Диференціальні операції в скалярних і векторних полях. Основні поняття і формули

**1. Скалярне поле**

Нехай  – область у тривимірному просторі (або на площині). Кажуть, що в області  задано скалярне поле, якщо кожній точці  поставлено у відповідність деяке число .

Прикладами скалярних полів є поле температури даного тіла, поле густини даного неоднорідного середовища, поле вологості повітря, поле атмосферного тиску, поле потенціалів заданого електростатичного поля тощо.

Поверхня (лінія), на якій функція  набуває одне й те саме значення, називається поверхнею (лінією) рівня скалярного поля (наприклад, поверхні або лінії постійної температури). Надаючи  різних постійних значень: , отримаємо сім’ю поверхонь (ліній) рівня даного скалярного поля.

Фізичні скалярні поля не залежать від вибору системи координат: величина  є функцією лише точки  і, можливо, часу (нестаціонарні поля).

Якщо в просторі ввести прямокутну систему координат , то точка  у цій системі координат матиме певні координати  і скалярне поле  стане функцією цих координат: .

**2. Векторне поле**

Кажуть, що в області  задано векторне поле, якщо кожній точці  поставлено у відповідність деякий вектор .

Фізичні приклади векторних полів: електричне поле системи електричних зарядів, яке характеризується в кожній точці вектором напруженості ; магнітне поле, утворене електричним струмом і яке характеризується в кожній точці вектором магнітної індукції ; поле тяжіння, утворене системою мас і яке характеризується в кожній точці вектором сили тяжіння , що діє в цій точці на одиничну масу; поле швидкостей потоку рідини, яке описується в кожній точці вектором швидкості .

Зручною геометричною характеристикою векторного поля  є векторні лінії – криві, в кожній точці  яких вектор  напрямлений по дотичній до кривої. Векторні лінії поля тяжіння, електричного і магнітного полів називається силовими лініями, а поля швидкостей – лініями струму.

Нехай векторна лінія, яка проходить через точку , описується рівнянням , де  – параметр. Умова колінеарності вектора поля  і дотичного вектора  в довільній точці цієї лінії має вигляд

,(1)

де  – деяке число. Умову (1) можна записати також у вигляді

(2)

або, помноживши на , у вигляді

.(3)

Кожне із рівнянь (1) – (3) є диференціальним рівнянням векторних ліній у векторній формі і визначає множину векторних ліній. Конкретна векторна лінія, яка проходить через задану точку , визначається додатковою умовою

,(4)

де  – радіус-вектор точки .

Фізичні векторні поля не залежать від системи координат: в кожній точці  вектор  повністю визначається своїм модулем  і напрямом. Якщо в просторі введена прямокутна система координат , то векторне поле  описується вектор-функцією трьох змінних  або трьома скалярними функціями – її координатами:

.

Оскільки в прямокутних координатах , то векторне рівняння (3) для векторних ліній еквівалентне системі диференціальних рівнянь

,(5)

а додаткове векторне рівняння (4) еквівалентне таким умовам:

,(6)

де  – координати точки .

**3. Похідна за напрямом**

Скалярне і векторне поля

 і 

Називаються диференційованими  разів, якщо функції



диференційовані  разів. Надалі розглядатимемо поля, диференційовані потрібне нам число разів.

Нехай  – скалярне поле, задане в області ,  – одиничний фіксований вектор;  – фіксована точка;  – довільна точка із , відмінна від  і така, що вектор  колінеарний . Нехай, далі,  – величина напрямленого відрізка  (вона дорівнює його довжині , якщо напрям вектора  збігається з напрямом вектора , і дорівнює – , якщо вектори  і  є протилежними).

**Означення.** Число  називається похідною скалярного поля  (функції ) в точці  за напрямом  і позначається символом .

Похідна за напрямом  є швидкістю зміни функції  за напрямом  в точці .

Якщо в прямокутній системі координат  , то

.(7)

Зокрема, якщо вектор  збігається з одним із ортів  або , то похідна за напрямком  збігається з відповідною частинною похідною. Наприклад, якщо , то

.

Аналогічно визначається похідна за напрямом векторного поля.

**Означення**. Вектор  називається похідною векторного поля  (вектор-функції ) в точці  за напрямом  і позначається символом .

Якщо в прямокутній системі координат  , то

.

**4. Градієнт скалярного поля**

скалярне векторне поле дивергенція

**Означення**. Градієнтом скалярного поля  називається вектор-функція

.

Із рівності (7) випливає, що

,(8)

Звідси , оскільки .

Тут  – кут між векторами  і  в точці . Очевидно, що  має найбільше значення при , тобто у напрямі  в даній точці. Інакше кажучи, вектор  в даній точці вказує напрям найбільшого зростання поля  (функції ) у цій точці, а  є швидкість зростання функції  в цьому напрямі. Таким чином, вектор  не залежить від вибору системи координат, а його модуль і напрям у кожній точці визначається самою функцією .

**5. Потенціальне поле**

**Означення.** Векторне поле  називається потенціальним в області , якщо воно збігається в області  з полем градієнта деякого скалярного поля :

.(9)

Функція  називається скалярним потенціалом векторного поля . Якщо , то із рівності (9) випливає, що

.

Інколи потенціалом векторного поля  називають таку функцію , що .

Розглянемо, наприклад, поле тяжіння точкової маси , розміщеної на початку координат. Воно описується вектор-функцією  ( – гравітаційна стала, ). З такою силою діє це поле на одиничну масу, розміщену в точці . Поле тяжіння є потенціальним. Його можна подати у вигляді градієнта скалярної функції , яка називається ньютонівським потенціалом поля тяжіння точкової маси . Дійсно

.

Аналогічно , звідси

.

Далі, розглянемо ще один приклад. Нехай задано електричне поле точкового заряду , розміщеного на початку координат. Воно описується в точці  вектором напруженості

.

Це поле також є потенціальним полем. Його можна подати у вигляді . Функція  називається потенціалом електричного поля точкового заряду .

Поверхні рівня потенціала  називаються еквіпотенціальними поверхнями.

**6. Дивергенція**

**Означення**. Дивергенцією векторного поля  називається скалярна функція

.

Слово «дивергенція» означає «розбіжність».

Дивергенція характеризує густину джерел даного векторного поля в розглянутій точці.

Розглянемо, наприклад, електричне поле точкового заряду , розміщеного в початку координат:

,

.

Оскільки , і аналогічно , то 

(при ). Цей результат означає відсутність поля у довільній точці, крім початку координат. В початку координат .

**7. Ротор**

Означення. Ротором (або вихором) векторного поля



називається вектор-функція

.

Зокрема, для плоского поля  маємо

.

Розглянемо тверде тіло, яке обертається навколо осі  із сталою кутовою швидкістю  (рис. 1).



Рисунок 1 – Тверде тіло, яке обертається навколо осі 

Векторне поле швидкостей  точок цього тіла можна подати у вигляді

.

Знайдемо ротор поля швидкостей :

.

Таким чином,  є сталим вектором, напрямленим уздовж осі обертання , а його модуль дорівнює подвоєній кутовій швидкості обертання тіла:

.

Розглянемо потенціальне поле . Його потенціал . Обчислимо ротор цього поля:

.

Взагалі, ротор довільного потенціального поля дорівнює нулю (див. підрозділ 2). Тому кажуть, що потенціальне поле є безвихровим.

**8. Соленоїдальне поле**

Векторне поле  називається соленоїдальним в області , якщо в цій області . Оскільки  характеризує густину джерел поля , то в тій області, де поле соленоїдальне, немає джерел цього поля.

Наприклад, електричне поле  точкового заряду соленоїдальне (задовольняє умову ) всюди поза точкою, де знаходиться заряд (в цій точці ). Векторні лінії соленоїдального поля не можуть починатися або закінчуватися на межі області, або бути замкненими кривими. Прикладом соленоїдального поля з замкненими векторними лініями є магнітне поле, яке створюється струмом у провіднику.

Якщо векторне поле  можна подати як ротор деякого векторного поля , тобто , то вектор – функція  називається векторним потенціалом поля .

Можна перевірити (див. докладніше п. 2), що , тобто поле  є соленоїдальним.

Довільне векторне поле можна подати у вигляді суми потенціального і соленоїдального полів.

**9. Оператор Гамільтона**

Згадаємо, що символ  називається оператором частинної похідної по . Під добутком цього оператора на функцію  розумітимемо частинну похідну , тобто . Аналогічно,  і  – оператори частинних похідних по  і по .

Введемо векторний оператор «набла» або оператор Гамільтона:

.

За допомогою цього символічного (операторного) «вектора» зручно записувати і виконувати операції векторного аналізу.

У результаті множення вектора  на скалярну функцію  отримуємо :

.

Скалярний добуток вектора  на вектор – функцію  дає :

.

Векторний добуток вектора  на вектор – функцію  дає :

.

**10. Нестаціонарні поля**

Нехай в області  визначено нестаціонарне скалярне поле : величина  є функцією точки  і часу . Приклад такого поля – змінний з часом розподіл температури в будь-якому середовищі (наприклад, в потоці рідини). Розглянемо точку , яка рухається в області  (частинку рідини). Координати точки (частинки) змінюються з часом за відомим законом . Величина  в рухомій точці  є складеною функцією :

.

Обчислимо похідну по  цієї функції (вона називається повною похідною). За правилом диференціювання складеної функції знаходимо

.

Вводячи в точці  вектор швидкості , отримуємо



Або

.(11)

Аналогічно, якщо в області  задано нестаціонарне векторне поле , то для рухомої точки  векторна величина  є складеною функцією : . Повну похідну по  для кожної координати вектор – функції  можна обчислити за формулою (11). Помноживши результати на базисні вектори  і складаючи, отримуємо

.(12)

У формулах (11) і (12) доданки  і  виражають швидкості зміни величин  та  з часом при фіксованих координатах, тобто характеризують локальні зміни цих величин, і тому називаються локальними похідними. Доданки  і  утворюються за рахунок зміни координат точки, її руху (конвекції). Тому ці доданки у виразах повних похідних називаються конвективними похідними.

Локальні похідні характеризують нестаціонарність розглянутого поля у даній точці простору. Конвективні похідні характеризують неоднорідність поля у даний момент часу.