А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський,
В. Б. Полонський, М. С. Якір

АЛГЕБРА
І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Підручник
для загальноосвітніх навчальних закладів

Академічний рівень

Харків
«Гімназія»
2010

УДК 373:512
ББК 22.141я721
М52

Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С.
М52 Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів : Академ. рівень. — Х. : Гімназія, 2010. — 320 с.: іл.
ISBN 978-966-474-094-1.

УДК 373:512
ББК 22.141я721

ISBN 978-966-474-094-1

Від авторів

ЛЮБІ ДЕСЯТИКЛАСНИКИ!

Ви починаєте вивчати новий шкільний предмет — **алгебру і початки аналізу.**

Цей предмет надзвичайно важливий. Мабуть, немає сьогодні такої галузі науки, де б не застосовувалися досягнення цього розділу математики. Фізики та хіміки, астрономи та біологи, географи та економісти, навіть мовознавці та історики використовують «математичний інструмент».

Алгебра і початки аналізу — корисний і дуже цікавий предмет, який розвиває аналітичне і логічне мислення, дослідницькі навички, математичну культуру, кмітливість. Ми сподіваємося, що ви в цьому скоро переконаєтеся, чому сприятиме підручник, який ви тримаєте. Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник розділено на п'ять параграфів, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним *шрифтом***. Також не залишайте поза увагою слова, надруковані *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту підібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, які позначено зірочкою (*)). Свої знання можна перевірити, розв'язуючи задачі у тестовій формі з рубрики «Перевір себе».

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете знати більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, є непростим. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Крім того, у підручнику ви зможете прочитати оповідання з історії математики, зокрема про діяльність видатних українських математиків. Назви цих оповідань надруковано синім кольором.

Дерзайте! Бажаємо успіху!

ШАНОВНІ КОЛЕГИ!

Ми дуже сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій і шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано обширний і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Червоним кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, синім кольором — номери задач, які з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу на розсуд учителя можна розв'язувати усно.

Матеріал рубрики «Коли зроблено уроки» може бути використаний для організації роботи математичного гуртка і факультативних занять.

Бажаємо творчого натхнення й терпіння.

Умовні позначення

n°	завдання, що відповідають початковому і середньому рівням навчальних досягнень;
$n^{\bullet}$	завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;
$n^{\bullet\bullet}$	завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;
n^{*}	задачі для математичних гуртків і факультативів;
⊙	доведення теореми, що відповідає достатньому рівню навчальних досягнень;
⊙⊙	доведення теореми, що відповідає високому рівню навчальних досягнень;
▲	закінчення доведення теореми;
	рубрика «Коли зроблено уроки».

§ 1. Множини.
Операції над множинами

1. Множина та її елементи

Ми часто говоримо: косяк риб; зграя птахів; рій бджіл; колекція марок; зібрання картин; набір ручок; букет квітів; компанія друзів; парк машин; отара овець.

Якщо в цих парах перетасувати перші слова, то може вийти смішно. Наприклад, букет овець, косяк картин, колекція друзів тощо. Водночас такі словосполучення, як колекція риб, колекція картин, колекція ручок, колекція машин тощо, достатньо прийнятні. Справа в тому, що слово «колекція» досить універсальне. Однак у математиці є більш всеосяжне слово, яким можна замінити будь-яке з перших слів у наведених парах. Це слово **множина**.

Наведемо ще кілька прикладів множин:

- множина учнів вашого класу;
- множина планет Сонячної системи;
- множина двоцифрових чисел;
- множина пар чисел $(x;\ y)$, які є розв'язками рівняння $x^2 + y^2 = 1$.

Окремі найважливіші множини мають загальноприйняті назви та позначення:

- множина точок площини — **геометрична фігура**;
- множина точок, яким притаманна певна властивість, — **геометричне місце точок (ГМТ)**;
- множина значень аргументу функції f — **область визначення функції** f, яку позначають $D(f)$;
- множина значень функції f — **область значень функції** f, яку позначають $E(f)$;
- множина натуральних чисел, яку позначають буквою $\mathbb{N}$;
- множина цілих чисел, яку позначають буквою $\mathbb{Z}$;
- множина раціональних чисел, яку позначають буквою $\mathbb{Q}$;
- множина дійсних чисел, яку позначають буквою $\mathbb{R}$.

Множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ — приклади **числових** множин. Також прикладами числових множин є **числові проміжки**. Наприклад, проміжки $[-3;\ 2]$, $(5;\ +\infty)$, $(-\infty;\ -4]$ є числовими множинами.

Як правило, множини позначають великими латинськими літерами: A, B, C, D тощо.

Об'єкти, які складають множину, називають **елементами** цієї множини. Зазвичай елементи позначають малими латинськими літерами: a, b, c, d тощо.

Якщо a належить множині A, то пишуть $a \in A$ (читають: «a належить множині A»). Якщо b не належить множині A, то пишуть $b \notin A$ (читають: «b не належить множині A»).

Наприклад, $12 \in \mathbb{N}$, $-3 \notin \mathbb{N}$, $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Якщо множина A складається з трьох елементів a, b, c, то пишуть $A = \{a, b, c\}$.

Наприклад, якщо M — множина натуральних дільників числа 6, то пишуть $M = \{1, 2, 3, 6\}$. Множина дільників числа 6, які є складеними числами, має такий вигляд: $\{6\}$. Це приклад **одноелементної** множини.

Позначення множини за допомогою фігурних дужок, у яких указано список її елементів, є зручним у тих випадках, коли множина складається з невеликої кількості елементів.

Означення. Дві множини A і B називають рівними, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто кожний елемент множини A належить множині B, і навпаки, кожний елемент множини B належить множині A.

Якщо множини A і B рівні, то пишуть $A = B$.

З означення випливає, що ***множина однозначно визначається своїми елементами***. Якщо множину записано за допомогою фігурних дужок, то порядок, у якому виписано її елементи, не має значення. Так, множина, яка складається з трьох елементів a, b, c, припускає шість варіантів запису:

$$\{a, b, c\}, \{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\}.$$

Оскільки з означення рівних множин випливає, що, наприклад, $\{a, b, c\} = \{a, a, b, c\}$, то надалі будемо розглядати множини, які складаються з різних елементів. Так, множина букв слова «шаровари» має вигляд {ш, а, р, о, в, и}.

Найчастіше множину задають одним із двох таких способів.

Перший спосіб полягає в тому, що множину задають указанням (переліком) усіх її елементів. Ми вже використовували цей спосіб, записуючи множину за допомогою фігурних дужок, у яких зазначали список її елементів. Зрозуміло, що не всяку множину можна задати в такий спосіб. Наприклад, множину парних чисел так задати не можна.

Другий спосіб полягає в тому, що задається **характеристична властивість** елементів множини, тобто властивість, яка притаманна всім елементам даної множини і тільки їм. Наприклад, властивість «натуральне число при діленні на 2 дає в остачі 1» задає множину непарних чисел.

Якщо задавати множину характеристичною властивістю її елементів, то може статися, що жодний об'єкт такої властивості не має.

Розглянемо приклади.

- Множина трикутників, сторони яких пропорційні числам 1, 2, 5. З нерівності трикутника випливає, що ця множина не містить жодного елемента.
- Позначимо через A множину учнів вашого класу, які є майстрами спорту з шахів. Може виявитися, що множина A також не містить жодного елемента.
- Розглядаючи множину коренів довільного рівняння, слід передбачити ситуацію, коли рівняння коренів не має.

Наведені приклади вказують на те, що зручно до сукупності множин віднести ще одну особливу множину, яка не містить жодного елемента. Її називають **порожньою множиною** і позначають символом $\varnothing$.

?

1. Наведіть приклади множин.
2. Як позначають множину та її елементи?
3. Як позначають множини натуральних, цілих, раціональних і дійсних чисел?
4. Як записати, що елемент a належить (не належить) множині A?
5. Які множини називають рівними?
6. Які існують способи задання множин?
7. Яку множину називають порожньою? Як її позначають?

Вправи

1.° Як називають множину точок кута, рівновіддалених від його сторін?

2.° Як називають множину вовків, які підкорюються одному ватажку?

3.° Назвіть яку-небудь множину запорізьких козаків.

4.° Як називають множину вчителів, які працюють в одній школі?

5.° Поставте замість зірочки знак $\in$ або $\notin$ так, щоб отримати правильне твердження:

1) $5 * \mathbb{N}$; 3) $-5 * \mathbb{Q}$; 5) $3{,}14 * \mathbb{Q}$; 7) $1 * \mathbb{R}$

2) $0 * \mathbb{N}$; 4) $-\frac{1}{2} * \mathbb{Z}$; 6) $\pi * \mathbb{Q}$; 8) $\sqrt{2} * R$.

6.° Дано функцію $f(x) = x^2 + 1$. Поставте замість зірочки знак $\in$ або $\notin$ так, щоб отримати правильне твердження:

1) $3 * D(f)$; 3) $0 * E(f)$; 5) $1{,}01 * E(f)$.

2) $0 * D(f)$; 4) $\frac{1}{2} * E(f)$;

7.° Які з наступних тверджень є правильними:

1) $1 \in \{1, 2, 3\}$; 3) $\{1\} \in \{1, 2\}$;

2) $1 \notin \{1\}$; 4) $\varnothing \notin \{1, 2\}$?

8.° Запишіть множину коренів рівняння:

1) $x(x - 1) = 0$; 3) $x = 2$;

2) $(x - 2)(x^2 - 4) = 0$; 4) $x^2 + 3 = 0$.

9.° Задайте переліком елементів множину:

1) правильних дробів зі знаменником 7;
2) правильних дробів, знаменник яких не перевищує 4;
3) букв у слові «математика»;
4) цифр числа 5555.

10.• Чи рівні множини A і B, якщо:

1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 1\}$;
2) $A = \{(1; 0)\}$, $B = \{(0; 1)\}$;
3) $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$?

11.• Чи рівні множини A і B, якщо:

1) $A = [-1; 2)$, $B = (-1; 2]$;
2) A — множина коренів рівняння $|x| = x$, $B = [0; +\infty)$;
3) A — множина чотирикутників, у яких протилежні сторони попарно рівні; B — множина чотирикутників, у яких діагоналі точкою перетину діляться навпіл?

12.• Які з наступних множин дорівнюють порожній множині:

1) множина трикутників, сума кутів яких дорівнює 181°;
2) множина гірських вершин заввишки понад 8800 м;
3) множина гострокутних трикутників, медіана яких дорівнює половині сторони, до якої вона проведена;
4) множина функцій, графіком яких є коло?

Вправи для повторення

13. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 7x = 0$; 3) $x^2 - 12x + 24 = 0$; 5) $2x^2 - 5x + 3 = 0$;

2) $4x^2 - 5 = 0$; 4) $-x^2 - 8x + 9 = 0$; 6) $16x^2 + 24x + 9 = 0$.

14. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $6 - 4x > 7 - 6x$;
2) $12 - 5x < 3 - 2x$;
3) $8 + 6y < 2(5y - 8)$;
4) $7a - 3 \geqslant 7(a + 1)$;
5) $4(2 + 3b) - 3(4b - 3) > 0$;
6) $\frac{12 - 9x}{7} \geqslant 7$.
7) $x^2 - 8x + 7 > 0$;
8) $x^2 + x - 2 \leqslant 0$;
9) $9 - x^2 \geqslant 0$;
10) $6x^2 - 2x < 0$;
11) $-x^2 + 3x + 4 > 0$;
12) $0{,}2x^2 > 1{,}8x$.

2. Підмножина. Операції над множинами

Розглянемо множину цифр десяткової системи числення $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Виокремимо з множини A ті її елементи, які є парними цифрами. Отримаємо множину $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, усі елементи якої є елементами множини A.

Означення. Множину B називають підмножиною множини A, якщо кожний елемент множини B є елементом множини A.

Це записують так: $B \subset A$ або $A \supset B$ (читають: «множина B є підмножиною множини A» або «множина A містить множину B»).

Наприклад, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \supset \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\{a\} \subset \{a, b\}$, $(1; 2] \subset [1; 2]$, $[2; 5] \subset (1; +\infty)$.

Множина учнів вашого класу є підмножиною множини учнів вашої школи.

Множина ссавців є підмножиною множини хребетних.

Множина точок променя CB є підмножиною множини точок прямої AB (рис. 1).

Для ілюстрації співвідношень між множинами використовують схеми, які називають **діаграмами Ейлера**.

На рисунку 2 зображено множину A (більший круг) і множину B (менший круг, який міститься в більшому). Ця схема означає, що $B \subset A$ (або $A \supset B$).

На рисунку 3 за допомогою діаграм Ейлера показано співвідношення між множинами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}$.

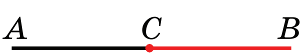


Рис. 1

З означень підмножини і рівності множин випливає, що коли $A \subset B$ і $B \subset A$, то $A = B$.

Будь-яка множина A є підмножиною самої себе, тобто $A \subset A$.

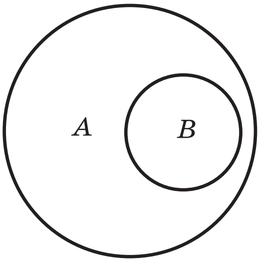
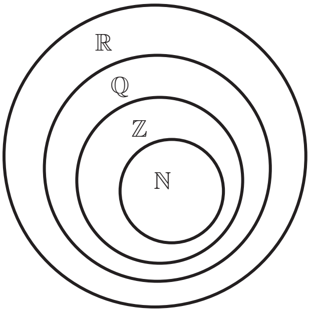


Рис. 2



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Рис. 3

Якщо в множині B немає такого елемента, який не належить множині A, то множина B є підмножиною множини A. У силу цих міркувань порожню множину вважають підмножиною будь-якої множини. Справді, порожня множина не містить жодного елемента, отже, у ній немає елемента, який не належить даній множині A. Тому для будь-якої множини A справедливе твердження: $\varnothing \subset A$.

ПРИКЛАД Випишіть усі підмножини множини $A = \{a, b, c\}$.

Розв'язання. Маємо: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\varnothing$.

Нехай A — множина розв'язків рівняння $x + y = 5$, а B — множина розв'язків рівняння $x - y = 3$. Тоді множина C розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 3 \end{cases}$$

складається з усіх елементів, які належать і множині A, і множині B. У такому випадку кажуть, що множина C є **перетином** множин A і B.

Означення. Перетином множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать і множині A, і множині B.

Перетин множин A і B позначають так: $A \cap B$.

Наприклад, $[-1; 3) \cap (2; +\infty) = (2; 3)$ (рис. 4).

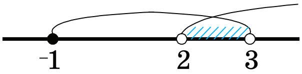


Рис. 4

Якщо множини A і B не мають спільних елементів, то їх перетином є порожня множина, тобто $A \cap B = \varnothing$. Також зазначимо, що $A \cap \varnothing = \varnothing$.

З означення перетину двох множин випливає, що коли $A \subset B$, то $A \cap B = A$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \cap A = A$.

Наприклад,

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N},$$
$$\mathbb{Z} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}.$$

Перетин множин зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера. На рисунку 5 заштрихована фігура зображує множину $A \cap B$.

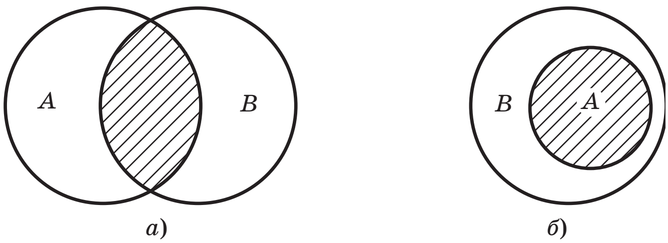


Рис. 5

Для того щоб розв'язати рівняння $(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$, треба розв'язати кожне з рівнянь $x^2 - x = 0$ і $x^2 - 1 = 0$.

Маємо: $A = \{0, 1\}$ — множина коренів першого рівняння, $B = \{-1, 1\}$ — множина коренів другого рівняння. Зрозуміло, що множина $C = \{-1, 0, 1\}$, кожний елемент якої належить або множині A, або множині B, є множиною коренів заданого рівняння. Множину C називають **об'єднанням** множин A і B.

Означення. Об'єднанням множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать хоча б одній з цих множин: або множині A, або множині B.

Об'єднання множин A і B позначають так: $A \cup B$.

Наприклад, $(-3; 1) \cup (0; 2] = (-3; 2]$, $(-\infty; 1) \cup (-1; +\infty) = (-\infty; +\infty)$.

Об'єднання множин ірраціональних і раціональних чисел дорівнює множині дійсних чисел.

Зауважимо, що $A \cup \varnothing = A$.

З означення об'єднання двох множин випливає, що коли $A \subset B$, то $A \cup B = B$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \cup A = A$.

Наприклад, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Z} = \boldsymbol{Q}$, $\mathbb{N} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

Об'єднання множин зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера. На рисунку 6 заштрихована фігура зображує множину $A \cup B$.

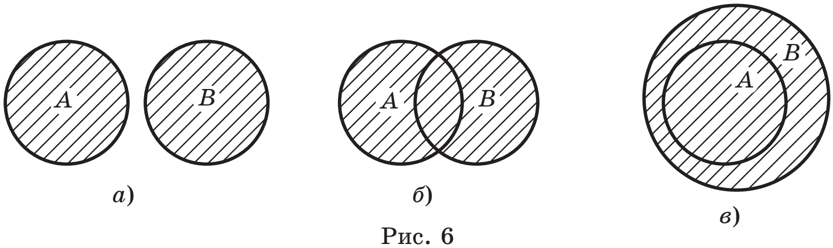


Рис. 6

Якщо треба знайти об'єднання множин розв'язків рівнянь (нерівностей), то кажуть, що треба розв'язати **сукупність рівнянь (нерівностей).**

Сукупність записують за допомогою квадратної дужки. Так, щоб розв'язати рівняння $(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$, треба розв'язати сукупність рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - x = 0, \\ x^2 - 1 = 0. \end{array}\right.$$

?

1. Яку множину називають підмножиною даної множини?
2. Як наочно ілюструють співвідношення між множинами?
3. Яка множина є підмножиною будь-якої множини?
4. Що називають перетином двох множин?
5. Що називають об'єднанням двох множин?
6. Як за допомогою діаграм Ейлера ілюструють перетин (об'єднання) двох множин?

Вправи

15.° Назвіть кілька підмножин учнів вашого класу.

16.° Назвіть які-небудь геометричні фігури, які є підмножинами множини точок прямої.

17.° Назвіть які-небудь геометричні фігури, які є підмножинами множини точок круга.

18.° Нехай A — множина букв у слові «координата». Множина букв якого слова є підмножиною множини A:

1) кора;	4) крокодил;	7) тин;	10) дорога;
2) дірка;	5) нитки;	8) криниця;	11) дар;
3) картина;	6) нирки;	9) сокирка;	12) кардинал?

19.° Нехай A — множина цифр числа 1958. Чи є множина цифр числа x підмножиною множини A, якщо:

1) $x = 98$; 3) $x = 519$; 5) $x = 195888$;
2) $x = 9510$; 4) $x = 5858$; 6) $x = 91258$?

20.° Нехай $A \neq \varnothing$. Які дві різні підмножини завжди має множина A?

21.° Які з наступних тверджень є правильними:

1) $\{a\} \in \{a, b\}$; 3) $a \subset \{a, b\}$;
2) $\{a\} \subset \{a, b\}$; 4) $\{a, b\} \in \{a, b\}$?

22.• Доведіть, що коли $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$.

23.• Розмістіть дані множини у такій послідовності, щоб кожна наступна множина була підмножиною попередньої:

1) A — множина прямокутників;
B — множина чотирикутників;
C — множина квадратів;
D — множина паралелограмів;
2) A — множина ссавців;
B — множина собачих;
C — множина хребетних;
D — множина вовків;
E — множина хижих ссавців.

24.• Зобразіть за допомогою діаграм Ейлера співвідношення між множинами:

1) A — множина невід'ємних раціональних чисел;
$B = \{0\}$;
$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;
2) $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;
A — множина натуральних чисел, кратних 6;
B — множина натуральних чисел, кратних 3.

25.• Запишіть усі підмножини множини $\{1, 2\}$.

26.• Запишіть усі підмножини множини $\{-1, 0, 1\}$.

27.• Які з наступних тверджень є правильними:

1) $\{a, b\} \cap \{a\} = a$; 3) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$;
2) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a, b\}$; 4) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{b\}$?

28.• Знайдіть перетин множин цифр, які використовуються в запису чисел:

1) 555288 і 82223; 2) 470713 і 400007.

29.• Нехай A — множина двоцифрових чисел, B — множина простих чисел. Чи належить множині $A \cap B$ число: 5, 7, 11, 31, 57, 96?

30.• Знайдіть множину спільних дільників чисел 30 і 45.

31.• Знайдіть перетин множин A і B, якщо:
1) A — множина рівнобедрених трикутників, B — множина рівносторонніх трикутників;
2) A — множина прямокутних трикутників, B — множина рівносторонніх трикутників;
3) A — множина двоцифрових чисел, B — множина натуральних чисел, кратних 19;
4) A — множина одноцифрових чисел, B — множина простих чисел.

32.• Накресліть два трикутники так, щоб їх перетином була така геометрична фігура: 1) відрізок; 2) точка; 3) трикутник; 4) п'ятикутник; 5) шестикутник.

33.• Які фігури можуть бути перетином двох променів, що лежать на одній прямій?

34.• Знайдіть:

1) $[-4; 6) \cap (-2; 7)$;
2) $(-\infty; 3) \cap (1; 4)$;
3) $(-\infty; 2) \cap (3; 8]$;
4) $\mathbb{N} \cap (-3; 4]$;
5) $(-2; 2) \cap \mathbb{Z}$;
6) $(-1; 1] \cap [1; +\infty)$;
7) $(-1; 1] \cap (1; +\infty)$;
8) $\mathbb{R} \cap (-2; 3)$.

35.• Знайдіть:

1) $(-\infty; 2) \cap \mathbb{N}$;
2) $(-\infty; 1) \cap \mathbb{N}$;
3) $[-1; 1) \cap \mathbb{Z}$;
4) $(-\infty; -7) \cap \mathbb{R}$.

36.• Які з наступних тверджень є правильними:

1) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{a, b\}$;
2) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{b\}$;
3) $\{a, b\} \cup \{a\} = \{a\}$;
4) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{\{b\}\}$?

37.• Знайдіть об'єднання множин цифр, які використовуються в запису чисел:

1) 27288 і 56383;
2) 55555 і 777777.

38.• Знайдіть об'єднання множин A і B, якщо:
1) A — множина рівнобедрених трикутників, B — множина рівносторонніх трикутників;
2) A — множина простих чисел, B — множина складених чисел;
3) A — множина простих чисел, B — множина непарних чисел.

39.• Накресліть два трикутники так, щоб їх об'єднанням був: 1) чотирикутник; 2) трикутник; 3) шестикутник. Чи може об'єднання трикутників бути відрізком?

40. Які фігури можуть бути об'єднанням двох променів, що лежать на одній прямій?

41. Знайдіть:

1) $(-2;\ 5] \cup (2;\ 7]$; 3) $(-\infty;\ 8) \cup [-2;\ +\infty)$; 5) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{N}$;
2) $(-\infty;\ 3) \cup (-3;\ 3]$; 4) $\mathbb{R} \cup (-7;\ 2]$; 6) $\mathbb{R} \cup \mathbb{N}$.

42. Знайдіть:

1) $(-\infty;\ 1] \cup [1;\ +\infty)$; 3) $\mathbb{R} \cup \mathbb{Q}$;
2) $(-\infty;\ 5) \cup (3;\ 5]$; 4) $(5;\ +\infty) \cup \mathbb{R}$.

Вправи для повторення

43. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2}{x-4} = \dfrac{4x}{x-4}$; 3) $\dfrac{4}{(x+1)^2} + \dfrac{2}{1-x^2} - \dfrac{1}{1-x} = 0$;

2) $\dfrac{x}{x-3} - \dfrac{5}{x+3} = \dfrac{18}{x^2-9}$; 4) $\dfrac{12}{(x-5)(x+1)} + \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{3}{x-5}$.

44. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 6x+3 \geqslant 0, \\ 7-4x < 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+x-6 \leqslant 0, \\ x > 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x+19 \leqslant 5x-1, \\ 10x < 3x+21; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2-x-12 \geqslant 0, \\ 10-3x-x^2 > 0. \end{cases}$

45. При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\dfrac{x^2}{x+5}$; 7) $\sqrt{5-x} + \dfrac{1}{3\sqrt{x}}$;

2) $\dfrac{x+4}{x^2-4}$; 8) $\sqrt{7x-42} + \dfrac{1}{x^2-8x}$;

3) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$; 9) $\sqrt{-x^2+3x+4}$;

4) $\dfrac{4}{x-2} + \dfrac{1}{x}$; 10) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x-12}}$;

5) $\sqrt{6-7x}$; 11) $\sqrt{x^2+5x-14} - \dfrac{4}{x^2-49}$;

6) $\dfrac{9}{\sqrt{3x+6}}$; 12) $\dfrac{x+2}{\sqrt{35+2x-x^2}} + \dfrac{2}{\sqrt{8-4x}}$?

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 27–30 на с.___

ПІДСУМКИ

Вивчивши матеріал параграфа «Множини. Операції над множинами», ви дізналися, що:

- об'єкти, які складають множину, називають елементами цієї множини;
- дві множини A і B називають рівними, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто кожний елемент множини A належить множині B, і навпаки, кожний елемент множини B належить множині A. Якщо множини A і B рівні, то пишуть $A = B$. Множина однозначно визначається своїми елементами. Якщо множину записують за допомогою фігурних дужок, то порядок, у якому виписано її елементи, не має значення;
- найчастіше множину задають одним із двох таких способів. Перший спосіб полягає в тому, що множину задають указанням (переліком) усіх її елементів. Другий спосіб полягає в тому, що задається характеристична властивість елементів множини, тобто властивість, яка притаманна всім елементам даної множини і тільки їм;
- множину, яка не містить жодного елемента, називають порожньою множиною і позначають символом $\varnothing$;
- множину B називають підмножиною множини A, якщо кожний елемент множини B є елементом множини A. Це записують так: $B \subset A$ або $A \supset B$ (читають: «множина B є підмножиною множини A» або «множина A містить множину B»);
- для ілюстрації співвідношень між множинами використовують схеми, які називають діаграмами Ейлера;
- коли $A \subset B$ і $B \subset A$, то $A = B$;
- будь-яка множина A є підмножиною самої себе, тобто $A \subset A$;
- для будь-якої множини A справедливе твердження: $\varnothing \subset A$;
- перетином множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать і множині A, і множині B. Перетин множин A і B позначають так: $A \cap B$;

- якщо множини A і B не мають спільних елементів, то їх перетином є порожня множина, тобто $A \cap B = \varnothing$. Також $A \cap \varnothing = \varnothing$;
- коли $A \subset B$, то $A \cap B = A$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \cap A = A$;
- об'єднанням множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать хоча б одній з цих множин: або множині A, або множині B. Об'єднання множин A і B позначають так: $A \cup B$;
- $A \cup \varnothing = A$;
- коли $A \subset B$, то $A \cup B = B$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \cup A = A$;
- якщо треба знайти об'єднання множин розв'язків рівнянь (нерівностей), то кажуть, що треба розв'язати сукупність рівнянь (нерівностей). Сукупність записують за допомогою квадратної дужки.

§ 2. Повторення та розширення відомостей про функцію

3. Функція та її основні властивості

Нагадаємо й уточнимо основні відомості про функцію, з якими ви ознайомилися в 7–9 класах.

У повсякденному житті нам часто доводиться спостерігати процеси, у яких зміна однієї величини (незалежної змінної) призводить до зміни іншої величини (залежної змінної). Вивчення цих процесів потребує створення їх математичних моделей. Однією з таких найважливіших моделей є **функція**.

Нехай X — множина значень незалежної змінної, Y — множина значень залежної змінної. **Функція — це правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної з множини X можна знайти єдине значення залежної змінної з множини Y.**

Зазвичай незалежну змінну позначають буквою x, залежну — буквою y, функцію (правило) — буквою f. Кажуть, що змінна y **функціонально залежить** від змінної x. Цей факт позначають так: $y = f(x)$.

Незалежну змінну ще називають **аргументом функції.**

Множину значень, яких набуває аргумент, тобто множину X, називають **областю визначення функції** і позначають $D(f)$ або $D(y)$.

Наприклад, областю визначення функції $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ є множина $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Множину значень, яких набуває залежна змінна y, тобто множину Y, називають **областю значень функції** і позначають $E(f)$ або $E(y)$. Наприклад, областю значень функції $y = x^2 + 1$ є множина $E(y) = [1; +\infty)$.

Елементами множин $D(f)$ і $E(f)$ можуть бути об'єкти найрізноманітнішої природи.

Так, якщо кожному многокутнику поставити у відповідність його площу, то можна говорити про функцію, область визначення якої — множина многокутників, а область значень — множина додатних чисел.

Якщо кожній людині поставити у відповідність день тижня, у який вона народилася, то можна говорити про функцію, область визначення якої — множина людей, а область значень — множина днів тижня.

Коли $D(f) \subset \mathbb{R}$ і $E(f) \subset \mathbb{R}$, функцію f називають **числовою.**

Функцію вважають заданою, якщо вказано її область визначення і правило, за яким можна за кожним значенням незалежної змінної знайти значення залежної змінної з області значень.

Функцію можна задати одним з таких способів:

- описово;
- за допомогою формули;
- за допомогою таблиці;
- графічно.

Найчастіше функцію задають за допомогою формули. Якщо при цьому не вказано область визначення, то вважають, що областю визначення функції є область визначення виразу, який входить до формули. Наприклад, якщо функція f задана формулою $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, то її областю визначення є область визначення виразу $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, тобто проміжок $(1; +\infty)$.

Означення. Графіком числової функції f називають геометричну фігуру, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції f.

Сказане означає, що коли якась фігура є графіком функції f, то виконуються дві умови:

1) якщо x_0 — деяке значення аргументу, а $f(x_0)$ — відповідне значення функції, то точка з координатами $(x_0; f(x_0))$ належить графіку;
2) якщо $(x_0; y_0)$ — координати довільної точки графіка, то x_0 і y_0 — відповідні значення незалежної і залежної змінних функції f, тобто $y_0 = f(x_0)$.

Фігура на координатній площині може бути графіком деякої числової функції, якщо будь-яка пряма, перпендикулярна до осі абсцис, має з цією фігурою не більше однієї спільної точки. Наприклад, коло не може слугувати графіком жодної функції: тут за заданим значенням аргументу x не завжди однозначно знаходиться значення змінної y (рис. 7).

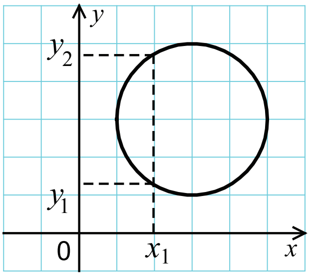
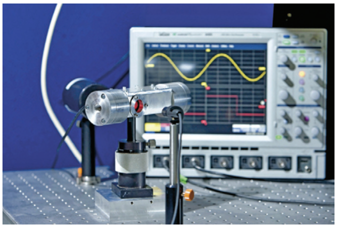
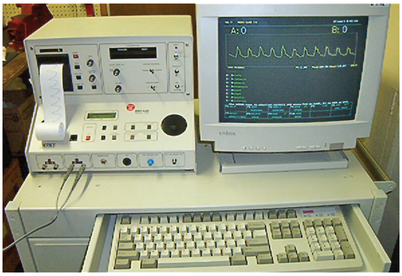


Рис. 7

Графічний спосіб задання функції широко застосовується при дослідженні реальних процесів. Існують прилади, які видають оброблену інформацію у вигляді графіків. Так, у медицині використовують електрокардіограф. Цей прилад рисує криві, які характеризують роботу серця.



Осцилограф



Електрокардіограф

На рисунку 8 зображено графік деякої функції $y = f(x)$.

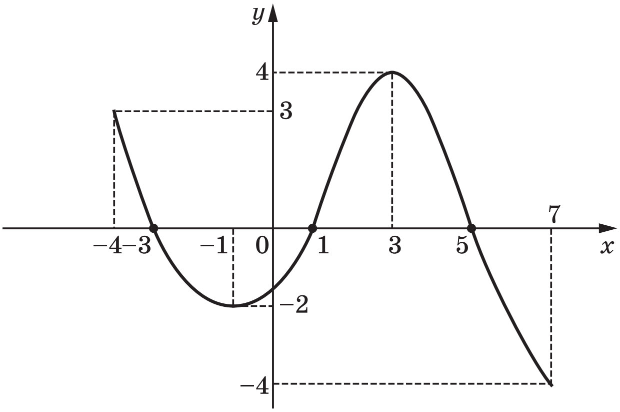


Рис. 8

Її областю визначення є проміжок $[-4; 7]$, а областю значень — проміжок $[-4; 4]$.

При $x = -3$, $x = 1$, $x = 5$ значення функції дорівнює нулю.

Означення. **Значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю, називають *нулем функції*.**

Так, числа -3, 1, 5 є нулями даної функції.

Зауважимо, що на проміжках $[-4; -3)$ і $(1; 5)$ графік функції f розташований над віссю абсцис, а на проміжках $(-3; 1)$ і $(5; 7]$ — під віссю абсцис. Це означає, що на проміжках $[-4; -3)$ і $(1; 5)$ функція набуває додатних значень, а на проміжках $(-3; 1)$ і $(5; 7]$ — від'ємних.

Означення. **Проміжок, на якому функція набуває значень однакового знака, називають *проміжком знакосталості* функції.**

Наприклад, проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції $y = x^2$.

З а у в а ж е н н я. Під час пошуку проміжків знакосталості функції прийнято вказувати проміжки максимальної довжини. Наприклад, проміжок $(-2; -1)$ є проміжком знакосталості функції f (рис. 8), але до відповіді увійде проміжок $(-3; 1)$, який містить проміжок $(-2; -1)$.

Якщо переміщатися по осі абсцис від -4 до -1, то можна помітити, що графік функції йде вниз, тобто значення функції зменшуються. Кажуть, що на проміжку $[-4; -1]$ **функція спадає**. Із збільшенням x від -1 до 3 графік функції йде вгору, тобто значення функції збільшуються. Кажуть, що на проміжку $[-1; 3]$ **функція зростає**.

О з н а ч е н н я. **Функцію f називають з р о с т а ю ч о ю н а м н о ж и н і $M \subset D(f)$, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2, які належать множині M, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.**

О з н а ч е н н я. **Функцію f називають с п а д н о ю н а м н о ж и н і $M \subset D(f)$, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2, які належать множині M, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.**

Часто використовують коротше формулювання.

О з н а ч е н н я. **Функцію f називають з р о с т а ю ч о ю (с п а д н о ю) н а м н о ж и н і M, якщо для будь-яких значень аргументу з цієї множини більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції.**

Наприклад, функція $y = x^2 - 2x$ (рис. 9) спадає на множині $(-\infty; 1]$ і зростає на множині $[1; +\infty)$. Також кажуть, що проміжок $(-\infty; 1]$ є **проміжком спадання**, а проміжок $[1; +\infty)$ є **проміжком зростання** функції $y = x^2 - 2x$.

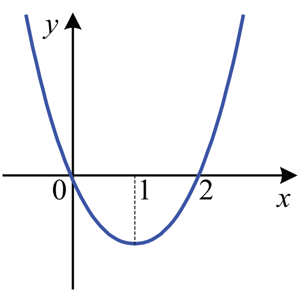


Рис. 9

У задачах на пошук проміжків зростання і спадання функції прийнято вказувати проміжки максимальної довжини.

Якщо функція зростає на всій області визначення, то її називають **зростаючою**. Якщо функція спадає на всій області визначення, то її називають **спадною**.

Наприклад, на рисунку 10 зображено графік функції $y = \sqrt{x}$. Ця функція є зростаючою. На рисунку 11 зображено графік спадної функції $y = -x$.

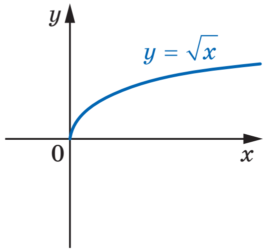


Рис. 10

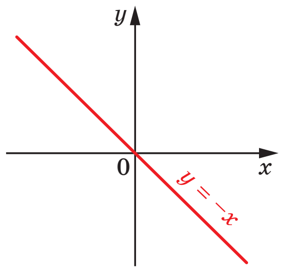


Рис. 11

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що функція $f(x) = \frac{1}{x}$ спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу з проміжку $(0; +\infty)$, причому $x_1 < x_2$. Тоді за властивістю числових нерівностей $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$. Отже, дана функція спадає на проміжку $(0; +\infty)$.

Аналогічно доводять, що функція f спадає на проміжку $(-\infty; 0)$.

Зауважимо, що не можна стверджувати, що дана функція спадає на всій області визначення $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, тобто є спадною. Дійсно, якщо, наприклад, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, то з нерівності $x_1 < x_2$ не випливає, що $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$.

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що лінійна функція $f(x) = kx + b$ є зростаючою при $k > 0$ і спадною при $k < 0$.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу, причому $x_1 < x_2$.

Маємо:

$f(x_1) - f(x_2) = (kx_1 + b) - (kx_2 + b) = kx_1 - kx_2 = k(x_1 - x_2)$.

Оскільки $x_1 < x_2$, то $x_1 - x_2 < 0$.

Якщо $k > 0$, то $k(x_1 - x_2) < 0$, тобто $f(x_1) < f(x_2)$. Отже, при $k > 0$ дана функція є зростаючою.

Якщо $k < 0$, то $k(x_1 - x_2) > 0$, тобто $f(x_1) > f(x_2)$. Отже, при $k < 0$ дана функція є спадною.

Нехай у множині $M \subset D(f)$ існує таке число x_0, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$. У такому випадку говорять, що число $f(x_0)$ — **найбільше значення функції f на множині M**, і записують $\max\limits_{M} f(x) = f(x_0)$.

Якщо для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \leqslant f(x)$, то число $f(x_0)$ називають **найменшим значенням функції f на множині M** і записують $\min\limits_{M} f(x) = f(x_0)$.

Розглянемо кілька прикладів.

Для $f(x) = \sqrt{x}$ і множини $M = [0; 4]$ маємо: $\min\limits_{[0;4]} f(x) = \min\limits_{[0;4]} \sqrt{x} =$ $= f(0) = 0$, $\max\limits_{[0;4]} f(x) = f(4) = 2$ (рис. 12).

Для $f(x) = |x|$ і множини $M = [-1; 2]$ маємо: $\min\limits_{[-1;2]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(2) = 2$ (рис. 13).

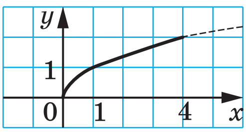


Рис. 12

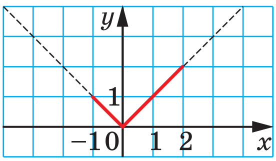


Рис. 13

Якщо c — деяке число і $f(x) = c$ для будь-якого $x \in M$, то число c є і найбільшим, і найменшим значенням функції f на множині M.

Не будь-яка функція на заданій множині $M \subset D(f)$ має найменше або найбільше значення. Так, для функції $f(x) = x^2$ маємо $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = 0$. Найбільшого значення на множині $\mathbb{R}$ ця функція не має.

Функція $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на множині $M = (0; +\infty)$ не має ні найбільшого, ні найменшого значень.

Часто для знаходження найбільшого і найменшого значень функції зручно користуватися таким очевидним фактом:

- якщо функція f зростає на проміжку $[a; b]$, то $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$, $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$ (рис. 14);
- якщо функція f спадає на проміжку $[a; b]$, то $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$, $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ (рис. 15).

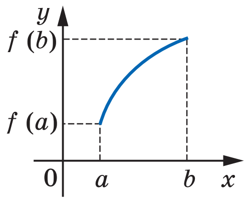


Рис. 14

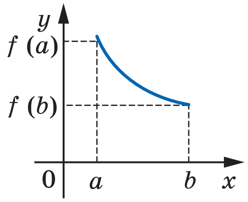


Рис. 15

?

1. Що таке функція?
2. Що називають аргументом функції?
3. Що називають областю визначення функції?
4. Що називають значенням функції?
5. Що називають областю значень функції?
6. Що треба вказати, щоб функція вважалася заданою?
7. Які способи задання функції ви знаєте?
8. Що вважають областю визначення функції, якщо вона задана формулою і при цьому не вказано область визначення?
9. Що називають графіком числової функції?
10. Яке значення аргументу називають нулем функції?
11. Поясніть, що називають проміжком знакосталості функції.
12. Яку функцію називають зростаючою на деякій множині?
13. Яку функцію називають спадною на деякій множині?
14. Яку функцію називають зростаючою?
15. Яку функцію називають спадною?
16. Поясніть, що називають найбільшим (найменшим) значенням функції на даній множині.
17. Як записують, що число $f(x_0)$ є найбільшим (найменшим) значенням функції f на множині M?

Вправи

46.° Функцію задано формулою $f(x) = -3x^2 + 2x$.

1) Знайдіть: $f(1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{3}\right)$; $f(-2)$.

2) Знайдіть значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 0; −1; −56.

3) Чи є правильною рівність: $f(-1) = 5$; $f(2) = -8$?

47.° Функцію задано формулою $f(x) = \frac{18}{x-3}$.

1) Знайдіть: $f(4)$; $f(0)$; $f(9)$; $f(-3)$.

2) Знайдіть значення x, при якому: $f(x) = 9$; $f(x) = 0,5$; $f(x) = -10$.

48.° Кожному натуральному числу, більшому за 15, але меншому від 25, поставили у відповідність остачу від ділення цього числа на 4.

1) Яким способом задано цю функцію?

2) Яка область значень цієї функції?

3) Задайте дану функцію таблично.

49.° Функцію задано формулою $y = \sqrt{x+2}$. Заповніть таблицю відповідних значень x і y:

x	2		$-1,75$	
y		5		0,4

50.° Функцію задано формулою $y = -0,5x + 3$. Заповніть таблицю відповідних значень x і y:

x	-4		1,2	
y		2		-5

51.° Укажіть на рисунку 16 фігуру, яка не може слугувати графіком функції.

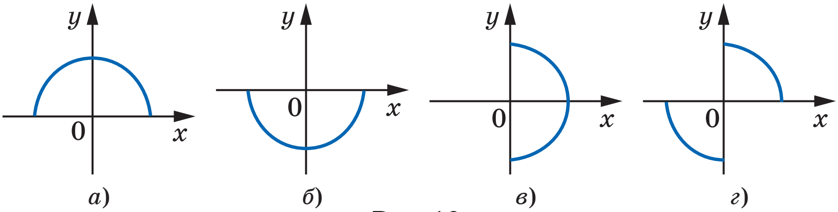


Рис. 16

52.° На рисунку 17 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 5]$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) $f(-3,5)$; $f(-2,5)$; $f(-1)$; $f(2)$;

2) значення x, при яких $f(x) = -2,5$; $f(x) = -2$; $f(x) = 2$;

3) область значень функції;

4) нулі функції;

5) проміжки знакосталості функції;

6) проміжки зростання і проміжки спадання функції;

7) найбільше і найменше значення функції на проміжку: *а*) $[1; 2]$; *б*) $[-2,5; 1]$; *в*) $[-2,5; 3,5]$.

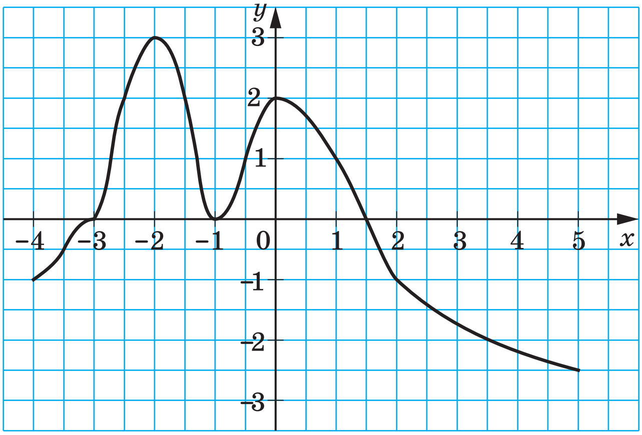


Рис. 17

53.° На рисунку 18 зображено графік функції $y = g(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 4]$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) $f(-4)$; $f(-1)$; $f(1)$; $f(2{,}5)$;
2) значення x, при яких $f(x) = -1$; $f(x) = 2$;
3) область значень функції;
4) нулі функції;
5) проміжки знакосталості функції;
6) проміжки зростання і проміжки спадання функції;
7) найбільше і найменше значення функції на проміжку: *а*) $[-3; -2]$; *б*) $[-3; -1]$; *в*) $[-3; 1]$.

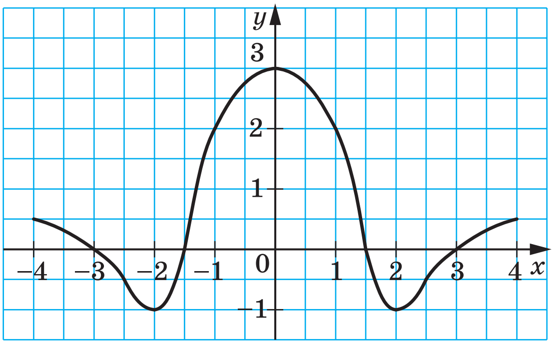


Рис. 18

54.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \dfrac{9}{x+4}$; 2) $f(x) = \dfrac{x-6}{4}$;

3) $f(x)=\sqrt{x-7}$;

4) $f(x)=\dfrac{10}{\sqrt{-x-1}}$;

5) $f(x)=\sqrt{x^2+6x-7}$;

6) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x}$;

7) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$;

8) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{12+4x-x^2}}$;

9) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$;

10) $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{-x}$.

55.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+9}$;

3) $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^2-5x+4}$;

4) $f(x)=\sqrt{x-2}-\sqrt{x-5}$;

5) $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}$;

6) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$.

56.° Знайдіть, не виконуючи побудови, точки перетину з осями координат графіка функції:

1) $f(x)=\dfrac{1}{7}x-6$;

2) $h(x)=\dfrac{12+3x}{2x-5}$;

3) $g(x)=5-x^2$;

4) $\varphi(x)=\sqrt{x}-2$.

57.° Знайдіть, не виконуючи побудови, точки перетину з осями координат графіка функції:

1) $f(x)=5x^2+x-4$;

2) $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x-8}$.

58.° Знайдіть нулі функції:

1) $f(x)=0{,}4x-8$;

2) $g(x)=28+3x-x^2$;

3) $h(x)=\sqrt{x+4}$;

4) $\varphi(x)=\dfrac{x^2+x-30}{x+5}$;

5) $f(x)=x^3-9x$;

6) $g(x)=x^2+4$.

59.° Знайдіть нулі функції:

1) $f(x)=15-\dfrac{1}{3}x$;

2) $f(x)=5x^2+4x-1$;

3) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$;

4) $f(x)=-4$;

5) $f(x)=\dfrac{5-0{,}2x}{x-2}$;

6) $f(x)=x^2+x$.

60.° Знайдіть проміжки знакосталості функції:

1) $y=-7x+3$;

2) $y=x^2-8x+16$;

3) $y=\dfrac{6}{4-x}$;

4) $y=-x^2-1$;

5) $y=3x^2-7x+4$;

6) $y=-2x^2+3x-1$.

61.° Знайдіть проміжки знакосталості функції:

1) $y=0{,}6x+12$;

2) $y=\sqrt{x}+3$;

3) $y=9x-x^2$;

4) $y=4x^2-3x-1$.

62.° Зростаючою чи спадною є функція:

1) $y = 10x - 3$; 3) $y = 9 - 2x$; 5) $y = \frac{1}{5}x$;

2) $y = -3x + 7$; 4) $y = -x$; 6) $y = 2 - 0{,}6x$?

63.° Побудуйте графік функції:

1) $y = -2x + 5$; 3) $y = 2$; 5) $y = x^2 + 2x - 3$;

2) $y = -\frac{1}{3}x$; 4) $y = -\frac{6}{x}$; 6) $y = 2x - x^2$.

Користуючись побудованим графіком, знайдіть нулі, проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

64.° Побудуйте графік функції:

1) $y = 3 - \frac{1}{4}x$; 3) $y = -x^2 + 4x - 3$;

2) $y = \frac{8}{x}$; 4) $y = 9 - x^2$.

Користуючись побудованим графіком, знайдіть нулі, проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

65.° Накресліть графік якої-небудь функції, визначеної на множині дійсних чисел, нулями якої є числа: 1) −3 і 4; 2) −2, 0, 3 і 5.

66.° Накресліть графік якої-небудь функції, визначеної на проміжку [−6; 5], нулями якої є числа −6, 2 і 5.

67.° Накресліть графік якої-небудь функції, визначеної на проміжку [−5; 4], яка:

1) зростає на проміжку [−5; 1] і спадає на проміжку [1; 4];

2) спадає на проміжках [−5; −1] і [2; 4] та зростає на проміжку [−1; 2].

68.° Накресліть графік якої-небудь функції, визначеної на множині дійсних чисел, яка зростає на проміжках (−∞; −2] і [0; 3] та спадає на проміжках [−2; 0] і [3; +∞).

69.• Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \sqrt{x}$; 4) $f(x) = \frac{2x+1}{x-3} + \sqrt{15 + 7x - 2x^2}$;

2) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$; 5) $f(x) = \sqrt{2x-8} + \sqrt{x^2 - 8x + 7}$;

3) $f(x) = \frac{\sqrt{3x-2}}{x^2 - x - 2}$; 6) $f(x) = \sqrt{|x| - x}$.

70.• Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{2}{x-4}$;
2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2+5x+4}$;
3) $f(x)=\sqrt{-x}-\dfrac{3x}{\sqrt{4-x^2}}$;
4) $f(x)=\sqrt{6-x}+\dfrac{2}{x^2-6x}$.

71.• Знайдіть область значень функції:

1) $f(x) = \sqrt{x} + 2$;
2) $f(x) = 7 - x^2$;
3) $f(x) = -6$;
4) $f(x) = |x| - 3$;
5) $f(x) = \sqrt{-x^2}$;
6) $f(x) = \sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}$;
7) $f(x) = x^2 + 4x + 8$;
8) $f(x) = -x^2 - 2x + 5$.

72.• Знайдіть область значень функції:

1) $f(x) = 4 - \sqrt{x}$;
2) $f(x) = x^2 - 6x$.

73.• Задайте формулою яку-небудь функцію, областю визначення якої є:

1) множина дійсних чисел, крім чисел -2 і 3;
2) множина дійсних чисел, не більших за 3;
3) множина дійсних чисел, не менших від -4, крім числа 5;
4) множина, яка складається з одного числа -1.

74.• Задайте формулою яку-небудь функцію, областю визначення якої є:

1) множина дійсних чисел, крім чисел -1, 0 і 1;
2) множина дійсних чисел, менших від 7;
3) множина дійсних чисел, не менших від 2, крім чисел 5 і 6.

75.• Чи є правильним твердження:

1) будь-яка пряма, паралельна осі ординат, перетинає графік будь-якої функції в одній точці;
2) пряма, паралельна осі абсцис, може не перетинати графік функції;
3) пряма, паралельна осі ординат, не може перетинати графік функції більше ніж в одній точці;
4) існують функції, графік яких симетричний відносно осі ординат;
5) існують функції, графік яких симетричний відносно осі абсцис;
6) існують функції, графік яких симетричний відносно початку координат?

76.$^\bullet$ Дано функцію $f(x)=\begin{cases} x+1, \text{ якщо } x<-1, \\ x^2-1, \text{ якщо } x\geqslant -1. \end{cases}$

1) Знайдіть $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$.
2) Побудуйте графік даної функції.
3) Користуючись побудованим графіком, укажіть нулі функції, її проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання.

77.$^\bullet$ Побудуйте графік функції:

1) $f(x)=\begin{cases} x+6, \text{ якщо } x<-2, \\ x^2-x-2, \text{ якщо } -2\leqslant x\leqslant 2, \\ 2-x, \text{ якщо } x>2; \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, \text{ якщо } x\leqslant 0, \\ x^2-2x, \text{ якщо } x>0. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть нулі функції, її проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання.

78.$^\bullet$ Побудуйте графік функції $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{8}{x}, \text{ якщо } x<-2, \\ 2x^2-4, \text{ якщо } -2\leqslant x\leqslant 2, \\ \dfrac{8}{x}, \text{ якщо } x>2. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть нулі функції, її проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання.

79.$^\bullet$ На проміжку $[2; 5]$ знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $f(x)=-\dfrac{10}{x}$; 2) $f(x)=\dfrac{10}{x}$.

80.$^\bullet$ Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y=-x^2+6x-7$ на проміжку:

1) $[1; 2]$; 2) $[1; 4]$; 3) $[4; 5]$.

81.$^\bullet$ Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y=x^2+2x-8$ на проміжку:

1) $[-5; -2]$; 2) $[-5; 1]$; 3) $[0; 3]$.

82.$^\bullet$ При яких значеннях a має два нулі функція:

1) $y=x^2+(a-2)x+25$; 2) $y=2x^2+2(a-6)x+a-2$?

83.• При яких значеннях a має не більше одного нуля функція:

1) $y = x^2 + (a-1)x + 1 - a - a^2$; 2) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 5ax - 9a^2 - 8a$?

84.• Доведіть, що функція $y = \frac{k}{x}$ спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ при $k > 0$ і зростає на кожному з цих проміжків при $k < 0$.

85.• Функція $y = f(x)$ є спадною. Зростаючою чи спадною є функція (відповідь обґрунтуйте):

1) $y = 3f(x)$; 2) $y = \frac{1}{3}f(x)$; 3) $y = -f(x)$?

86.• Функція $y = f(x)$ є зростаючою. Зростаючою чи спадною є функція (відповідь обґрунтуйте):

1) $y = \frac{1}{2}f(x)$; 2) $y = -2f(x)$?

87.•• При якому найменшому цілому значенні m функція $y = 7mx + 6 - 20x$ є зростаючою?

88.•• При яких значеннях k функція $y = kx - 2k + 3 + 6x$ є спадною?

89.•• При яких значеннях b функція $y = 3x^2 - bx + 1$ зростає на множині $[3; +\infty)$?

90.•• При яких значеннях b функція $y = bx - 4x^2$ спадає на множині $[-1; +\infty)$?

91.•• При яких значеннях c найбільше значення функції $y = -0{,}6x^2 + 18x + c$ дорівнює 2?

92.•• При яких значеннях c найменше значення функції $y = 2x^2 - 12x + c$ дорівнює -3?

93.•• Знайдіть область визначення і побудуйте графік функції:

1) $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$;

2) $f(x) = \frac{12x + 48}{x^2 + 4x}$;

3) $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 16}$;

4) $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$;

5) $f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 2}{x + 2} - \frac{x^2 + 4x}{x}$;

6) $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$.

94.•• Знайдіть область визначення і побудуйте графік функції:

1) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} - \frac{x^2 - 1}{x - 1}$;

2) $f(x) = \frac{2x^2 - x^3}{x}$;

3) $y = \frac{6x - 18}{x^2 - 3x}$;

4) $y = \frac{x^4 + 4x^2 - 5}{x^2 - 1}$.

95.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що функція:

1) $f(x) = \dfrac{4}{x+2}$ спадає на проміжку $(-2; +\infty)$;

2) $f(x) = -x^2 - 8x + 10$ зростає на проміжку $(-\infty; -4]$.

96.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що функція:

1) $f(x) = \dfrac{5}{6-x}$ зростає на проміжку $(-\infty; 6)$;

2) $f(x) = x^2 + 2x$ спадає на проміжку $(-\infty; -1]$.

97.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що функція $f(x) = \sqrt{x}$ є зростаючою.

98.$^{\bullet\bullet}$ Функція $y = f(x)$ визначена на множині дійсних чисел, є зростаючою і набуває лише додатних значень. Доведіть, що:

1) функція $y = f^2(x)$ зростає на множині $\mathbb{R}$;

2) функція $y = \dfrac{1}{f(x)}$ спадає на множині $\mathbb{R}$;

3) функція $y = \sqrt{f(x)}$ зростає на множині $\mathbb{R}$.

99.$^{\bullet\bullet}$ Функція $y = f(x)$ визначена на множині дійсних чисел, є зростаючою і набуває лише від'ємних значень. Доведіть, що:

1) функція $y = f^2(x)$ спадає на множині $\mathbb{R}$;

2) функція $y = \dfrac{1}{f(x)}$ спадає на множині $\mathbb{R}$.

100.$^{\bullet\bullet}$ Функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ зростають на деякій множині M. Доведіть, що функція $y = f(x) + g(x)$ зростає на множині M.

101.$^{\bullet\bullet}$ Чи можна стверджувати, що коли функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ зростають на множині M, то функція $y = f(x) - g(x)$ теж зростає на множині M?

102.$^{\bullet\bullet}$ Функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ спадають на деякій множині M і набувають на цій множині від'ємних значень. Доведіть, що функція $y = f(x)g(x)$ зростає на множині M.

103.$^{\bullet\bullet}$ Наведіть приклад двох зростаючих на множині M функцій, добуток яких не є зростаючою на цій множині функцією.

104.$^{\bullet\bullet}$ Сума двох чисел дорівнює 8. Знайдіть:

1) якого найбільшого значення може набувати добуток цих чисел;

2) якого найменшого значення може набувати сума квадратів цих чисел.

105.$^{\bullet\bullet}$ Ділянку землі прямокутної форми обгородили парканом завдовжки 200 м. Яку найбільшу площу може мати ця ділянка?

106.* Доведіть, що функція $f(x) = x^2$ не є ні зростаючою, ні спадною на множині $\mathbb{R}$.