**Содержание**

**1.** **Теория**

1.1 Введение. **. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2**

1.2 n-мерное векторное пространство. Преобразование **. . . . . . . . . . . . . . . . . . 2**

систем координат.

1.3 Определение квадратичных форм. Общий вид, **. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .4**

канонический вид, нормальный вид.

1.4 Матрица квадратичнаых форм. Теорема о ранге матрицы.**. . . . . . . . . . . . . 7**

1.5 Различные способы приведения квадратичных форм к **. . . . . . . . . . . . . . . .8**

каноническому виду и к нормальному виду

1.6 Формулы преобразования и матрицы преобразования.**. . . . . . . . . . . . . . . 14**

1.7 Закон инерции квадратичных форм. **. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 18**

1.8 Положительно-определённая квадратичная форма. **. . . . . . . . . . . . . . .. . . 19**

**2. Приложения**

2.1 Приложение 1 . **. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21**

2.2Приложение 2 . **. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .** **. 24**

**1.1 Введение**

В данной работе мы рассмотрим квадратичные формы и основные операции над ними. А также в заключении моей работы решим пять задач по данной теме.

**1.2 n-мерное векторное пространство. Преобразование систем координат.**

Из правил сложения векторов и умножения вектора на число вытекают важные свойства, которые легко доказываются:

1) ; 2) ;

3) ; 4) ;

5) ; 6) ;

7*) т*⋅0 = 0; 8) если *т***α =**0, то или *т =*0, или **α =**0.

Совокупность всех *п*-мерных векторов, рассматриваемая с определёнными в ней операциями сложения векторов и умножения вектора на число, называется *п*−мерным векторным пространством.

*Геометрический смысл сложения и умножения на число двумерных и трёхмерных векторов.*

Вектор **β** называется линейной комбинацией векторов **α**1,**α**2, …, **α***п*, если существуют такие числа *т*1, *т*2, …, *тп*, что

**β** = *т*1**α**1 + *т*2**α**2 … + *т п***α***п*

Линейной оболочкой  системы векторов  называется множество всех линейных комбинаций этой системы векторов.

Система векторов **α**1,**α**2, …, **α***п* называется линейно зависимой, если найдутся такие числа *т*1, *т*2, …, *тп*, хотя бы одно из которых не равно нулю, что имеет место равенство

*т*1**α**1 + *т*2**α**2 … + *т п***α***п*= 0.

Линейно независимая система *п-*мерных векторов

**α**1, **α**2,…, **α*п*** (1)

называется **максимальной линейно независимой системой**, если добавление к ней любого *п-* мерного вектора **β** даёт линейно зависимую систему. Если (1) – максимальная линейно независимая система, то во всякой линейной комбинации векторов **α**1,**α**2,…,**α*п***,**β,** равной нулю, коэффициент при векторе **β** должен отличаться от нуля(!), и вектор **β** можно представить в виде линейной комбинации векторов **α**1, **α**2,…, **α*п***. Отсюда следует, что система *п­*мерных векторов тогда и только тогда будет максимальной линейно независимой системой, если её векторы линейно независимы, а любой *п-*мерный вектор является линейной комбинацией этих векторов.

Теперь можно сделать заключение. В *п-*мерном пространстве всякая линейно независимая система, состоящая из *п* векторов, будет максимальной, а любая максимальная линейно независимая система векторов этого пространства состоит не более чем из *п* векторов.

Всякая линейно независимая система *п-*мерных векторов содержится хотя бы в одной максимальной линейно независимой системе. Действительно, если заданная система векторов не максимальна, то к ней можно присоединить один вектор так, что полученная система останется линейно независимой. Если новая система не максимальна, то к ней можно добавить ещё один вектор. Этот процесс может продолжаться до тех пор, пока в системе не будет *п* векторов.

Введём в геометрическом *n*-мерном пространстве произвольную систему и будем рассматривать переменные  как координаты точки М в этой системе. Тогда  есть значение квадратичной формы в точке М.

Перейдём к новой системе координат по формулам:

 (2)

Здесь - старые; - новые координаты одной и той же точки.

Выясним, как изменится матрица квадратичной формы при переходе к новой системе координат. Запишем преобразование координат (2) в матричной форме

 (3)

Где X – матрица-столбец, составленная из старых координат; Y – матрица-столбец, составленная из новых координат; B – неособенная матрица с элементами. Подставив выражение (3) в равенство , получим



Но, по правилу транспонирования произведения,  Следовательно,

 (4)

Матрица  симметрична, так как  а Y – матрица-столбец, составленный из переменных  Поэтому выражение (4) является квадратичной формой от этих переменных. Её матрица равна .

Таким образом, если *в квадратичной форме с матрицей А перейти к новой системе координат, то в любых переменных квадратичная форма будет иметь матрицу  где B – матрица перехода.*



**1.3 Определение квадратичных форм. Общий вид, канонический вид, нормальный вид.**

Числовая функция *а(х, у)* двух векторных аргументов *х, у* называется билинейной, если она линейна по каждому аргументу, то есть









Здесь x, у, х1, х2, у1, у2—любые векторы пространства *L, α* —произвольное число.

Пусть *L* — линейное n-мерное пространство *е1, ..., еп* — базис в нем, и пусть аргументы билинейной функции разложены по этому базису:

, .

Тогда

 (1)

Введем обозначения:

 (2)

Тогда получим

(3)

Формула (3) выражает функцию *а(х,у)* в координатах по данному базису.

Многочлен в правой части формулы (3) называется били­нейной формой. Вместе с ним билинейной формой называют и самую функцию *а(х,у).* Числа *аik* называются коэффици­ентами данной формы в базисе *е1, ..., еп.* В качестве аргу­ментов *х, у* можно рассматривать векторы как действитель­ного, так и комплексного линейного пространства. Соответ­ственно говорят, что форма *а(х,у)* дана в действительном или в комплексном пространстве. В последнем случае в ка­честве значений формы *а(х, у)* допускают комплексные числа; коэффициенты *аik* этом случае также являются, вообще говоря, комплексными числами.

Пусть билинейная форма *а(х,у)* является симметричной: *а(у,х)=а(х,у).* Это равносильно тому, что в любом базисе симметрична ее матрица: *А\* = А.* В самом деле,



Отождествим оба аргумента формы *а(х,у).* Тогда получим *а(х,х) = а(х,у)* при *у = х.*

Функция *а(х, х)* называется *квадратичной формой,* отве­чающей данной симметричной билинейной форме *а(х,у).*

Исходная (симметричная) билинейная форма *а(х, у)* назы­вается *полярной* для квадратичной формы *а(х, х).*

Докажем, что полярная билинейная форма однозначно определяется своей квадратичной формой.

Пусть дана числовая функция *f(x)* векторного аргумента. Предположим, что *f{x)* есть некоторая квадратичная форма, т. е. *f(x) = a(x,x),* причем *а{х,у)* нам неизвестна. Чтобы найти ее, рассмотрим *f(x+y),* где *х, у* — произвольные векторы. Пользуясь свойствами билинейной формы и ее сим­метричностью, имеем





Отсюда получаем искомое выражение

 (4)

Формулу (4) можно принять за определение квадра­тичной формы. Именно можно сказать, что *f(x)* называется, квадратичной формой, если левая часть формулы (4) является билинейной функцией.

Следует заметить, что определение квадратичной формы не предусматривает наличия базиса; тем самым, оно применимов бесконечномерных пространствах.

Пример. Пусть *L* — линейное пространство функций, непрерывных на отрезке [0, 1].

Рассмотрим функцию

**

аргумент которой *x = x(t)*Є*L.*

Имеем

 (5)

Нетрудно непосредственно проверить, что в правой части равенства (5) стоит билинейная форма. Таким образом, *f{x)* есть квадратичная форма в бесконечномерном пространстве *L.*

Вернемся к n-мерному случаю. В n-мерном простран­стве рассмотрим квадратичную форму и запишем ее выраже­ние через координаты аргументов.

Пусть *а (х,у)* = *а (у, х), х=у.* Тогда





**……….…………………………**

**** (6)

Если принять во внимание симметричность коэффициен­тов, то члены суммы (6), кроме диагональных, естественно объединяются в пары. При этом получается часто употреб­ляемая запись квадратичной формы в виде



. (7)

Заметим, что в первой строчке формулы (7) выписаны все члены, содержащие *x1.*

Ранг квадратичной формы по определению равен рангу ее матрицы: г = Rang *A.*

*Канонический вид квадратичной формы.* Если в некотором базисе окажется, что все коэффи­циенты *aik = 0* при *i ≠ k,* то говорят, что в этом базисе квадратичная форма имеет канонический вид



Приведение квадратичной формы к каноническому виду является важной задачей как в теоретических вопросах, так и в прикладной математике. Ниже рассмотрим два метода приведения квадратичной формы к каноническому виду: ме­тод Лагранжа и метод Якоби.

Если Rang = r < n*,* то после надлежащего изменения но­меров матрицу можно записать в виде

*.*

Замечание. Если привести к каноническому виду квадратичную форму, то одновременно приведется к диаго­нальному виду и ее билинейная форма

**

*Нормальный вид квадратичной формы*

 (8)

считая, что *у1,..., уr, уr+1,..., уп*— новые координаты век­тора *х.* Выражение (8) называется нормальным видом квад­ратичной формы *f(x).*

*В комплексном пространстве всякую квадратичную форму можно с помощью невырожденного линейного пре­образования привести к нормальному виду* (8).

Ограничимся теперь действительными пространствами и действительными линейными преобразованиями. Учитывая, что среди коэффициентов *аii* могут быть отрицательные, по­ложим

 (9)

Если первые *k* коэффициентов *аii* положительны, а осталь­ные отрицательны, то мы получим

*.* (9\*)

Выражение (9\*) также называется нормальным видом формы *f(x).*

**1.4 Матрица квадратичных форм. Теорема о ранге матрицы**

Вся квадратичная форма может быть записана в виде





 (1)

…………………………………….



Ясно, что коэффициенты  формы  в записи (1) определены одназначно. Составленная из них матрица



Называется матрицей квадратичной формы  Ввиду  элементы матрицы A, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны между собой. Следовательно  , т.е. A – симметричная матрица.

Очевидно, что для любой симметричной матрицы A всегда можно указать такую квадратичную форму, что её матрица совпадает с A. Если две квадратичные формы имеют одну и ту же матрицу, то эти формы могут отличаться друг от друга обозначением переменных, что не имеет существенного значения. Две такие квадратичные формы мы можем считать одинаковыми. Таким образом, квадратичные формы вполне определяются своими матрицами.

Теорема о ранге матрицы. *Ранг произвольной матрицы равен максимальному порядку ее миноров, отличных от нуля.*

Доказательство. Если Rang *А = 0*, то *A* — нулевая матрица, и у нее нет отличных от нуля миноров. Естественно считать в этом случае, что максимальный порядок отличных от нуля миноров равен нулю.

Пусть далее матрица *А* — не нулевая. Если некоторый ее минор *М* порядка rне равен нулю, а все миноры более высокого порядка равны нулю или отсутствуют вовсе, то *М* является базисным минором. По лемме о базисном миноре столбцы матрицы *А,* пересекающие минор *М,* линейно неза­висимы. Поэтому Rang *A≥r* . По той же лемме любой стол­бец матрицы *А* линейно выражается через базисные столбцы. Отсюда, применяя лемму , находим, что Rang *A≤r.* Таким образом, *Rang A=r,* что и требовалось доказать.

**1.5 Различные способы приведения квадратичных форм к каноническому виду и к нормальному виду.**

*Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа.*

Пусть дана квадратичная форма *f(x)=а(х,х).* Вслед­ствие формулы



мы можем в любом базисе записать *f(x)* в виде

 (1)

где *g* — квадратичная форма, не включающая *x1.*

Запись вида (1) позволяет доказать возможность приве­дения квадратичной формы к каноническому виду по индук­ции.

Теорема. *Каждую квадратичную форму с помощью невырожденного линейного преобразования можно привести к каноническому виду.*

Замечание. Здесь речь идет о преобразовании пере­менных, именно числовых аргументов *х1,...,хп* многочлена (1). Но теорему можно понимать и геометрически, поскольку всякое невырожденное преобразование переменных можно рассматривать как преобразование координат при переходе к новому базису.

Доказательство теоремы. Квадратичная форма от одного переменного всегда имеет канонический вид ** Примем как предположение индукции, что любую квадра­тичную форму от (n—1) числовых аргументов можно при­вести к каноническому виду невырожденным линейным пре­образованием (n—1) переменных.

Рассмотрим произвольную квадратичную форму *f(x)* от nчисловых аргументов:



Пользуясь предположением индукции, докажем, что ее можно привести к каноническому виду невырожденным линейным преобразованием n переменных. Возможны два случая:

1) Первый случай. В квадратичной форме хотя *f(x)* хотябы один из коэффициентов *аij* при квадратах переменных отличен от нуля. Не нарушая общности, можем считать, что

именно *а11≠* 0. По данным коэффициентам формы *f(x)* coставим следующее линейное преобразование:

 (2)

Матрицу этого преобразования обозначим Q:



Преобразование (2) невырождено, так как Det Q = a11 ≠ 0. Отметим также, что невырожденность преобразования (2) вы­текает из его обратимости, которая в свою очередь сразу видна из формул (2).

Возведем в квадрат выражение *y1* и разделим на a11 ≠0:





где — некоторая квадратичная форма аргументов *х2,...,хп,* т. е.  не включает x1*.* Введем еще одну квадратичную фор­му  тех же аргументов *х2,*..., *хп,* положив



где *g{x2,..., хп)* дана записью *f(x)* в виде (1). Тогда по­лучим



или, что то же самое,



По предположению индукции существует такое невырож­денное преобразование переменных в числе *п*—1

  (3)

которое приводит к каноническому виду форму :



Дополним преобразование (3) так, чтобы в нем участво­вали все *п* переменных. Именно, положим

 (4)

Преобразуем переменные *x1..., xn* в переменные у1,... ...,*уп* по формулам (2), а затем переменные y1*,…,уп* преобра­зуем по формулам (4). В результате получим преобразование переменных *х1..., хп* в переменные z1*,...,zn* которое при­водит исходную квадратичную форму к каноническому виду



Последнее преобразование является невырожденным, так как представляет собой произведение невырожденных преобразо­ваний (2) и (4).

Второй случай. В квадратичной форме *f(x)* все, диагональные коэффициенты *аii* равны нулю. Тогда преды­дущие рассуждения неприменимы. Но какой-нибудь из коэф­фициентов отличен от нуля; пусть это будет *а12.* Тогда квад­ратичная форма имеет вид

 (5)

Сделаем преобразование:

 (6)

Преобразование (6) обратимо и, следовательно, является не­вырожденным.

Подставив величины (6) в квадратичную форму (5), по­лучим

** (7)

Слагаемое не может исчезнуть при приведении подобных членов, так как все члены квадратичной формы, которые не выписаны в выражении (5), не содержат произве­дения и не могут в результате преобразования (6) дать величину 

Далее квадратичную форму (7) можно невырожденным преобразованием привести к каноническому виду, поскольку дело свелось к первому случаю: коэффициент при  отличен от нуля.

Тем самым рассуждения индукции завершены и теорема доказана.

3 а м е ч а н и е. Из доказательства видно, что квадра­тичную форму с действительными коэффициентами можно привести к каноническому виду с помощью невырожденного линейного преобразования, которое также имеет действитель­ные коэффициенты.

*Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Якоби.*

Пусть дана квадратичная форма *f(x),* которая расписана в координатах в некотором базисе *е1,…, еп:*



Как известно,



Составим матрицу квадратичной формы *f(x):*



Рассмотрим так называемые главные миноры матрицы *А:*

 

 (1)

Кроме того, для удобства записи дальнейших формул введем величину считая =1.

Метод Якоби проходит в предположении, что все главные миноры матрицы *А* отличны от нуля:

  …  (2)

При этих предположениях ищется специальный новый базис такой, чтобы

 (3)

Для того чтобы привести квадратичную форму *f(x)* к каноническому виду, достаточно для любого обеспечить условия

 при  (4)

Тогда тоже будут равны нулю (вследствие симметрич­ности матрицы квадратичной формы), и отличными от нуля окажутся лишь коэффициенты при квадратах числовых аргу­ментов.

Заметим, что для выполнения условий (4) достаточно потребовать соблюдения равенств

  (5)

В самом деле, из (5) и (3) имеем



Для упрощения дальнейших выводов добавим к (5) дополни­тельное равенство

 (6)

При *k =* 1 условия (5) исчезают и остается только (6), из которого, с учетом первой строчки формул (3), находим



Отсюда



поскольку .

Учитывая обозначения (1), можно написать



Дальше будем проводить рассуждение по индукции. Допустим, что уже определены все коэффициенты, входящие в первые *k*—1 строк формул (3). Для нахождения коэффи­циентов, входящих в строку с номером *k,* запишем условия (5), и (6) вместе

 (7)

Отсюда, используя (3), получим для искомых коэффициентов систему уравнений

 (7а)

Определитель системы (7а) совпадает с и отличен от нуля вследствие предположения (2). Поэтому искомые коэффи­циенты *Рk1, ..., Рkk* найдутся. Остается проверить, что по­строенное преобразование невырождено. С этой целью найдем из системы (7а) коэффициент *Pkk.* Применяя правило Крамера, получим

 (8)

Далее, используя треугольную структуру матрицы преобразо­вания (3), найдем определитель *D* этой матрицы:

.

Таким образом, **, а значит, преобразование (3) невы­рождено.

Теперь мы можем определить и коэффициенты квадра­тичной формы в новом базисе Достаточно вычис­лить лишь диагональные коэффициенты, так как осталь­ные заведомо равны нулю. Используя (3), (7) и (8), на­ходим



Значит, в базисе, который построен по методу Якоби,

****

*Приведение квадратичных форм к нормальному виду.*

Пусть квадратичная форма *f(x)* приведена к канониче­скому виду

 (1)

где *а11,..., аr ≠ 0, r —* ранг *f(x).*

Допустим, что мы имеем дело с комплексным прост­ранством и разрешаем себе пользоваться линейными

преобразованиями с комплексными коэффициентами. Положим

 (2)

Из (1) и (2) получим

 (3)

считая, что *у1,..., уr, уr+1,..., уп*— новые координаты век­тора *х.* Выражение (3) называется нормальным видом квад­ратичной формы *f(x).* Заметив, что преобразование (2) невы­рождено, сделаем вывод:

*В комплексном пространстве всякую квадратичную форму можно с помощью невырожденного линейного пре­образования привести к нормальному виду* (3).

**1.6 Формулы преобразования и матрицы преобразования.**

**Переход от одной аффинной системы координат к другой с тем же началом.** *Аффинная координатная система,* или *аффин­ный репер о пространстве*, есть тройка некомпланарных векто­ров  данных в определенном порядке и приложенных к точке О — началу репера.

Тройка векторовназывается иногда *базисом* репера или координатной системы.

Если наряду с репером который будем условно назы­вать «старым», дан «новый» репер с началом О' и базисом  то возникает общая задача преобразования координат: по координатам произвольной точки *М* (произвольного вектора u) в одной из двух систем координат найти координаты той же Точки (того же вектора) в другой системе.

Предположим, что оба репера имеют одно и то же начало О. Тогда новый репер вполне определен, если заданы векторы  своими координатами (относительно старого базиса), т. е. если даны коэффициенты  в равенствах

 (1)

Матрица



называется *матрицей перехода* от базиса  к базису а также матрицей перехода от первого репера ко второму. Так как векторы  линейно независимы, то детерминант матрицы *А\** отличен от нуля *— матрица перехода от одного базиса к другому есть всегда невырожденная матрица.* Так как векторы  образуют базис, то каждый из векторов  в свою очередь однозначно представим как линейная комбинация векто­ров 

 (1’)

- уравнения (1) *однозначно разрешимы* относительно старых еди­ничных векторов 

Посмотрим, как связаны между собой координаты *x, у, г* и *х', у', г'* произвольной точки *М* (произвольного вектора u = *ОМ)* в старой и новой координатных системах.

Вектор *и=ОМ* записывается, во-первых, как линейная комби­нация векторов с коэффициентами *х, у, г* и, во-вторых, как линейная комбинация векторов с коэффициентами *х', у', г',* так что имеем тождество



Вносим в это тождество выражения  из (1); получаем





Но вектор u единственным образом представляется как линейная комбинация векторов, следовательно, коэффициенты при векторах  в левой и правой частях последнего равенства должны быть одни и те же, т. е.

 (2)

Эти формулы и выражают старые координаты *х, у, г* точки *М* (вектора **u)** через новые. Матрица

 (3)

дающая это выражение, называется *матрицей преобразования координат;* она является транспонированной по отношению к матрице *А\** перехода от базиса к базису . Обе матрицы имеют один и тот же отличный от нуля детерминант.

**2. Переход от одной аффинной системы координат к другой с изменением начала координат.** Общий случай перехода от репера  к реперу  сводится к комбинации двух случаев переноса начала и только что разобранного случая перехода от одного базиса к другому. В самом деле, рассмотрим наряду с двумя реперами и  еще третий, «промежуточный», имеющий начало О' = *(x0, y0, z0)* и базис  ; координаты точки относительно этого промежуточного репера обозначим через *х", у", z".* Тогда *х=x0+ х", у=y0+ у",* *z=z0 + z"*, где *х", у", z"* выражаются через *х', у', z'* по формулам (2) (в которых, естественно, надо *х, у, z* (слева) соответственно заменить на *х", у", z".* Получаем окончательно:

*в пространстве:*

 (43)

*на плоскости*

 (42)

Это н есть общие формулы преобразования координат для двух произвольных аффинных координатных систем. Матрица



коэффициентовв равенствах (43) соответственно (42) называется *матрицей преобразования координат.*

Переход от одной прямоугольной системы координат к другой

**Случай прямоугольного репера на плоскости.** Можно огра­ничиться реперами с общим началом. Базис прямоугольного репера состоит из двух взаимно перпендикулярных ортов. Такие базисы будем называть *прямоугольными* или *ортонормальными.*

*Лемма.* Пусть ** и **— два ортогональных репера на плоскости с общим началом О. Тогда поворотом репера **в несущей его плоскости вокруг точки О на некоторый угол  можно перевести репер ** либо в репер ** либо в репер * (рис. 59 и 60).* Другими словами: репер ** получается из репера **либо поворотом, либо поворотом и последующим отражением (относительно прямой, несущей вектор ).

Доказательство. Репер**определяет некоторое поло­жительное направление вращения плоскости, а именно то направ­ление, в котором угол от ортаe1 до орта e2 равен  (а не ).

Обозначим через  угол от орта e1 до орта е1’. Повернув репер ** (в его плоскости) в положительном направлении на угол *,* мы совместим орт e1 с ортом е1’; тогда орт e2, будучи перпенди­кулярен к орту e1, либо совместится с ортом (рис. 59), либо

совместится с противоположным ему ортом —  (рис. 60). Утверж­дение доказано.

Из доказанного следует, что относительно базиса e1 , e2 ортимеет координаты cos , sin:



тогда как для  имеем две возможности:

либо



т.е



либо



и тогда



Матрица перехода от базиса  к базису имеет вид:

в первом случае

 (I)

во втором

 (II)

Базисыи называются в первом случае *одноименными* или *одинаково ориентированными,* а во втором — *разноименными* или *противоположно ориентированными.*

Так как detC = l в случае одноименных, detC= -1 в случае разноименных базисов, то только что высказанное определение можно сформулировать и так:

Определение. *Два ортогональных базиса (репера) одно-именны, если матрица перехода от одного из них к другому имеет положительный детерминант, и разноименны, если этот детер­минант отрицателен.*

Формулы преобразования координат даются матрицами, транс­понированными к матрицам перехода от одного базиса к другому; это будут формулы:

 в случае однименных базисов,

 в случае разноименных базисов.

**1.7 Закон инерции квадратичных форм**

Пусть в действительном пространстве дана квадратич­ная форма:

 где *{xi}*— координаты вектора *х* в некотором базисе 

Пусть — какой-нибудь базис, в котором *f(x)* имеет нормальный вид: (1) Здесь *{у1}* — координаты вектора *х* в базисе .

Число положительных и число отрицательных членов в данной формуле называется соответственно положительным и от­рицательным индексом формы; разность между положитель­ным и отрицательным индексом называется ее сигнатурой.

Закон инерции квадратичных форм. *Поло­жительный и отрицательный индексы являются инвари­антами квадратичной формы, то есть не зависят от выбора базиса, в котором она имеет нормальный вид.*

Доказательство. Пусть имеется еще один базис  котором форма  имеет нормальный вид:

 (2)

где *{zi}* — координаты *х* в базисе *.* Нужно доказать, что *k = m.*

Предположим, что  например *k>m.* Рассмотрим формулы преобразования координат

 (3)

Заметим, что матрица *Q* коэффициентов  невырождена.

Подставим выражения (3) в формулу (2). Мы должны получить выражение (1); таким образом, имеем тождество

 (4)

т. е. равенство, верное при любых *у1, ...,уr, уr+1…,yn,* считая, что *z1,..., zn* выражены через *у1, ..., уп* с по­мощью (3).

Составим вспомогательную однородную систему уравнений

 (5)

В системе (5) число неизвестных больше числа уравнений вследствие предположения *k>m.* Поэтому система (5) имеет нетривиальное решение *y1,…,yk*. Подставим это решение в тождество (4), взяв дополнительно

 (6)

В результате, учитывая (3), (5) и (6), получим

 (7)

Однако это невозможно, так как левая часть (7) строго по­ложительна, тогда как правая либо отрицательна, либо равна нулю. Значит, *k* не может быть больше *т.* Теорема доказана.

**1.8 Положительно-определённая квадратичная форма**

Определение 1. Форма *f(x)* называется *положительно определенной,* если *f(x) >* 0 для всех .

Заметим, что  всегда. В самом деле, так как =0\**z* и *f(x)* = *а (х, х),* где *z* — произвольный вектор, *а (х, у)* — билинейная функция, то



Квадратичная форма *f(x)* называется *отрицательно определенной,* если *f(x)<0* для любого **.

Очевидно, что достаточно рассмотреть положительно опре­деленные формы, поскольку отрицательно определенные полу­чаются из них сменой знака.

Ограничиваясь квадратичными формами в конечномер­ных (n-мерных) пространствах, укажем прежде всего ряд простых необходимых признаков положительной определен­ности. Пусть в каком-нибудь базисе *е1 .,., еп* дана квадра­тичная форма



Как нам известно, 

1) Если *f(x)* является положительно определенной, то при всех *i=1,2, ..., п.* 

2) Если форма *f(x)* положительно определена, то опре­делитель ее матрицы положителен:



Для доказательства приведем *f(x) к* каноническому виду. Пусть — канонический базис, то есть базис, в кото­ром *f(x)* имеет канонический вид:



Согласно предыдущему признаку все 

Обозначим через  определитель матрицы формы *f(x) в* каноническом базисе. Имеем



С другой стороны



значит,

Замечание. И это условие не является достаточным для положительной определенности квадратичной формы. Пример: форма



имеет  однако 

3) В n-мерном пространстве каждая положительно опре­деленная форма имеет ранг *п.* Доказательство вытекает из неравенства 

Теорема (критерий Сильвестра). *Для положитель­ной определенности квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы были положительны.*

Доказательство необходимости. Пусть форма *f{x)* положительно определена. Возьмем произвольный базис построим линейную оболочку Будем теперь рассматривать квадратичную форму *f{x)* не на вcём пространстве, а лишь на подпространстве 

Если то  и



Все остальные члены, у коэффициентов которых хотя бы один из двух индексов больше *k,* исчезают за счет нулевых значений координат.

Форма *f(x)* на подпространстве является по­ложительно определенной, так как она положительно опре­делена на всем пространстве. Поэтому определитель формы *f(x),* рассматриваемой на положителен:



Но — главный минор порядка *k* матрицы квадратичной формы *f(x),* индекс *k* может принимать значения 1, 2,..., *п.* Тем самым необходимость признака доказана.

Доказательство достаточности. Пусть  при *k=* 1,..., *п.*

Приведем квадратичную форму к каноническому виду методом Якоби. Получим



Бели , то хотя бы одна из координат , и, следо­вательно, . Теорема доказана.

Обратим внимание на двумерный случай. Пусть



где на этот раз числовые аргументы формы обозначены через *х, у.*

Условие Сильвестра сводится к неравенствам



Разумеется, в двумерном случае теорему Сильвестра можно установить без какой-либо специальной теории, поскольку для положительной определенности необходимо a > 0 и при а > 0

****

**2.1. Приложение 1**

**Пример 1.** Дана квадратичная форма . Привести её к каноническому виду.

Решение. Составим характеристическое уравнение



или . Корни этого уравнения . Собственные векторы, определяющие главные направления квадратичной формы найдём из системы:

 (1)

Подставляя сюда поочередно значения  и беря каждый раз нормированное решение системы (1), получаем:

  

Формулы преобразования координат при переходе к этому базису:



В базисе  квадратичная форма имеет канонический вид



**Пример 2.** Привести к каноническому виду квадратичную форму

****

Решение. Составим уравнение



или . Отсюда . Канонический вид данной квадратичной формы 

Для того чтобы найти базис, в котором форма имеет вид, необходима найти собственные векторы симметрического линейного преобразования с матрицей



Запишем систему уравнений, определяющую искомые собственные векторы:

 (1)

Подставляя сюда  и беря каждый раз нормированное решение системы (1), найдем векторы, определяющие главные направления квадратичной формы:

 

Они составляют нужный базис.

При переходе к базису  координаты всех векторов преобразуются по формулам:



**Пример 3.** Найти для квадратичной формы



её матрицу.

Решение. Для данной квадратичной формы запишем

****

Следовательно её матрица равна

.

**Пример 4.** Подвергнем форму  преобразованию

****

Мы получили форму 

Подвергая её обратному преобразованию

 

приходим к исходной форме



**Пример 5.** С помощью линейных преобразований переменных преобразуем квадратичную форму  в канонический вид.

После преобразования



Перейдёт в форму с матрицей



т.е в форму 

Квадратная матрица вида



у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю, называется диагональной (канонической) матрицей.

**2.2. Приложение 2**

**Список используемой литературы**

1. Александров П. С., Лекции по аналитической геомет­рии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры, «Наука», 1968.

**2.** Ефимов Н. В., Линейная алгебра и многомерная геометрия, «Мир», 1961

3. Боревич З.И., Определители и матрицы, «Наука», 1986

4. Гантмахер Ф.Р., Теория матриц, «Дрофа», 2001

5. Шилов Г. Е., Математический анализ. Конечномерные линейные пространства, «Наука», 1969