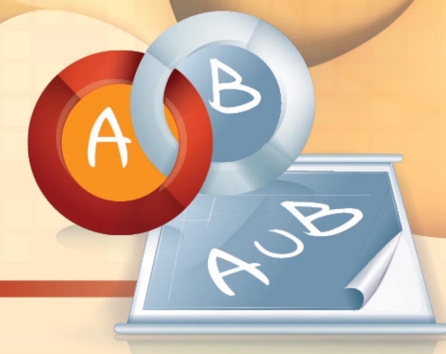
$n^{\bullet\bullet}$ — завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} — задачі для математичних гуртків і факультативів;

задачі, у яких отримано результат, що може бути використаний при розв'язуванні інших задач;

▲ — закінчення доведення теореми;


рубрика «Коли зроблено уроки».



§ 1

МНОЖИНИ. ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ

1. Множина та її елементи

Ми часто говоримо: косяк риб; зграя птахів; рій бджіл; колекція марок; зібрання картин; набір ручок; букет квітів; компанія друзів; парк машин; отара овець.

Якщо в цих парах перетасувати перші слова, то може вийти смішно. Наприклад, букет овець, косяк картин, колекція друзів тощо. Водночас такі словосполучення, як колекція риб, колекція картин, колекція ручок, колекція машин тощо, достатньо прийнятні. Справа в тому, що слово «колекція» досить універсальне. Однак у математиці є більш всеосяжне слово, яким можна замінити будь-яке з перших слів у наведених парах. Це слово **множина**.

Наведемо ще кілька прикладів множин:

- множина учнів вашого класу;
- множина планет Сонячної системи;
- множина двоцифрових чисел;
- множина пар чисел $(x;\ y)$, які є розв'язками рівняння $x^2 + y^2 = 1$.

Окремі найважливіші множини мають загальноприйняті назви та позначення:

- множина точок площини — **геометрична фігура**;
- множина точок, яким притаманна певна властивість, — **геометричне місце точок (ГМТ)**;
- множина значень аргументу функції f — **область визначення функції** f, яку позначають $D(f)$;
- множина значень функції f — **область значень функції** f, яку позначають $E(f)$;
- множина натуральних чисел, яку позначають буквою $\mathbb{N}$;
- множина цілих чисел, яку позначають буквою $\mathbb{Z}$;
- множина раціональних чисел, яку позначають буквою $\mathbb{Q}$;
- множина дійсних чисел, яку позначають буквою $\mathbb{R}$.

Множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ — приклади **числових** множин. Також прикладами числових множин є **числові проміжки**. Наприклад, проміжки $[-3;\ 2]$, $(5;\ +\infty)$, $(-\infty;\ -4]$ є числовими множинами.

Як правило, множини позначають великими латинськими літерами: A, B, C, D тощо.

Об'єкти, які складають множину, називають **елементами** цієї множини. Зазвичай елементи позначають малими латинськими літерами: a, b, c, d тощо.

Якщо a належить множині A, то пишуть $a \in A$ (читають: «a належить множині A»). Якщо b не належить множині A, то пишуть $b \notin A$ (читають: «b не належить множині A»).

Наприклад, $12 \in \mathbb{N}$, $-3 \notin \mathbb{N}$, $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Якщо множина A складається з трьох елементів a, b, c, то пишуть $A = \{a,\ b,\ c\}$.

Наприклад, якщо M — множина натуральних дільників числа 6, то пишуть $M = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$. Множина дільників числа 6, які є складеними числами, має такий вигляд: $\{6\}$. Це приклад **одноелементної** множини.

Позначення множини за допомогою фігурних дужок, у яких указано список її елементів, є зручним у тих випадках, коли множина складається з невеликої кількості елементів.

Означення. **Дві множини A і B називають рівними, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто кожний елемент множини A належить множині B і, навпаки, кожний елемент множини B належить множині A.**

Якщо множини A і B рівні, то пишуть $A = B$.

З означення випливає, що ***множина однозначно визначається своїми елементами***. Якщо множину записано за допомогою фігурних дужок, то порядок, у якому виписано її елементи, не має значення. Так, множина, яка складається з трьох елементів a, b, c, припускає шість варіантів запису:

$$\{a,\ b,\ c\},\ \{a,\ c,\ b\},\ \{b,\ a,\ c\},\ \{b,\ c,\ a\},\ \{c,\ a,\ b\},\ \{c,\ b,\ a\}.$$

Оскільки з означення рівних множин випливає, що, наприклад, $\{a,\ b,\ c\} = \{a,\ a,\ b,\ c\}$, то надалі будемо розглядати множини, які складаються з різних елементів. Так, множина букв слова «шаровари» має вигляд {ш, а, р, о, в, и}.

Зауважимо, що $\{a\} \neq \{\{a\}\}$. Справді, множина $\{a\}$ складається з одного елемента a; множина $\{\{a\}\}$ складається з одного елемента — множини $\{a\}$.

Найчастіше множину задають одним із двох таких способів.

Перший спосіб полягає в тому, що множину задають указанням (переліком) усіх її елементів. Ми вже використовували цей спосіб, записуючи множину за допомогою фігурних дужок, у яких зазначали список її елементів. Зрозуміло, що не всяку множину можна задати в такий спосіб. Наприклад, множину парних чисел так задати не можна.

Другий спосіб полягає в тому, що задається **характеристична властивість** елементів множини, тобто властивість, яка притаманна всім елементам даної множини і тільки їм. Наприклад, властивість «натуральне число при діленні на 2 дає в остачі 1» задає множину непарних чисел.

Якщо x — довільний елемент множини A, яку задано за допомогою характеристичної властивості її елементів, то пишуть $A = \{x \mid ...\}$. Тут після вертикальної риски вказують характеристичну властивість, якій має задовольняти елемент x, щоб належати множині A.

Розглянемо кілька прикладів.

- $\{x \mid x = 3n,\ n \in \mathbb{N}\}$ — множина натуральних чисел, кратних 3.
- $\{x \mid x(x^2 - 1) = 0\}$ — множина коренів рівняння $x(x^2 - 1) = 0$. Ця множина дорівнює множині $\{-1, 0, 1\}$, яку, у свою чергу, можна задати за допомогою іншої характеристичної властивості:
$$\{x \mid x \in \mathbb{Z},\ |x| < 2\}.$$
Тому можна записати, що $\{x \mid x(x^2 - 1) = 0\} =$
$$= \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ |x| < 2\}.$$
- Нехай $(x; y)$ — координати точки. Тоді множина точок $\{(x; y) \mid y = 2x - 1,\ x$ — будь-яке число$\}$ — пряма, яка є графіком функції $y = 2x - 1$.

Узагалі, для точок координатної площини множина $\{(x; y) \mid y = f(x),\ x \in D(f)\}$ — це графік функції f.

У геометрії, задаючи множину точок за допомогою характеристичної властивості, тим самим задають ГМТ.

- Якщо A, B — дані точки площини, X — довільна точка цієї площини, то множина $\{X \mid XA = XB\}$ — серединний перпендикуляр відрізка AB.

Якщо задавати множину характеристичною властивістю її елементів, то може статися, що жодний об'єкт такої властивості не має.

Розглянемо приклади.

- Множина трикутників, сторони яких пропорційні числам 1, 2, 5. З нерівності трикутника випливає, що ця множина не містить жодного елемента.
- Позначимо через A множину учнів вашого класу, які є майстрами спорту з шахів. Може виявитися, що множина A також не містить жодного елемента.
- Розглядаючи множину коренів довільного рівняння, слід передбачити ситуацію, коли рівняння коренів не має.

Наведені приклади вказують на те, що зручно до сукупності множин віднести ще одну особливу множину, яка не містить жодного елемента. Її називають **порожньою множиною** і позначають символом $\varnothing$.

Наприклад, $\{x \mid 0x = 2\} = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x < 1\} = \varnothing$.

Зазначимо, що множина $\{\varnothing\}$ не є порожньою. Вона містить один елемент — порожню множину.

ПРИКЛАД Доведіть, що множина A всіх парних натуральних чисел дорівнює множині B чисел, які можна подати у вигляді суми двох непарних натуральних чисел.

Розв'язання. Нехай $x \in A$. Тоді можна записати, що $x = 2m$, де m — натуральне число. Маємо: $x = 2m = (2m - 1) + 1$. Отже, $x \in B$.

Тепер припустимо, що $x \in B$. Тоді $x = (2n - 1) + (2k - 1)$, де n і k — натуральні числа. Маємо: $x = 2n - 1 + 2k - 1 = 2(n + k - 1)$. Отже, $x \in A$.

Маємо: якщо $x \in A$, то $x \in B$, і навпаки, якщо $x \in B$, то $x \in A$. Звідси $A = B$.

Вправи

1.° Як називають множину точок кута, рівновіддалених від його сторін?

2.° Як називають множину вовків, які підкоряються одному ватажку?

3.° Назвіть яку-небудь множину запорізьких козаків.

4.° Як називають множину вчителів, які працюють в одній школі?

5.° Поставте замість зірочки знак $\in$ або $\notin$ так, щоб отримати правильне твердження:

1) $5 * \mathbb{N}$; 3) $-5 * \mathbb{Q}$; 5) $3{,}14 * \mathbb{Q}$; 7) $\sqrt{2} * \mathbb{R}$;
2) $0 * \mathbb{N}$; 4) $-\frac{1}{2} * \mathbb{Z}$; 6) $\pi * \mathbb{Q}$; 8) $\sqrt{3} * \varnothing$.

6.° Дано функцію $f(x) = x^2 + 1$. Поставте замість зірочки знак $\in$ або $\notin$ так, щоб отримати правильне твердження:

1) $3 * D(f)$; 3) $0 * E(f)$; 5) $1{,}01 * E(f)$.
2) $0 * D(f)$; 4) $\frac{1}{2} * E(f)$;

7.° Які з наступних тверджень є правильними:

1) $1 \in \{1, 2, 3\}$; 3) $\{1\} \in \{1, 2\}$; 5) $\varnothing \notin \{1, 2\}$;
2) $1 \notin \{1\}$; 4) $\{1\} \in \{\{1\}\}$; 6) $\varnothing \in \{\varnothing\}$?

8.° Запишіть множину коренів рівняння:

1) $x(x - 1) = 0$; 3) $x = 2$;
2) $(x - 2)(x^2 - 4) = 0$; 4) $x^2 + 3 = 0$.

9.° Задайте переліком елементів множину:
1) правильних дробів зі знаменником 7;
2) правильних дробів, знаменник яких не перевищує 4;
3) букв у слові «математика»;
4) цифр числа 5555.

10.° Задайте переліком елементів множину:
1) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x^2 - 1 = 0\}$;
2) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ |x| < 3\}$;
3) $C = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \leqslant 15,\ x = 7k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

11.° Задайте переліком елементів множину:
1) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ x(2|x| - 1) = 0\}$;
2) $B = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ -3 \leqslant x < 2\}$.

12.• Чи рівні множини A і B, якщо:
1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 1\}$;
2) $A = \{(1; 0)\}$, $B = \{(0; 1)\}$;
3) $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$?

13.• Чи рівні множини A і B, якщо:
1) $A = [-1; 2)$, $B = (-1; 2]$;
2) A — множина коренів рівняння $|x| = x$, $B = [0; +\infty)$;
3) A — множина чотирикутників, у яких протилежні сторони попарно рівні; B — множина чотирикутників, у яких діагоналі точкою перетину діляться навпіл?

14.• Які з наступних множин дорівнюють порожній множині:
1) множина трикутників, сума кутів яких дорівнює 181°;
2) множина гірських вершин заввишки понад 8800 м;
3) множина гострокутних трикутників, медіана яких дорівнює половині сторони, до якої вона проведена;
4) множина функцій, графіком яких є коло?

15.• Нехай O — задана точка площини. Що являє собою множина точок M цієї площини:
1) $\{M \mid OM = 3 \text{ см}\}$;
2) $\{M \mid OM > 5 \text{ см}\}$;
3) $\{M \mid OM \leqslant 5 \text{ см}\}$?

16.• Які з наведених множин дорівнюють порожній множині:
1) $A = \left\{x \mid x \in \mathbb{Z},\ \frac{1}{2}x - 2 = 0\right\}$;
2) $B = \{x \mid x \neq x\}$;
3) $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ |x| < 1\}$;
4) $D = \{x \mid 3x^4 + 5x^2 + 7 = 0\}$;
5) $E = \{x \mid x > |x|\}$?

2. Підмножина. Операції над множинами

Розглянемо множину цифр десяткової системи числення $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Виокремимо з множини A ті її елементи, які є парними цифрами. Отримаємо множину $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, усі елементи якої є елементами множини A.

Означення. Множину B називають підмножиною множини A, якщо кожний елемент множини B є елементом множини A.

Це записують так: $B \subset A$ або $A \supset B$ (читають: «множина B є підмножиною множини A» або «множина A містить множину B»).

Розглянемо приклади:
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \supset \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$;
- $\{x \mid 2x - 1 = 0\} \subset \left\{x \mid x^2 = \frac{1}{4}\right\}$;
- $\{a\} \subset \{a, b\}$;
- множина учнів вашого класу є підмножиною множини учнів вашої школи;
- множина ссавців є підмножиною множини хребетних;
- множина точок променя CB є підмножиною множини точок прямої AB (рис. 1).

Рис. 1

Для ілюстрації співвідношень між множинами використовують схеми, які називають **діаграмами Ейлера**.

На рисунку 2 зображено множину A (більший круг) і множину B (менший круг, який міститься в більшому). Ця схема означає, що $B \subset A$ (або $A \supset B$).

На рисунку 3 за допомогою діаграм Ейлера показано співвідношення між множинами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}$.

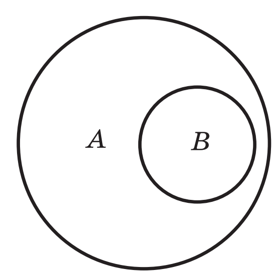
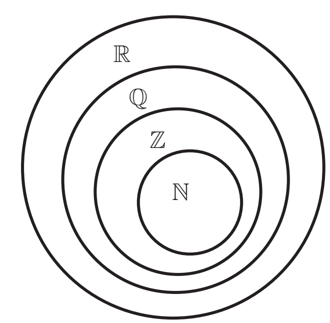


Рис. 2



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Рис. 3

Якщо $B \subset A$, то за допомогою рисунка 2 можна зробити такі висновки:

1) для того щоб елемент x належав множині A, достатньо, щоб він належав множині B;

2) для того щоб елемент x належав множині B, необхідно, щоб він належав множині A.

Наприклад, якщо A — множина натуральних чисел, кратних 5, а B — множина натуральних чисел, кратних 10, то очевидно, що $B \subset A$. Тому для того, щоб натуральне число n було кратним 5 ($n \in A$), достатньо, щоб воно було кратним 10 ($n \in B$). Для того щоб натуральне число n було кратним 10 ($n \in B$), необхідно, щоб воно було кратним 5 ($n \in A$).

Із означень підмножини і рівності множин випливає, що коли $A \subset B$ і $B \subset A$, то $A = B$.

Якщо в множині B немає такого елемента, який не належить множині A, то множина B є підмножиною множини A. У силу цих міркувань порожню множину вважають підмножиною будь-якої множини. Справді, порожня множина не містить жодного елемента, отже, у ній немає елемента, який не належить даній множині A. Тому для будь-якої множини A справедливе твердження: $\varnothing \subset A$.

Будь-яка множина A є підмножиною самої себе, тобто $A \subset A$.

Означення. Якщо $B \subset A$ і $B \neq A$, то множину B називають власною підмножиною множини A.

Наприклад, множина $\mathbb{Z}$ є власною підмножиною множини $\mathbb{Q}$.

ПРИКЛАД 1 Випишіть усі підмножини множини $A = \{a, b, c\}$.

Розв'язання. Маємо: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\varnothing$. Усього отримали 8 підмножин. В 11 класі буде доведено, що кількість підмножин n-елементної множини дорівнює 2^n.

Нехай A — множина розв'язків рівняння $x + y = 5$, а B — множина розв'язків рівняння $x - y = 3$. Тоді множина C розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x+y=5, \\ x-y=3 \end{cases}$$

складається з усіх елементів, які належать і множині A, і множині B. У такому випадку кажуть, що множина C є **перетином** множин A і B.

Означення. Перетином множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать і множині A, і множині B.

Перетин множин A і B позначають так: $A \cap B$.

З означення випливає, що

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}.$$

Легко переконатися, що розв'язком системи, яка розглядалася, є пара (4; 1). Цей факт можна записати так:

$$\{(x; y) \mid x + y = 5\} \cap \{(x; y) \mid x - y = 3\} = \{(4; 1)\}.$$

Якщо множини A і B не мають спільних елементів, то їх перетином є порожня множина, тобто $A \cap B = \varnothing$. Також зазначимо, що $A \cap \varnothing = \varnothing$.

З означення перетину двох множин випливає, що коли $A \subset B$, то $A \cap B = A$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \cap A = A$.

Наприклад,

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N},$$
$$\mathbb{Z} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}.$$

Перетин множин зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера. На рисунку 4 заштрихована фігура зображує множину $A \cap B$.

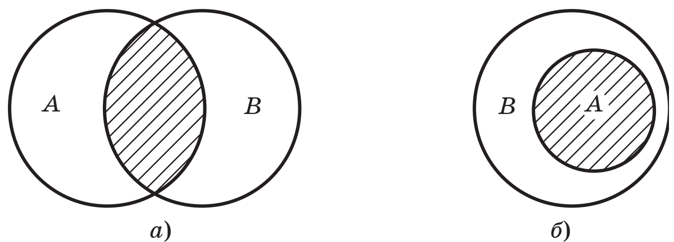


Рис. 4

Для того щоб розв'язати рівняння $(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$, треба розв'язати кожне з рівнянь $x^2 - x = 0$ і $x^2 - 1 = 0$.

Маємо: $A = \{0, 1\}$ — множина коренів першого рівняння, $B = \{-1, 1\}$ — множина коренів другого рівняння. Зрозуміло, що множина $C = \{-1, 0, 1\}$, кожний елемент якої належить або множині A, або множині B, є множиною коренів заданого рівняння. Множину C називають **об'єднанням** множин A і B.

Означення. Об'єднанням множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать хоча б одній з цих множин: або множині A, або множині B.

Об'єднання множин A і B позначають так: $A \cup B$. З означення випливає, що

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

Наприклад, $(-3;\ 1) \cup (0;\ 2] = (-3;\ 2]$, $(-\infty;\ 1) \cup (-1;\ +\infty) = (-\infty;\ +\infty)$.

Об'єднання множин ірраціональних і раціональних чисел дорівнює множині дійсних чисел.

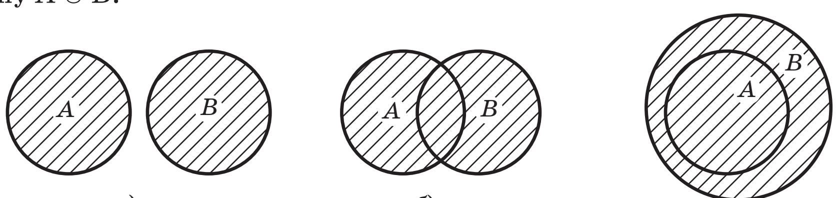
Якщо треба знайти об'єднання множин розв'язків рівнянь (нерівностей), то кажуть, що треба розв'язати **сукупність рівнянь (нерівностей)**. Сукупність записують за допомогою квадратної дужки. Так, щоб розв'язати рівняння $(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$, треба розв'язати сукупність рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - x = 0, \\ x^2 - 1 = 0. \end{array}\right.$$

Зауважимо, що $A \cup \varnothing = A$.

З означення об'єднання двох множин випливає, що коли $A \subset B$, то $A \cup B = B$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \cup A = A$.

Об'єднання множин зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера. На рисунку 5 заштрихована фігура зображує множину $A \cup B$.



а) *б)* *в)*

Рис. 5

Часто доводиться розглядати перетин і об'єднання трьох і більше множин.

Перетин множин A, B і C — це множина всіх елементів, які належать і множині A, і множині B, і множині C (рис. 6).

Наприклад, щоб розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 17, \end{cases}$$

треба знайти перетин трьох множин: $\{(x, y) \mid x + y = 5\}$, $\{(x, y) \mid x - y = 3\}$ і $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 17\}$.

Об'єднання множин A, B і C — це множина всіх елементів, які належать хоча б одній з цих множин: або множині A, або множині B, або множині C (рис. 7).

Наприклад, об'єднання множин гострокутних, тупокутних і прямокутних трикутників — це множина всіх трикутників.

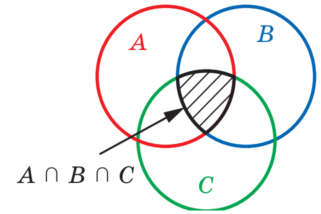


Рис. 6

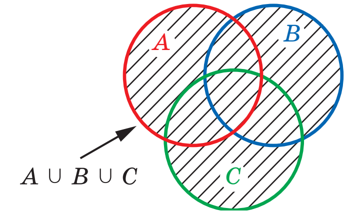


Рис. 7

ПРИКЛАД 2 Знайдіть перетин множин A і B, якщо:

1) $A = \{x \mid x = 5k,\ k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 3n,\ n \in \mathbb{N}\}$;
2) A — множина ромбів, B — множина прямокутників;
3) $A = \{x \mid x > 3\}$, $B = \{x \mid x \leqslant 4\}$;
4) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x = 2m,\ m \in \mathbb{N}\}$, B — множина простих чисел.

Розв'язання

1) A — множина натуральних чисел, кратних 5.

B — множина натуральних чисел, кратних 3.

Тоді множина $A \cap B$ складається з усіх натуральних чисел, кратних 5 і 3 одночасно, тобто з усіх натуральних чисел, кратних 15. Отже, $A \cap B = \{x \mid x = 15k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

2) Множина $A \cap B$ складається з усіх чотирикутників, які одночасно є і ромбами, і прямокутниками. Отже, шукана множина — це множина квадратів.

3) $A \cap B = \{x \mid 3 < x \leqslant 4\}$.

4) A — множина парних натуральних чисел. Оскільки у множині простих чисел є тільки одне парне число (число 2), то $A \cap B = \{2\}$.

ПРИКЛАД 3 Знайдіть об'єднання множин A і B, якщо:

1) $A = \{x \mid x = 2k - 1,\ k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 2n,\ n \in \mathbb{N}\}$;
2) $A = \{x \mid x = 2k - 1,\ k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 4n + 1,\ n \in \mathbb{N}\}$;
3) $A = \{X \mid OX < 3\}$, $B = \{X \mid OX = 3\}$, де O і X — точки площини, O — дана точка.

Розв'язання

1) A — множина непарних натуральних чисел, B — множина парних натуральних чисел. Тоді $A \cup B$ — це множина натуральних чисел, тобто $A \cup B = \mathbb{N}$.

2) A — множина непарних натуральних чисел. Елементами множини B є тільки непарні числа. Отже, $B \subset A$. Тоді $A \cup B = A = \{x \mid x = 2k - 1,\ k \in \mathbb{N}\}$.

3) Очевидно, що $A \cup B = \{X \mid OX \leqslant 3\}$. Отже, $A \cup B$ — це круг з центром O і радіусом 3.

Вправи

17.° Назвіть кілька підмножин учнів вашого класу.

18.° Назвіть які-небудь геометричні фігури, які є підмножинами множини точок прямої.

19.° Назвіть які-небудь геометричні фігури, які є підмножинами множини точок круга.

20.° Нехай A — множина букв у слові «координата». Множина букв якого слова є підмножиною множини A:

1) кора;	4) крокодил;	7) тин;	10) дорога;
2) дірка;	5) нитки;	8) криниця;	11) дар;
3) картина;	6) нирки;	9) сокирка;	12) кардинал?

21.° Нехай A — множина цифр числа 1958. Чи є множина цифр числа x підмножиною множини A, якщо:

1) $x = 98$;	3) $x = 519$;	5) $x = 195888$;
2) $x = 9510$;	4) $x = 5858$;	6) $x = 91258$?

22.° Нехай $A \neq \varnothing$. Які дві різні підмножини завжди має множина A?

23.° Знайдіть перетин множин цифр, які використовуються в запису чисел:
1) 555288 і 82223; 2) 470713 і 400007.

24.° Нехай A — множина двоцифрових чисел, B — множина простих чисел. Чи належить множині $A \cap B$ число: 5, 7, 11, 31, 57, 96?

25.° Знайдіть множину спільних дільників чисел 30 і 45.

26.° Знайдіть об'єднання множин цифр, які використовуються в запису чисел:
1) 27288 і 56383; 2) 55555 і 777777.

27.° Які з наступних тверджень є правильними:
1) $\{a\} \in \{a, b\}$; 3) $a \subset \{a, b\}$;
2) $\{a\} \subset \{a, b\}$; 4) $\{a, b\} \in \{a, b\}$?

28.• Доведіть, що коли $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$.

29.• Розмістіть дані множини у такій послідовності, щоб кожна наступна множина була підмножиною попередньої:
1) A — множина прямокутників;
B — множина чотирикутників;
C — множина квадратів;
D — множина паралелограмів;
2) A — множина ссавців;
B — множина собачих;
C — множина хребетних;
D — множина вовків;
E — множина хижих ссавців.

30.• Зобразіть за допомогою діаграм Ейлера співвідношення між множинами:
1) A — множина невід'ємних раціональних чисел;
$B = \{0\}$;
$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;
2) $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;
A — множина натуральних чисел, кратних 6;
B — множина натуральних чисел, кратних 3.

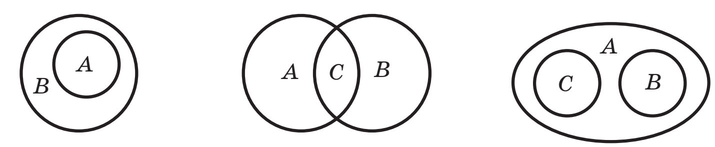
31.• Запишіть за допомогою символу $\subset$ співвідношення між множинами:
$A = \{x \mid x = 2n,\ n \in \mathbb{N}\}$; $C = \{x \mid x = 10n,\ n \in \mathbb{N}\}$;
$B = \{x \mid x = 50n,\ n \in \mathbb{N}\}$; $D = \{x \mid x = 5n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

32.• Яка з множин A або B є підмножиною другої, якщо:
$A = \{x \mid x = 4n + 2,\ n \in \mathbb{N}\}$; $B = \{x \mid x = 8n + 2,\ n \in \mathbb{N}\}$?

33.• Дано множини $\{7\}$, $\{11\}$, $\{19\}$, $\{7, 11\}$, $\{7, 19\}$, $\{11, 19\}$, $\varnothing$, які є всіма власними підмножинами деякої множини A. Запишіть множину A.

34.• Запишіть усі підмножини множини $\{1, 2\}$.

35.• Опишіть мовою «необхідно й достатньо» належність елемента x множинам A, B і C (рис. 8).



а) б) в)

Рис. 8

36.• Замість крапок поставте слово «необхідно» або «достатньо», щоб утворилося правильне твердження:
1) для того щоб трикутник був рівностороннім, ..., щоб два його кути були рівні;
2) для того щоб чотирикутник був паралелограмом, ..., щоб дві його сторони були паралельні;
3) для того щоб число ділилося націло на 3, ..., щоб воно ділилося націло на 9;
4) для того щоб остання цифра десяткового запису числа була нулем, ..., щоб число було кратне 5.

37.• Відомо, що для будь-якої множини B множина A є її підмножиною. Знайдіть множину A.

38.• Які з наступних тверджень є правильними:

1) $\{a, b\} \cap \{a\} = a$;
2) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a, b\}$;
3) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$;
4) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{b\}$?

39.• Знайдіть перетин множин A і B, якщо:

1) A — множина рівнобедрених трикутників, B — множина рівносторонніх трикутників;
2) A — множина прямокутних трикутників, B — множина рівносторонніх трикутників;
3) A — множина двоцифрових чисел, B — множина натуральних чисел, кратних 19;
4) A — множина одноцифрових чисел, B — множина простих чисел.

40.• Знайдіть перетин множин A і B, якщо:

1) $A = \{x \mid x < 19\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x > 11\}$;
2) $A = \{x \mid x = 4n,\ n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 6n,\ n \in \mathbb{N}\}$;
3) $A = \{(x;\ y) \mid 2x - y = 1\}$, $B = \{(x;\ y) \mid x + y = 5\}$.

41.• Накресліть два трикутники так, щоб їх перетином була така геометрична фігура: 1) відрізок; 2) точка; 3) трикутник; 4) п'ятикутник; 5) шестикутник.

42.• Які фігури можуть бути перетином двох променів, що лежать на одній прямій?

43.• Відомо, що для будь-якої множини B виконується рівність $A \cap B = A$. Знайдіть множину A.

44.• Які з наступних тверджень є правильними:

1) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{a, b\}$;
2) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{b\}$;
3) $\{a, b\} \cup \{a\} = \{a\}$;
4) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{\{b\}\}$?

45.• Знайдіть об'єднання множин A і B, якщо:

1) A — множина рівнобедрених трикутників, B — множина рівносторонніх трикутників;
2) A — множина простих чисел, B — множина складених чисел;
3) A — множина простих чисел, B — множина непарних чисел.

46.• Знайдіть об'єднання множин A і B, якщо:

1) $A = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$, $B = \{x \mid (x - 1)(x - 2) = 0\}$;
2) $A = \{x \mid 2x + 3 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + 3 = 2\}$;
3) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x < 5\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x < 7\}$.

47.• Накресліть два трикутники так, щоб їх об'єднанням був: 1) чотирикутник; 2) трикутник; 3) шестикутник. Чи може об'єднання трикутників бути відрізком?

48.• Які фігури можуть бути об'єднанням двох променів, що лежать на одній прямій?

49.• Відомо, що для будь-якої множини B виконується рівність $A \cup B = B$. Знайдіть множину A.

50.• Наведіть приклад такої одноелементної множини, що її елемент є одночасно підмножиною даної множини.

3. Скінченні множини. Взаємно однозначна відповідність

Якщо множина містить скінченну кількість елементів, то її називають **скінченною**, а якщо в ній нескінченно багато елементів — то **нескінченною**. Порожню множину вважають скінченною.

Наприклад, множина учнів вашого класу — скінченна множина, а множина натуральних чисел — нескінченна множина.

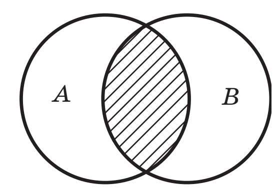


Рис. 9

Якщо A — скінченна множина, то кількість її елементів позначатимемо так: $n\ (A)$.

Наприклад, якщо A — це множина днів тижня, то $n\ (A) = 7$; якщо B — це множина двоцифрових чисел, то $n\ (B) = 90$. Зрозуміло, що $n\ (\varnothing) = 0$.

Нехай A і B — такі скінченні множини, що $A \cap B = \varnothing$. Тоді очевидно, що

$$n\ (A \cup B) = n\ (A) + n\ (B). \qquad (1)$$

Якщо A і B — скінченні множини, причому $A \cap B \neq \varnothing$ (рис. 9), то до суми $n\ (A) + n\ (B)$ двічі входить кількість елементів їх перетину, тобто двічі враховується число $n\ (A \cap B)$. Отже, у цьому випадку

$$\boxed{n\ (A \cup B) = n\ (A) + n\ (B) - n\ (A \cap B)} \qquad (2)$$

Коли $A \cap B = \varnothing$, то $n\ (A \cap B) = 0$. Тому формула (2) є узагальненням формули (1).

ПРИКЛАД 1 У фізико-математичному класі 25 учнів, і всі вони люблять математику. Відомо, що 23 учні люблять алгебру, а 21 — геометрію. Скільки учнів цього класу люблять і алгебру, і геометрію?

Розв'язання. Нехай A — множина учнів, які люблять алгебру, B — множина учнів, які люблять геометрію. Тоді $n(A) = 23$, $n(B) = 21$, $n(A \cup B) = 25$. Водночас $A \cap B$ — множина учнів, які люблять і алгебру, і геометрію. З формули (2) отримуємо $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 23 + 21 - 25 = 19$.

З'ясуємо, як знайти кількість елементів множини $A \cup B \cup C$, де A, B і C — скінченні множини.

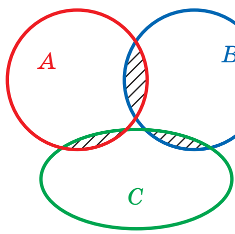


Рис. 10

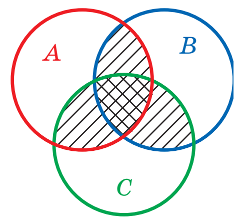


Рис. 11

Якщо $A \cap B \cap C = \varnothing$ (рис. 10), то зрозуміло, що

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - \\ - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A). \quad (3)$$

Якщо $A \cap B \cap C \neq \varnothing$ (рис. 11), то права частина формули (3) не враховує кількості спільних елементів множин A, B і C. Отже, у цьому випадку формула набуває вигляду:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - \\ - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C). \quad (4)$$

Аналогічну формулу можна отримати для будь-якої кількості множин. Її називають «формулою включення-виключення».

ПРИКЛАД 2 У спортивній школі є три секції: акробатики, баскетболу, волейболу. Відомо, що школу відвідують 200 школярів, а кожну із секцій — 80 школярів. Доведіть, що знайдеться 14 школярів, які відвідують одні й ті самі дві секції.

Розв'язання. Позначимо множини школярів, які відвідують секції акробатики, баскетболу й волейболу, буквами $А$, $Б$ і $В$ відповідно. Тоді $n(А \cup Б \cup В) = 200$, $n(А) = n(Б) = n(В) = 80$. Підставимо ці значення у формулу (4):

$$200 = 80 + 80 + 80 - n(А \cap Б) - n(Б \cap В) - \\ - n(В \cap А) + n(А \cap Б \cap В).$$

Звідси

$$n(А \cap Б) + n(Б \cap В) + n(В \cap А) = 40 + n(А \cap Б \cap В) \geqslant 40.$$

Якщо припустити, що кожне з чисел $n(А \cap Б)$, $n(Б \cap В)$, $n(В \cap А)$ не перевищує 13, то їх сума не перевищує 39. Отримали суперечність.

Нам доволі часто доводиться порівнювати скінченні множини за кількістю їх елементів.

Як дізнатися, чи вистачить у шкільній бібліотеці підручників з алгебри і початків аналізу для десятикласників? Звичайно, можна порахувати окремо учнів і підручники, а можна видати підручники учням. Якщо, наприклад, усім підручників вистачить, а в бібліотеці не залишиться жодного підручника, то це означатиме, що десятикласників і підручників однакова кількість.

Так само, щоб дізнатися, чи вистачить стільців у класі, зовсім не обов'язково їх перераховувати. Достатньо запросити учнів сісти на стільці. Якщо, наприклад, місць вистачить не всім, то це означатиме, що кількість учнів більша, ніж кількість стільців.

У цих прикладах, порівнюючи кількість елементів двох множин, ми *кожному елементу однієї множини поставили у відповідність єдиний елемент другої множини*. Скористаємося цією ідеєю в наступному прикладі.

ПРИКЛАД 3 Порівняйте кількість елементів множини A двоцифрових чисел і множини B трицифрових чисел, десятковий запис яких закінчується цифрою 1.

Розв'язання. Поставимо у відповідність кожному двоцифровому числу те трицифрове число, яке отримаємо з нього, приписавши справа одиницю. Дістанемо:

$$\begin{array}{cccccc} 10, & 11, & 12, & \dots, & 98, & 99 \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & & \Updownarrow & \Updownarrow \\ 101, & 111, & 121, & \dots, & 981, & 991 \end{array}$$

Зазначимо, що за такої відповідності всі елементи множини B виявляться «задіяними». Справді, якщо в числі виду $\overline{ab1}$ закреслити останню цифру, то отримаємо двоцифрове число $\overline{ab}$.

На основі відповідності між елементами множин A і B можна зробити висновок, що $n(A) = n(B)$.

Означення. **Якщо кожному елементу множини A поставлено у відповідність єдиний елемент множини B і при цьому будь-який елемент множини B є відповідним деякому єдиному елементу множини A, то кажуть, що між множинами A і B встановлено взаємно однозначну відповідність.**

У прикладі 3 кожному двоцифровому числу було поставлено у відповідність єдине трицифрове число зазначеного вигляду і, навпаки, кожне таке трицифрове число є відповідним єдиному двоцифровому числу. Отже, між множинами, що розглядаються, було встановлено взаємно однозначну відповідність.

Зазначимо, що коли в класі всі учні сидять і при цьому є вільні стільці, то між множиною учнів і множиною стільців взаємно однозначної відповідності не встановлено.

Цікаво, що з дитинства кожному з нас неодноразово доводилося встановлювати взаємно однозначні відповідності. Дитина, промовляючи «один», «два», «три» і при цьому послідовно показуючи на машинку, м'ячик і коника, тим самим встановлює взаємно однозначну відповідність між множиною своїх іграшок і множиною $\{1, 2, 3\}$. Рахуючи іграшки, дитина ніби прив'язує до кожного з предметів ярлики з написами «1», «2», «3». Зауважимо, що, показуючи іграшки в іншому порядку, наприклад, «м'ячик», «коник», «машинка», одержуємо іншу взаємно однозначну відповідність між цими множинами.

Якщо між скінченними множинами A і B встановлено взаємно однозначну відповідність, то $n(A) = n(B)$. *І навпаки, якщо* $n(A) = n(B)$, *то між скінченними множинами A і B можна встановити взаємно однозначну відповідність.*

Отже, між скінченними множинами з різною кількістю елементів неможливо встановити взаємно однозначну відповідність. Це дозволяє сформулювати таке правило.

Якщо між скінченними множинами A і C встановлено взаємно однозначну відповідність і $C \subset B$, $C \neq B$, *то* $n(A) < n(B)$.

Вправи

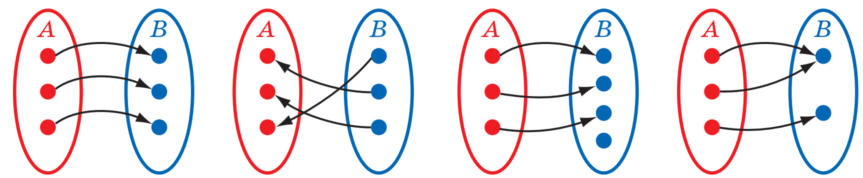
51.° Кожний з 32 учнів класу вивчає щонайменше одну іноземну мову. З них 20 вивчають англійську мову і 18 — французьку. Скільки учнів вивчають і англійську, і французьку мови?

52.° Відомо, що 26 мешканців будинку тримають котів і собак, 16 з них мають котів, а 15 — собак. Скільки мешканців мають і собаку, і кота?

53.° З анкети, проведеної в класі, з'ясувалося, що з 30 учнів класу 18 мають брата, 14 — сестру, а у 10 учнів є сестра і брат. Чи є в цьому класі учні, у яких немає ні сестри, ні брата?

54.° У грудні було 10 ясних і затишних днів, 15 днів був вітер і 12 днів ішов сніг. Скільки днів у грудні була хуртовина (сніг і вітер)?

55.° Чи встановлено взаємно однозначну відповідність між множинами A і B (рис. 12)? Точками на рисунку зображено елементи множин.



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 12

56.° Одинадцять гравців футбольної команди отримали футболки з номерами від 1 до 11. Між якими множинами встановлено взаємно однозначну відповідність?

57.° У результаті жеребкування кожна з 20 пар фігуристів отримала порядковий номер її виступу. Між якими множинами встановлено взаємно однозначну відповідність?

58.° Кожний глядач, який прийшов до кінотеатру, купив квиток із зазначеними рядом і місцем. Між якими множинами встановлено взаємно однозначну відповідність?

59.• Між першими n натуральними числами і правильними дробами зі знаменником 7 установлено взаємно однозначну відповідність. Знайдіть n.

60.• Кожному елементу множини $\{n, n + 1, n + 2\}$, де $n \in \mathbb{N}$, поставили у відповідність остачу від ділення цього елемента на 3. Чи встановлено таким чином взаємно однозначну відповідність між множинами $\{n, n + 1, n + 2\}$ і $\{0, 1, 2\}$?

61.* В олімпіаді взяли участь 46 учнів. Їм було запропоновано розв'язати 3 задачі. Після підведення підсумків з'ясувалося, що кожен з учасників розв'язав хоча б одну задачу. Першу і другу задачі розв'язали 11 учасників, другу і третю — 8 учасників, першу і третю — 5 учасників, а всі три задачі розв'язали тільки 2 учасники. Доведіть, що одну із задач розв'язали не менше ніж половина учасників.

4. Нескінченні множини. Зліченні множини

У попередньому пункті ми розглядали скінченні множини, між якими встановлено взаємно однозначну відповідність, і з'ясували, що такі множини мають однакову кількість елементів.

Керуючись принципом «частина менша від цілого», доходимо висновку, що коли B — власна підмножина скінченної множини A, то $n(B) < n(A)$. Отже, між скінченною множиною та її власною підмножиною неможливо встановити взаємно однозначну відповідність.

Оскільки $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, то, здавалося б, природно вважати, що цілих чисел більше, ніж натуральних. Проте це не так.

Нескінченні множини в цьому сенсі поводяться незвично.

Розглянемо множину $\mathbb{N}$ і підмножину M парних чисел. Множина M є власною підмножиною множини $\mathbb{N}$. Кожному елементу $n \in \mathbb{N}$ поставимо у відповідність єдиний елемент $2n \in M$:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \dots, & n, & \dots \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & & \Updownarrow & \\ 2, & 4, & 6, & 8, & \dots, & 2n, & \dots \end{array}$$

При цьому кожне парне число відповідатиме єдиному натуральному числу. Тим самим між множинами $\mathbb{N}$ і M встановлено взаємно однозначну відповідність, а тому не можна вважати, що в множині $\mathbb{N}$ міститься більше елементів, ніж в її власній підмножині — множині парних чисел.

Цей приклад показує, що звичні для нас уявлення про скінченні множини не можна переносити на нескінченні множини.

Узагалі, математиками було доведено, що в будь-якій нескінченній множині A можна виокремити власну підмножину A_1 таким чином, що між множинами A і A_1 можна встановити взаємно однозначну відповідність. Це принципова відмінність нескінченних множин від скінченних.

Якщо множини A і B є скінченними і між ними встановлено взаємно однозначну відповідність, то $n(A) = n(B)$. Якщо ж взаємно однозначну відповідність установлено між нескінченними множинами A і B, то в математиці не прийнято говорити, що ці множини мають однакову кількість елементів, а кажуть, що множини A і B мають однакову **потужність**.

Означення. Дві множини називають рівнопотужними, якщо між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність.

Для нескінченних множин слово «потужність» означає те саме, що для скінченних множин «кількість елементів».

Доведемо ще один дивовижний факт: множина точок прямої рівнопотужна множині точок **відкритого відрізка** (відрізка, у якого «виколото» кінці), тобто пряма містить стільки ж точок, скільки містить їх відкритий відрізок.

На рисунку 13 зображено пряму MN, яка дотикається до півкола з центром у точці O і діаметром AB, паралельним прямій MN. Вилучимо з півкола точки A і B. Таке півколо називають **відкритим**.

Кожній точці X відкритого півкола поставимо у відповідність точку X_1 прямої MN, яка лежить на промені OX. Зрозуміло, що точці X відповідає єдина точка прямої MN і, навпаки, кожна точка прямої MN є відповідною єдиній точці відкритого півкола. Отже, установлено взаємно однозначну відповідність між множиною точок прямої і множиною точок відкритого півкола.

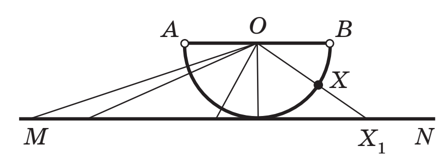


Рис. 13

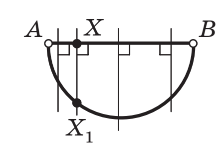


Рис. 14

На рисунку 14 показано, як встановити взаємно однозначну відповідність між множиною точок відкритого відрізка і множиною точок відкритого півкола. Отже, множина точок відкритого відрізка AB рівнопотужна множині точок прямої MN.

У розповіді на с. 27 ви дізнаєтесь ще про один несподіваний факт, у який важко повірити, керуючись лише інтуїцією: множина точок сторони квадрата рівнопотужна множині точок квадрата.

Означення. Множину, рівнопотужну множині натуральних чисел, називають зліченною множиною.

Вище ми показали, що множина парних чисел є зліченною. Зрозуміло, що жодна скінченна множина не є зліченною.

Натуральне число n, яке відповідає елементу a зліченної множини A, називають *номером цього елемента*. Якщо елемент a має номер n, то пишуть: a_n. Коли встановлюють взаємно однозначну відповідність між множинами A і $\mathbb{N}$, кожний елемент множини A отримує свій номер, і ці елементи можна розмістити послідовно:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

Так, якщо елементи множини P простих чисел розмістити у порядку зростання 2, 3, 5, 7, 11, ..., то всі елементи цієї множини можна пронумерувати:

$$\begin{array}{cccccc} 2, & 3, & 5, & 7, & 11, & \ldots \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots \end{array}$$

Тим самим установлено взаємно однозначну відповідність між множинами P і $\mathbb{N}$.

У такий спосіб можна показати, що будь-яка нескінченна підмножина множини $\mathbb{N}$ є зліченною (зробіть це самостійно).

На перший погляд здається, що елементи множини $\mathbb{Z}$ пронумерувати неможливо: адже множина $\mathbb{N}$ є власною підмножиною множини $\mathbb{Z}$. Отже, чисел для нумерації не вистачить: усі вони будуть «витрачені» на множину $\mathbb{N}$.

Проте якщо елементи множини $\mathbb{Z}$ розмістити у вигляді послідовності 0, 1, −1, 2, −2, 3, −3, ..., то тим самим можна кожному цілому числу надати свій номер:

$$\begin{array}{cccccccc} 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & \ldots \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \ldots \end{array}$$

Можна показати, що множина $\mathbb{Q}$ є також зліченною.

Зазначимо, що не будь-яка нескінченна множина є зліченною. Можна довести, що, наприклад, множина $\mathbb{R}$ не є зліченною.

Вправи

62.° Установіть взаємно однозначну відповідність між множиною натуральних чисел і множиною натуральних чисел, кратних 3.

63.° Установіть взаємно однозначну відповідність між множиною натуральних чисел і множиною чисел виду $4n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

64.° Доведіть, що множини парних і непарних натуральних чисел рівнопотужні.

65.° Доведіть, що множина чисел виду 2^n ($n \in \mathbb{N}$) зліченна.

66.° Доведіть, що множина чисел виду $\frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) зліченна.

67.° Установіть взаємно однозначну відповідність між множиною чисел виду 2^n ($n \in \mathbb{N}$) і множиною десяткових дробів виду 0,1; 0,01; 0,001; ... .

68.• Покажіть, що множини точок сторони і діагоналі квадрата рівнопотужні.

69.• Покажіть, що множини точок будь-яких двох концентричних кіл рівнопотужні.

70.•• Покажіть, що множина точок прямої і множина точок кола з «виколотою» точкою рівнопотужні.

71.•• На координатній прямій позначили точки O (0), A (1), B (5). Доведіть, що:

1) множина точок відрізка OA рівнопотужна множині точок відрізка OB;
2) множина точок відрізка OA з «виколотою» точкою O рівнопотужна множині точок променя AB.

72.•• Покажіть, що множини точок будь-яких двох відрізків рівнопотужні.

«Я бачу це, але ніяк не можу цьому повірити!»

Ці слова належать видатному математику, засновнику теорії множин Георгу Кантору. Вони свідчать про те, що навіть генію часом буває складно примирити свою інтуїцію з формальним результатом.

Мабуть, і ви зазнавали подібного дискомфорту, коли логіка міркувань вимушувала вас погодитися з тим, що на будь-якому, навіть дуже маленькому, відрізку стільки ж точок, скільки їх на всій прямій.

Георг Кантор (1845–1918)

А чи можна повірити в те, що множина точок квадрата рівнопотужна множині точок його сторони? Мабуть, ні. Цьому не вірив і сам великий Кантор.

У 1874 р. в одному зі своїх листів до видатного математика Р. Дедекінда (1831–1916) Кантор писав: «Чи можна зіставити поверхню (наприклад, квадратну площадку, включаючи її межі) з відрізком прямої таким чином, щоб кожній точці поверхні відповідала одна точка на цьому відрізку, і навпаки?»

Кантор думав, що відповідь має бути негативною, і намагався це довести протягом трьох років. Проте в 1877 р. він отримує несподіваний результат: будує взаємно однозначну відповідність між множиною точок квадрата і множиною точок його сторони.

Ознайомимося з ідеєю доведення Кантора.

Розглянемо на координатній площині квадрат з вершинами $A\ (0;\ 0)$, $B\ (0;\ 1)$, $C\ (1;\ 1)$, $D\ (1;\ 0)$ (рис. 15).

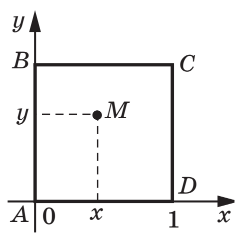


Рис. 15

Нехай точка $M\ (x;\ y)$ належить квадрату. Координати x і y задовольняють нерівності $0 \leqslant x \leqslant 1$ і $0 \leqslant y \leqslant 1$. Тому числа x і y можна подати у вигляді нескінченних десяткових дробів:

$$x = 0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ \ldots,$$

$$y = 0,\beta_1\beta_2\beta_3\ \ldots\ .$$

Зауважимо, що коли $x = 1$ або $y = 1$, то координату можна записати у вигляді дробу $0,999\ldots$.

За допомогою цих записів сконструюємо новий десятковий дріб, «перемішуючи» цифри десяткового запису чисел x і y через одну:

$$z = 0,\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3\ \ldots\ .$$

Точці $M\ (x;\ y)$ поставимо у відповідність точку $K\ (z;\ 0)$. Очевидно, що ця точка належить стороні AD квадрата.

Зрозуміло, що різні точки квадрата мають різні координати. Тому при зазначеній відповідності різним точкам квадрата відповідають різні точки його сторони AD[1].

Після викладеного ви, мабуть, уже не дивуватиметесь тому, що, наприклад, множина точок куба рівнопотужна множині точок його ребра.

Множини, рівнопотужні множині точок відрізка, називають множинами потужності **континууму** (від латинського *continuum* — неперервний).

[1] Деякі числа мають два десяткових записи. Наприклад, дробам $0,7000\ldots$ і $0,6999\ldots$ відповідає одне й те саме число. Оскільки ідея доведення Кантора пов'язана з десятковим записом числа, то в строгому доведенні має бути показано, як вирішується проблема неоднозначності запису числа при встановленні взаємно однозначної відповідності.

§ 2

ФУНКЦІЇ, МНОГОЧЛЕНИ, РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

5. Повторення та розширення відомостей про функцію

У повсякденному житті нам часто доводиться спостерігати процеси, у яких зміна однієї величини (незалежної змінної) призводить до зміни іншої величини (залежної змінної). Вивчення цих процесів потребує створення їх математичних моделей. Однією з таких найважливіших моделей є **функція**.

З цим поняттям ви ознайомилися в 7 класі. Нагадаємо й уточнимо основні відомості.

Нехай X — множина значень незалежної змінної, Y — множина значень залежної змінної. **Функція — це правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної з множини X можна знайти єдине значення залежної змінної з множини Y.**

Зазвичай незалежну змінну позначають буквою x, залежну — буквою y, функцію (правило) — буквою f. Кажуть, що змінна y **функціонально залежить** від змінної x. Цей факт позначають так: $y = f(x)$.

Незалежну змінну ще називають **аргументом функції**.

Множину значень, яких набуває аргумент, тобто множину X, називають **областю визначення функції** і позначають $D(f)$ або $D(y)$.

Так, областю визначення оберненої пропорційності $y = \frac{2}{x}$ є множина $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. Також можна записати $D(y) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$.

У функціональній залежності кожному значенню аргументу x відповідає певне значення залежної змінної y. Значення залежної змінної ще називають **значенням функції** і для функції f позначають $f(x)$. Множину значень, яких набуває залежна змінна y, тобто множину Y, називають **областю значень функції** і позначають $E(f)$ або $E(y)$. Так, областю значень функції $y = \sqrt{x}$ є множина $[0;\ +\infty)$.

Елементами множин $D(f)$ і $E(f)$ можуть бути об'єкти найрізноманітнішої природи.

Так, якщо кожному многокутнику поставити у відповідність його площу, то можна говорити про функцію, область визначення якої — множина многокутників, а область значень — множина додатних чисел.

Якщо кожній людині поставити у відповідність день тижня, у який вона народилася, то можна говорити про функцію, область визначення якої — множина людей, а область значень — множина днів тижня.

Коли $D(f) \subset \mathbb{R}$ і $E(f) \subset \mathbb{R}$, функцію f називають **числовою**.

Якщо областю визначення функції f є множина X, а областю значень — множина Y, то функцію f також називають **відображенням множини X на множину Y**. Слова «відображення» і «функція» є синонімами. Проте термін «відображення» частіше використовують тоді, коли при заданні функції хочуть наголосити, які множини є областю визначення і областю значень.

На рисунку 16 проілюстровано відображення множини X на множину Y (точками позначено елементи множин).

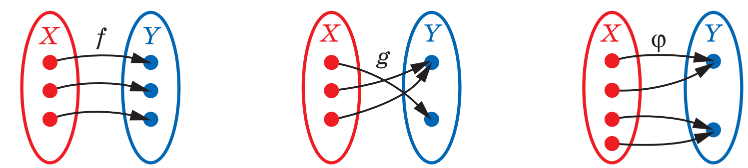


Рис. 16

Відображення f принципово відрізняється від відображень g і φ (рис. 16): у відображенні f кожний елемент множини Y є відповідним деякому єдиному елементу множини X. Таке відображення називають **взаємно однозначним відображенням множини X на множину Y**. Наприклад, нумерація елементів деякої зліченної множини M — це взаємно однозначне відображення множини $\mathbb{N}$ на множину M.

Функцію вважають заданою, якщо вказано її область визначення і правило, за яким за кожним значенням незалежної змінної з області визначення можна знайти значення залежної змінної з області значень.

Функцію можна задати одним з таких способів:

- описово;
- за допомогою формули;
- за допомогою таблиці;
- графічно.

Розглянемо кілька прикладів функцій, заданих описово.

Кожному раціональному числу поставимо у відповідність число 1, а кожному ірраціональному — число 0. Функцію, задану таким чином, називають **функцією Діріхле** і позначають $y = \mathfrak{D}(x)$. Пишуть:

$$\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, \text{ якщо } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Тут $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = \{0, 1\}$.

- Кожному дійсному числу x поставимо у відповідність найбільше ціле число, яке не перевищує число x. Таку функцію називають **цілою частиною числа** x і позначають $y = [x]$. Наприклад, $[\sqrt{2}] = 1$, $[2] = 2$, $[-\sqrt{2}] = -2$. Тут $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = \mathbb{Z}$.
- Кожному дійсному числу x поставимо у відповідність різницю $x - [x]$. Таку функцію називають **дробовою частиною числа** x і позначають $y = \{x\}$. Наприклад, $\{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - [\sqrt{2}] = \sqrt{2} - 1$, $\{2\} = 2 - [2] = 2 - 2 = 0$, $\{-\sqrt{2}\} = -\sqrt{2} - [-\sqrt{2}] = -\sqrt{2} - (-2) = 2 - \sqrt{2}$. Тут $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = [0; 1)$.
- Кожному від'ємному числу поставимо у відповідність число -1, кожному додатному числу — число 1, нулю — число 0. Функцію, задану таким чином, називають **сигнум** (від латинського *signum* — знак) і позначають $y = \operatorname{sgn} x$.

  Пишуть:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, \text{ якщо } x < 0, \\ 0, \quad \text{якщо } x = 0, \\ 1, \quad \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

  Значення цієї функції характеризує знак відповідного аргументу. Зауважимо, що $x \cdot \operatorname{sgn} x = |x|$.
- Розглянемо функцію f, у якої $D(f) = \mathbb{N}$. Вважатимемо, що $f(n) = 1$, якщо десятковий запис числа π містить n цифр 4, що йдуть поспіль, і $f(n) = 0$, якщо цей запис такої властивості не має. Звернемо увагу на те, що значення функції f обчислювати важко. Наприклад, ми не знаємо, чому дорівнює f (10 000 000 000). Проте й у такому випадку функцію вважають заданою.

Найчастіше функцію задають за допомогою формули. Якщо при цьому не вказано область визначення, то вважають, що областю визначення функції є область визначення виразу, який входить до формули. Наприклад, якщо функція f задана формулою $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, то її областю визначення є область визначення виразу $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, тобто проміжок $(1; +\infty)$.

Значення однієї функції можуть слугувати значеннями аргументу іншої функції.

Наприклад, розглянемо функції $f(x) = 2x - 1$ і $g(x) = x^2 + x + 1$. Тоді $f(g(x)) = 2g(x) - 1 = 2(x^2 + x + 1) - 1 = 2x^2 + 2x + 1$. Отже,