***Пошукова робота на тему:***

*Достатні ознаки збіжності рядів з додатніми членами: ознаки порівняння, Даламбера, радикальна та інтегральна ознаки Коші.*

**План**

* Ознаки порівняння рядів з додатними членами
* Ознака Даламбера
* Радикальна ознака Коші
* Інтегральна ознака Коші

**13.3. Ознаки порівняння рядів з додатними членами**

            Збіжність чи розбіжність знакододатного ряду часто встановлюється шляхом порівняння його з іншим рядом, наперед відомо збіжним або розбіжним. В основі такого порівняння лежать наступні теореми.

            Нехай задані два ряди з додатними членами

                                                (13.4)

                                                         (13.5)

            Теорема.1 Якщо члени  ряду (13.4) не більші відповідних членів ряду (13.5), тобто , то із збіжності ряду (13.5) випливає збіжність ряду (13.4), а із розбіжності ряду (13.4) випливає розбіжність ряду (13.5).

            Д о в е д е н н я. 1) Нехай ряд (13.5) – збігається. Позначимо частинні суми рядів (13.4) і (13.5)  через і . Оскільки

,

то, очевидно,

            Ряд (13.5) – збігається, тому існує границя  його частинної суми

            Із того, що члени рядів (13.4) і (13.5) додатні, випливає, що  і тоді в силу нерівності



            Отже, частинні суми послідовності обмежені. Крім того, послідовність  монотонно зростаюча, а тому вона має скінчену границю при

Отже, ряд (13.4) збігається.

            2) Нехай ряд (13.4) – розбігається. Тоді ряд (13.5) не може збігатися, тому що за доведеною теоремою (п.1) ряд (13.4) повинен збігатися, а це протирічить нашому припущенню.

Приклад.1  Дослідити збіжність ряду

            Р о з в ‘ я з о к. Ряд  знакододатний. Для дослідження його на збіжність використаємо ознаку порівняння:

і ряд  збігається ( тут ), а тому за першою ознакою порівняння даний ряд збігається.

           Зауваження. Теорема має місце і у випадку, коли нерівності  виконуються, починаючи з деякого

           Відкинувши перших  членів у рядах (13.4) і (13.5), які не вплинуть на збіжність чи розбіжність даних рядів, одержимо умови даної теореми.

           Теорема 2. Якщо існує границя

                                                 (13.6)

то із збіжності ряду (13.5), при  випливає збіжність ряду (13.4), а із розбіжності ряду (13.4) – розбіжність ряду (13.5) при

           Д о в е д е н н я. Нехай ряд (13.5) збігається і Взявши довільне як завгодно мале число  за визначенням границі, для

достатньо великих  будемо мати

 , звідки

Одночасно з рядом (13.5) буде збігатися і ряд одержаний множенням його членів на постійний множник  Звідси, за попередньою теоремою, випливає збіжність ряду (13.4).

           Якщо ряд (13.5) розбігається і то в цьому випадку обернене відношення  має скінченну границю і тоді ряд (13.4) повинен бути розбіжним, інакше, якщо б він збігався, то по доведеному, збігався би і ряд (13.4), що протирічить припущенню.

Приклад 2.  Дослідити збіжнісь ряду

Р о з в ‘ я з о к. Нехай   а   Ряд збігається.Оскільки

 то із збіжності ряду  випливає збіжність і ряду

**13.4. Ознака Даламбера**

           Теорема. Якщо для ряду (13.4) з додатними членами відношення го члена до го при має (скінчену) границю  тобто

                                                                  (13.7)

то:

1)      при  ряд (13.4) збігається;

2)      при  ряд (13.4) розбігається;

3)      при  теорема не дає відповіді на питання про збіжність чи розбіжність ряду.

           Д о в е д е н н я. 1) Нехай  Розглянемо деяке число що задовольняє умові Із означення границі та співвідношення (13.7) випливає, що для всіх  буде виконуватися нерівність

                                                                         (13.8)

Дійсно, оскільки величина  прямує до границі  то , починаючи з деякого номера  різниця між величиною  і числом  може бути зроблена за абсолютною величиною менше за довільне як завгодно мале додатне число, в тому числі, менше за тобто

Звідси і випливає нерівність (13.8).

           Запишемо нерівність (13.8) для різних значень  починаючи з номера :

                      .                           (13.9)

           Розглянемо тепер два ряди:

  ,

                            .

Другий ряд є геометричною прогресією з додатним знаменником , тому він збігається. Члени цього ряду, починаючи з  , менші за члени першого ряду. За першою теоремою порівняння рядів ряд  - збігається, а це і є ряд (13.4).

           2) Нехай  Тоді з рівності (13.7) випливає (при ) , що, починаючи з деякого номера , буде виконуватися нерівність

,

або  Але це означає, що члени ряду (13.4) зростають, починаючи з номера , а тому загальний член ряду не прямує до нуля. Значить, ряд розбігається.

           Зауваження 1. Ряд (13.4) буде розбігатися і в тому випадку, коли  Це випливає з того, що починаючи з деякого номера , буде виконуватися нерівність , або .

           Зауваження 2. Якщо , то ознака Даламбера не дає можливості встановити,  збігається чи розбігається даний  ряд. В одному випадку такий ряд може збігатися, а в іншому – розбігатися. Для вирішення питання про збіжність таких рядів необхідно застосувати іншу ознаку.

           Зауваження 3. Якщо , але відношення  для всіх номерів , починаючи з деякого, більше за одиницю, то такий ряд розбігається.

           Це випливає з того, що при  буде виконуватися нерівність , і загальний член не прямує до нуля при

           Приклад 1.  Дослідити збіжність ряду

.

Р о з в ‘ я з о к. Використаємо ознаку Даламбера :       ,

     і

,  тому ряд розбігається.

           Приклад 2.  Дослідити збіжність ряду  .

           Р о з в ‘ я з о к. Використовуючи ознаку Даламбера, одержимо

<1; отже, даний ряд збігається.

**13.5. Радикальна ознака Коші**

Теорема. Якщо для ряду з додатними членами (13.4) величина

                               ,                                  (13.10)

то:

1)      при  ряд (13.4) збігається;

2)      при  ряд (13.4) розбігається;

3)      при  теорема не дає відповіді на питання про збіжність чи розбіжність ряду.

           Д о в е д е н н я. 1) Нехай  Розглянемо число , що задовольняє умові  Починаючи з , будемо мати

звідки випливає, що

або

           Розглянемо тепер два ряди:

 ,

                              .

           Другий ряд збігається, оскільки його члени утворюють геометричну прогресію. Члени першого ряду, починаючи з , менші за члени другого ряду, а тому він за  ознакою порівняння збігається.

           2) Нехай  Тоді, починаючи з деякого номера , будемо мати

або

Але, якщо всі члени даного ряду, починаючи з деякого  , більші за одиницю, то ряд розбігається, оскільки його загальний член не прямує до нуля.

           Зауваження. Як і в ознаці Даламбера, випадок  вимагає додаткового дослідження. Серед таких рядів можуть зустрітися як збіжні, так і розбіжні.

           Приклад.  Дослідити збіжність ряду

.

           Р о з в ‘ я з о к. Використаємо радикальну ознаку Коші:

>1 – ряд розбігається.

**13.6. Інтегральна ознака Коші**

Розглянемо ще одну ознаку, яка відрізняється по формі від всіх попередніх.

           Нехай ряд має форму

                             ,                                              (13.11)

і  є значення при  деякої функції , визначеної для . Припустимо, що ця функція неперервна, додатна і монотонно спадна.

           Теорема. Нехай члени ряду (13.11) додатні і не спадають, тобто

                                                         (13.12)

і нехай така неперервна неспадна функція, що

                              (13.13)

           Тоді :

1)      якщо невласний інтеграл  збігається, то збігається і ряд (13.11);

2)      якщо невласний інтеграл  розбігається, то розбігається і ряд (13.11).

           Д о в е д е н н я. Зобразимо члени ряду геометрично, відкладаючи на осі абсцис номера членів ряду, а на осі ординат – відповідні значення членів ряду   . Побудуємо на цьому ж рисунку графік неперервної функції , що задовольняє умові (13.13). Ясно, що ця функція буде проходити через точки  (рис. 13.1).



|  |
| --- |
|  |
|  |  |

                 Рис.13.1                              Рис.13.2

           Зауважимо, що площа го прямокутника дорівнює , а сума площ побудованих  прямокутників дорівнює частинній сумі ряду  З іншого боку, ступенева фігура, утворена цими прямокутниками, містить область, що обмежена кривою  і прямими ; площа цієї області дорівнює  Отже,

                                                              (13.14)

           На рис.13.2 перший (зліва) із побудованих прямокутників має висоту , а тому його площа буде  Площа другого прямокутника  і т.д. Площа останнього із побудованих прямокутників буде

Отже, сума площ всіх побудованих прямокутників дорівнює

З іншого боку, як легко помітити, ступенева фігура, утворена цими прямокутниками, міститься всередині криволінійної трапеції, обмеженої кривою   і прямими

Площа цієї криволінійної трапеції дорівнює   Тому

звідки

                         .                           (13.15)

Розглянемо тепер обидва випадки.

           1). Нехай невласний інтеграл  збігається. Оскільки

то в силу нерівності (1.15) будемо мати

тобто частинна сума ряду, яка є монотонно зростаючою (члени ряду додатні) , залишається обмеженою. Значить,  при має  скінчену границю , тобто ряд збігається.

           2). Нехай невласний інтеграл  розбігається, тобто  Це значить, що  необмежено зростає при зростанні  Але, в силу нерівності (13.14),  також необмежено зростає при зростанні , тобто ряд розбігається.

           Таким чином, теорема повністю доведена.

           Зауваження . Доведена теорема залишається справедливою і в тому випадку, коли нерівності (13.12) виконуються, лише починаючи з деякого

           Розглянемо ряд

           Оскільки невласний інтеграл  збігається при  і розбігається при  то і даний ряд буде збігатися при  і розбігатися при

           Приклад. Дослідити збіжність ряду

           Р о з в ‘ я з о к.

;

Для дослідження збіжності ряду  використаємо інтегральну ознаку Коші:

; інтеграл збігається, отже, і

ряд  - збігається. Тому за ознакою порівняння

ряд   також збігається.

