

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОУВПО «Пермский государственный университет»

С.В. Лутманов

**ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ
ОПТИМИЗАЦИИ**

Часть 2

**Оптимальное управление линейными
динамическими объектами**

Учебное пособие

Рекомендовано УМС по математике и механике УМО по классическому университетскому образованию РФ в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по группе направлений и специальностей «Механика»

Пермь 2005

БК 22. 161.8

Л 86

УДК 519.9

Лутманов, С.В.

Л 86 Линейные задачи оптимизации: учеб. пособие [Электронный ресурс] /Перм. ун.-т. – Пермь, 2005.- Ч.2. Оптимальное управление линейными динамическими объектами. – 195 с.

ISBN 5-7944-0565-1

В учебном пособии рассматриваются задачи теории оптимального управления линейными динамическими объектами. В частности, подробно исследован случай управления с терминальным критерием качества и случай управления по критерию предельного быстродействия. Изучается возможность сведения задачи теории оптимального управления к функциональной проблеме моментов. Вывод необходимых условий оптимальности управляющих воздействий опирается на математический аппарат выпуклого анализа. Указываются эффективные достаточные условия оптимальности программных управлений. Само построение оптимальных управлений осуществляется либо аналитическим путем, либо с применением систем аналитических вычислений, реализуемых в интерактивном режиме на ЭВМ. Весь излагаемый материал поясняется на примерах, большинство из которых решено с применением пакета МАТНЕМАТИСА 4.2 Пособие предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов математических специальностей, изучающих курсы, связанные с вопросами оптимизации.

Ил. 34. Библиогр. 32 назв.

Печатается в соответствии с решением редакционно-издательского совета Пермского государственного университета

Рецензенты: кафедра дифференциальных уравнений Удмуртского государственного университета; профессор кафедры «Математическое моделирование систем и процессов» Пермского государственного технического университета, д.т.н. В.Ю. Столбов

ISBN 5-7944-0565-1

© Лутманов С.В., 2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	5
1. ЛИНЕЙНЫЕ УПРАВЛЯЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ.....	8
1.1. Примеры линейных управляемых динамических объектов	8
1.2. Системы однородных линейных дифференциальных уравнений	16
1.3. Фундаментальная матрица Коши	20
1.4. Допустимые реализации вектора управляющих параметров	26
1.5. Формула Коши	31
1.6. Критерии качества управления динамическими объектами.....	33
1.7. Программные стратегии	36
1.8. Постановка и существование решения задачи теории оптимального управления	39
1.9. Область достижимости линейного управляемого динамического объекта	45
2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА.....	49
2.1. Случай закрепленного левого конца и свободного правого конца траектории	49
2.2. Поведение функции Л.С. Понтрягина вдоль оптимальной пары.....	53
2.3. Частные случаи геометрических ограничений на вектор управляющих параметров.....	56
2.4. Минимизация расстояния до целевого множества.....	67
2.5. Случай подвижного левого и свободного правого конца траектории.....	85
2.6. Минимизация расстояния до целевого множества в случае подвижного левого конца траектории.....	96
3. ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРЕДЕЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ.....	107
3.1. Постановка задачи линейного предельного быстрогодействия и существование ее решения.....	107
3.2. Необходимые условия оптимальности программной стратегии	108

4. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КАК ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ.....	117
4.1. Сведение задачи теории оптимального управления к функциональной про- блеме моментов.....	117
4.2. Управляемость линейной динамической системы.....	125
4.3. Управление по критерию «минимум энергии».....	128
4.4. Управление по критерию «минимум силы».....	134
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	142
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	192

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое учебное пособие написано на основе спецкурса «Линейные задачи оптимизации», который автор читает для студентов и магистрантов (специальность «Механика») механико-математического факультета Пермского государственного университета. Оно представляет собой конспект лекций той части курса, которая посвящена задачам оптимального управления линейными динамическими системами. Линейные динамические системы с выпуклыми геометрическими ограничениями на управляющие параметры являются удобными объектами исследования в теории оптимального управления. Вывод необходимых условий оптимальности управляющих воздействий для таких систем опирается на математический аппарат выпуклого анализа и требует существенно меньших усилий, чем для нелинейных систем. В ряде случаев удается сформулировать эффективные достаточные условия оптимальности. Само построение оптимальных управлений осуществляется либо аналитическим путем, либо с применением систем аналитических вычислений, реализуемых в интерактивном режиме на ЭВМ.

Пособие состоит из четырех разделов и приложения. В первом разделе изучаются основные свойства систем линейных дифференциальных уравнений, вводится понятие фундаментальной матрицы Коши системы однородных линейных дифференциальных уравнений и доказывается формула Коши. Здесь же приводится постановка задачи теории оптимального управления в классе программных стратегий, оговаривается класс допустимых стратегий и доказывается теорема существования решения задачи теории оптимального управления.

Во втором разделе для задач управления с терминальным критерием качества и фиксированным временем выводятся необходимые условия оптимальности программного управления в форме принципа максимума Л.С. Понтрягина. В частности, когда минимизируемый функционал имеет смысл расстояния от целевого множества до фазового вектора объекта в финальный момент времени, эти условия записываются в форме прицеливания на опорный вектор к

области достижимости динамического объекта. Для этого случая формулируются и доказываются эффективные достаточные условия оптимальности. Рассмотрены ситуации, когда левый конец траектории закреплен и когда он является подвижным. В последнем случае принимается, что множество начальных положений объекта описывается системой дифференцируемых неравенств.

Третий раздел посвящен задачам линейного быстрогодействия. Оптимальное время перехода определяется здесь как разность между первым моментом времени, для которого пересечение области достижимости управляемого объекта и целевого множества не является пустым, и начальным моментом времени. Оптимальная программная стратегия строится из условия прицеливания на соответствующий опорный вектор к области достижимости объекта.

В четвертом разделе изучается возможность сведения задачи теории оптимального управления к функциональной проблеме моментов. Приводятся необходимые и достаточные условия разрешимости проблемы моментов. На их основе доказываются критерий полной управляемости динамическим объектом и реализуется конструктивный алгоритм решения задачи теории оптимального управления по критерию «минимум энергии» и «минимум силы».

В каждом разделе пособия дается подробный алгоритм решения соответствующего класса задач теории оптимального управления. Реализация алгоритма поясняется на конкретных примерах. Большинство из них решается с применением пакета MATHEMATICA 4.2. Заголовки примеров, решение которых требует обращения к компьютеру, помечены звездочкой. Для них в приложении приводятся тексты программ, обеспечивающие решение этих примеров.

По тематике книги существует обширная библиография. Приведенный в конце книги библиографический список содержит лишь те источники, которые непосредственно использовались при написании данного учебного пособия. Пособие разбито на разделы, внутри которых принята самостоятельная нумерация задач, лемм, рисунков, примеров и теорем. В свою очередь, раздел разбит на пункты, в которых ведется независимая нумерация формул. Ссылки на материалы (за исключением формул), расположенные в пределах данного раздела,

нумеруются одним числом, вне данного раздела – двумя числами. Ссылки на формулы нумеруются одним числом только в пределах данного пункта. Вне данного пункта, но в пределах данного раздела, они нумеруются двумя числами, вне данного раздела – тремя числами.

Пример 1. Рассмотрим материальную точку массы m , движущуюся в вертикальной плоскости ξ, η в однородном поле тяжести (см. **рис. 1**). Управляющее воздействие на точку M осуществляется посредством реактивной силы \bar{f} , возникающей в результате отделения от точки частиц с элементарной массой dm . Тогда масса точки M является величиной переменной, а движение точки описывается векторным дифференциальным уравнением Мещерского

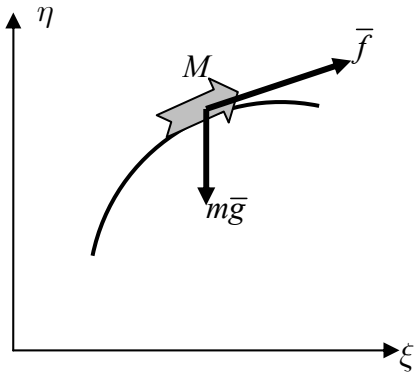


Рис. 1

где \bar{a}_r - вектор относительной скорости отделяющихся частиц. Проектируя уравнение (3) на оси выбранной системы координат, получим

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{g} + \frac{dm}{dt} \bar{a}_r, \quad (3)$$

Здесь α_ξ, α_η - углы, которые составляет вектор относительной скорости отделяющихся частиц с соответствующими координатными осями.

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi} &= \dot{m}a \cos \alpha_\xi, \\ m\ddot{\eta} &= \dot{m}a \cos \alpha_\eta - mg. \end{aligned} \quad (4)$$

Запишем систему (4) в нормальной форме

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= u_1, \\ \dot{x}_4 &= u_2 - g, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$x_1 = \xi, x_2 = \eta, x_3 = \dot{\xi}, x_4 = \dot{\eta}, u_1 = a \frac{\dot{m}}{m} \cos \alpha_\xi, u_2 = a \frac{\dot{m}}{m} \cos \alpha_\eta.$$

Векторно-матричная форма системы дифференциальных уравнений (5) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}.$$

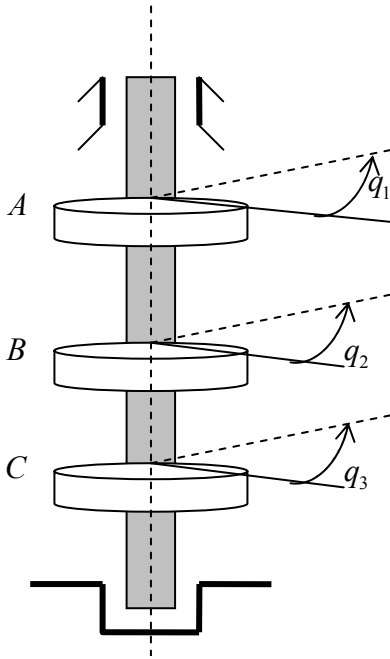


Рис. 2

Обычно физический объект можно моделировать линейными дифференциальными уравнениями лишь в дополнительных предположениях об области изменения его фазовых координат.

Пример 2. Рассмотрим упругий вал, несущий жестко насаженные маховики A, B и C (см. рис. 2). Система вращается вокруг оси вала с постоянной угловой скоростью ω , однако вследствие возмущений возникают крутильные колебания, которые необходимо успокоить управляющими моментами u_1, u_2 , приложенными к маховикам A и C соответственно.

Система имеет три степени свободы. В качестве обобщенных координат выбираются следующие величины: q_2 - угол отклонения маховика B от заданного движения системы $\psi(t) = \omega t, t \geq t_0$; q_1, q_3 - суть углы закручивания маховиков A и C соответственно относительно маховика B .

Пусть I_A, I_B, I_C - моменты инерции маховиков. Вычислим кинетическую энергию всей системы. Имеем

$$T = \frac{1}{2}I_A(\omega + \dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2}I_B(\omega + \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2}I_C(\omega + \dot{q}_3 + \dot{q}_2)^2.$$

Обозначим через c_1, c_2 крутильные жесткости соответствующих участков вала. Принимаем, что система работает в пределах деформаций, подчиняющихся закону Гука. Тогда потенциальная энергия системы определяется равенством

$$\Pi = \frac{1}{2}c_1q_1^2 + \frac{1}{2}c_2q_3^2.$$

Из выражения для элементарной работы

$$\delta A = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + Q_3\delta q_3 = u_1\delta q_1 + (u_1 + u_2)\delta q_2 + u_2\delta q_3$$

следует, что обобщенные силы $Q_i, i = 1, 2, 3$ выражаются равенствами

$$Q_1 = u_1, Q_2 = u_1 + u_2, Q_3 = u_3.$$

Составим уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, i = 1, 2, 3.$$

Получаем следующие три дифференциальных уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} I_A \ddot{q}_1 + I_A \ddot{q}_2 &= -c_1 q_1 + u_1, \\ I_A \ddot{q}_1 + (I_A + I_B + I_C) \ddot{q}_2 + I_C \ddot{q}_3 &= u_1 + u_2, \\ I_C \ddot{q}_2 + I_C \ddot{q}_3 &= -c_2 q_3 + u_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Разрешим систему дифференциальных уравнений (6) относительно старших производных

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= -\frac{c_1(I_A + I_B)}{I_A I_B} q_1 - \frac{c_2}{I_B} q_3 + \frac{1}{I_A} u_1, \\ \ddot{q}_2 &= \frac{c_1}{I_B} q_1 + \frac{c_2}{I_B} q_3, \\ \ddot{q}_3 &= -\frac{c_1}{I_B} q_1 - \frac{c_2(I_B + I_C)}{I_B + I_C} q_3 + \frac{1}{I_C} u_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Проведя замену переменных

$$x_1 = q_1, x_2 = q_2, x_3 = q_3, x_4 = \dot{q}_1, x_5 = \dot{q}_2, x_6 = \dot{q}_3,$$

запишем систему (7) в нормальной форме

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_4, \\ \dot{x}_2 &= x_5, \\ \dot{x}_3 &= x_6, \\ \dot{x}_4 &= -\frac{c_1(I_A + I_B)}{I_A I_B} x_1 - \frac{c_2}{I_B} x_3 + \frac{1}{I_A} u_1, \\ \dot{x}_5 &= \frac{c_1}{I_B} x_1 + \frac{c_2}{I_B} x_3, \\ \dot{x}_6 &= -\frac{c_1}{I_B} x_1 - \frac{c_2(I_B + I_C)}{I_B + I_C} x_3 + \frac{1}{I_C} u_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Векторно-матричная форма системы дифференциальных уравнений (8) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{c_1(I_A + I_B)}{I_A I_B} & 0 & -\frac{c_2}{I_B} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c_1}{I_B} & 0 & \frac{c_2}{I_B} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{c_1}{I_B} & 0 & -\frac{c_2(I_B + I_C)}{I_B + I_C} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{I_A} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в разобранным примере математическая модель, представленная системой дифференциальных уравнений (8), адекватна физическому объекту только в пределах деформаций, удовлетворяющих закону Гука, т.е. если фазовые координаты x_1, x_2, x_3 достаточно малы по абсолютной величине.

К дифференциальным уравнениям вида (2) можно прийти и в результате линеаризации исходных нелинейных дифференциальных уравнений движения объекта. Опишем процедуру линеаризации.

Пусть математической моделью управляемого динамического объекта служит система нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = Y(t, y, v), \quad t \in [t_0, T], \quad y \in R^n, \quad v \in R^r. \quad (9)$$

Относительно функции $Y: [t_0, T] \times R^{n+r} \rightarrow R^n$ предполагается существование непрерывных частных производных не ниже второго порядка включительно по каждому из аргументов.

Допустим, что некоторой функции $v^*: [t_0, T] \rightarrow R^r$ отвечает решение $y^*(\cdot) = y^*(\cdot, t_0, y_0, v^*(\cdot))$ дифференциального уравнения (9), удовлетворяющее начальному условию $y(t_0) = y_0$. Предположим, что именно эта функция $y^*(\cdot)$ является требуемым законом движения для управляемого объекта. Однако при физической реализации указанного управления $v^*(\cdot)$ закон движения $y(\cdot)$ реального динамического объекта вследствие ряда факторов (неадекватность математической модели, наличие неконтролируемых возмущений, невозможность в точности удовлетворить начальным условиям и др.) будет отличаться от идеального

движения $y^*(\cdot)$. Для реализаций управляющих воздействий и отвечающих им движений примем следующее представление:

$$y(\cdot) = y^*(\cdot) + x(\cdot), \quad v(\cdot) = v^*(\cdot) + u(\cdot). \quad (10)$$

Здесь величины $\|x(\cdot)\|, \|u(\cdot)\|$ полагаются малыми. Подставим выражения (10) в уравнения (9). В результате получим

$$\dot{y}^*(t) + \dot{x}(t) = Y(t, y^*(t) + x(t), v^*(t) + u(t)), \quad t \in [t_0, T]. \quad (11)$$

С точностью до величин второго порядка малости по отношению к $\|x(\cdot)\|, \|u(\cdot)\|$ из (11) выводим

$$\dot{y}^*(t) + \dot{x}(t) = Y(t, y^*(t), v^*(t)) + \frac{\partial}{\partial y} Y(t, y^*(t), v^*(t))x(t) + \frac{\partial}{\partial v} Y(t, y^*(t), v^*(t))u(t), \quad t \in [t_0, T].$$

Обозначая

$$A(t) = \frac{\partial}{\partial y} Y(t, y^*(t), v^*(t)), \quad B(t) = \frac{\partial}{\partial v} Y(t, y^*(t), v^*(t)), \quad t \in [t_0, T] \quad (12)$$

и учитывая, что

$$\dot{y}^*(t) = Y(t, y^*(t), v^*(t)), \quad t \in [t_0, T],$$

приходим к уравнениям (2), в которых $C(t) = 0, t \in [t_0, T]$.

Пример 3*. На горизонтальной плоскости находится двухзвенный механический манипулятор, каждое звено которого представляет собой абсолютно жесткий стержень длиной

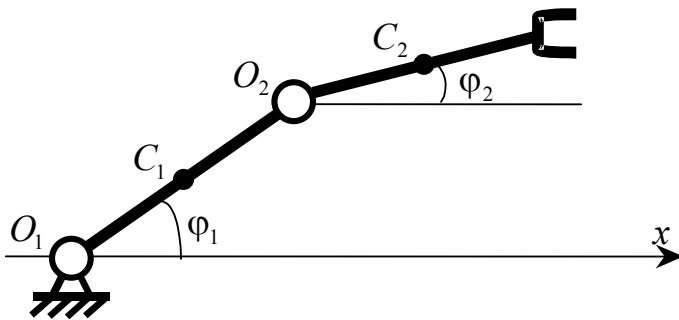


Рис. 3

но жесткий стержень длиной $l_i, i=1,2$. Первое звено соединено с неподвижным основанием манипулятора вращательной парой O_1 , а со вторым звеном – вращательной парой O_2 . Масса схвата

манипулятора – m , центр масс i -го звена находится в середине стержня – точке C_i , его масса – m_i , момент инерции i -го звена относительно своего центра масс – $I_i, i=1,2$. В соединительных парах могут развиваться управляющие вращательные моменты, соответственно, v_1 и v_2 ,

На горизонтальной плоскости, в которой расположен манипулятор, введем прямолинейную ось O_1x . Обозначим через φ_i угол, образованный i -м звеном манипулятора, $i=1,2$, с осью O_1x . Запишем дифференциальные уравнения движения манипулятора в форме уравнений Лагранжа второго рода, в которых в качестве обобщенных координат берутся углы $\varphi_i, i=1,2$. Кинетическая энергия манипулятора определяется по формуле

$$T = T_1 + T_2 + T_c, \quad (13)$$

где T_i – кинетическая энергия i -го, $i=1,2$, звена, а T_c – кинетическая энергия схвата манипулятора. Последовательно вычисляем

$$T_1 = \frac{1}{2}(I_1\dot{\varphi}_1^2 + m_1v_{c_1}^2) = \frac{1}{8}(4I_1\dot{\varphi}_1^2 + m_1l_1^2\dot{\varphi}_1^2) = \frac{4I_1 + m_1l_1^2}{8}\dot{\varphi}_1^2,$$

$$T_2 = \frac{1}{2}(I_2\dot{\varphi}_2^2 + m_2v_{c_2}^2) = \frac{1}{8}[4I_2\dot{\varphi}_2^2 + 4m_2l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + m_2l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 4m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

$$T_c = \frac{1}{2}mv_c^2 = \frac{1}{2}m[l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Подставляя найденные величины энергий составных частей манипулятора в (13), находим

$$T = \frac{1}{8}\dot{\varphi}_1^2[l_1^2(m_1 + 4m_2 + 4m) + 4I_1] + \frac{1}{8}\dot{\varphi}_2^2[l_2^2(m_2 + 4m) + 4I_2] + \frac{1}{2}(2m + m_2)l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Введем обозначения

$$a = \frac{1}{4}[l_1^2(m_1 + 4m_2 + 4m) + 4I_1], \quad b = \frac{1}{4}[l_2^2(m_2 + 4m) + 4I_2], \quad c = \frac{1}{2}(2m + m_2)l_1l_2.$$

Тогда выражение для кинетической энергии манипулятора принимает вид

$$T = \frac{1}{2}[a\dot{\varphi}_1^2 + 2c\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + b\dot{\varphi}_2^2].$$

Справедливы равенства

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = a\dot{\varphi}_1 + c\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = a\ddot{\varphi}_1 + c\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - c\dot{\varphi}_2(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = b\dot{\varphi}_2 + c\dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = b\ddot{\varphi}_2 + c\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - c\dot{\varphi}_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = -c\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2), \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = c\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (14)$$

Обобщенной силой Q_i , отвечающей обобщенной координате φ_i , является управляющий вращательный момент v_i , $i = 1, 2$.

Используя формулы (14), выпишем уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = Q_i, \quad i = 1, 2.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} a\ddot{\varphi}_1 + c\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + c\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) &= v_1, \\ c\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + b\ddot{\varphi}_2 - c\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) &= v_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Разрешим дифференциальные уравнения (15) относительно старших производных

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2bv_1 - 2bc\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - 2cv_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - c^2\dot{\varphi}_1^2 \sin[2(\varphi_1 - \varphi_2)]}{ab - c^2 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)}, \\ \ddot{\varphi}_2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2av_2 + 2ac\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - 2cv_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + c^2\dot{\varphi}_2^2 \sin[2(\varphi_1 - \varphi_2)]}{ab - c^2 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)}. \end{aligned}$$

Полученную систему двух дифференциальных уравнений второго порядка относительно переменных φ_1, φ_2 заменой переменных

$$y_1 = \varphi_1, \quad y_2 = \varphi_2, \quad y_3 = \dot{\varphi}_1, \quad y_4 = \dot{\varphi}_2$$

сведем к системе четырех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_3, \\ \dot{y}_2 &= y_4, \\ \dot{y}_3 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2bv_1 - 2bcy_4^2 \sin(y_1 - y_2) - 2cv_2 \cos(y_1 - y_2) - c^2y_3^2 \sin[2(y_1 - y_2)]}{ab - c^2 \cos^2(y_1 - y_2)}, \\ \dot{y}_4 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2av_2 + 2acy_3^2 \sin(y_1 - y_2) - 2cv_1 \cos(y_1 - y_2) + c^2y_4^2 \sin[2(y_1 - y_2)]}{ab - c^2 \cos^2(y_1 - y_2)} \end{aligned} \quad (16)$$

относительно переменных y_1, y_2, y_3, y_4 .

Проведем линеаризацию дифференциальных уравнений (16) в окрестности пары

$$\hat{x}(\cdot) = \sum_{i=1}^s \alpha_i x^{(i)}(\cdot)$$

будет также решением дифференциального уравнения (1).

Доказательство. Действительно,

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^s \alpha_i x^{(i)}(t) \right) = \sum_{i=1}^s \alpha_i \dot{x}^{(i)}(t) = \sum_{i=1}^s \alpha_i A(t) x^{(i)}(t) = A(t) \left(\sum_{i=1}^s \alpha_i x^{(i)}(t) \right) = A(t) \hat{x}(t).$$

Определение 1. Система решений $x^{(1)}(\cdot), \dots, x^{(s)}(\cdot)$ уравнения (1) называется линейно зависимой, если существуют такие константы $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in R^1$, не обращающиеся одновременно в нуль, что

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i x^{(i)}(t) \equiv 0, t \in R^1.$$

В противном случае система решений $x^{(1)}(\cdot), \dots, x^{(s)}(\cdot)$ называется линейно независимой.

Заметим, что для зависимой системы решений $x^{(1)}(\cdot), \dots, x^{(s)}(\cdot)$ набор векторов $x^{(1)}(t), \dots, x^{(s)}(t)$ является линейно зависимым при всех $t \in R^1$. Это утверждение может быть обращено следующим образом.

Лемма 1. Пусть для некоторого значения $t_0 \in R^1$ набор векторов $x^{(1)}(t_0), \dots, x^{(s)}(t_0)$ линейно зависим. Тогда система решений $x^{(1)}(\cdot), \dots, x^{(s)}(\cdot)$ уравнения (1) является линейно зависимой.

Доказательство. Из линейной зависимости векторов $x^{(1)}(t_0), \dots, x^{(s)}(t_0)$ следует существование ненулевого набора констант $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in R^1$, для которого

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i x^{(i)}(t_0) = 0. \quad (2)$$

Полагаем

$$\hat{x}(\cdot) = \sum_{i=1}^s \alpha_i x^{(i)}(\cdot).$$

По свойству 2 функция $\hat{x}(\cdot)$ является решением уравнения (1), при этом в силу (2) справедливо равенство $\hat{x}(t_0) = 0$. Тогда по свойству 1 должно выполняться

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^s \alpha_i x^{(i)}(t) \equiv 0, t \in R^1,$$

что и означает искомую линейную зависимость системы решений $x^{(1)}(\cdot), \dots, x^{(s)}(\cdot)$. Лемма доказана.

Следствие. Пусть система решений $x^{(1)}(\cdot), \dots, x^{(s)}(\cdot)$ линейно независима. Тогда набор векторов $x^{(1)}(t), \dots, x^{(s)}(t)$ является линейно независимым при всех $t \in R^1$.

Доказательство. От противного приходим к существованию некоторого значения $t_0 \in R^1$, для которого набор векторов $x^{(1)}(t_0), \dots, x^{(s)}(t_0)$ является линейно зависимым. Тогда по лемме 1 система решений $x^{(1)}(\cdot), \dots, x^{(s)}(\cdot)$ должна быть зависимой, что противоречит исходным предположениям.

Установим критерий линейной зависимости и независимости системы решений $x^{(1)}(\cdot), \dots, x^{(s)}(\cdot)$ уравнения (1).

Теорема 1. Система решений $x^{(1)}(\cdot), \dots, x^{(s)}(\cdot)$ уравнения (1) является линейно зависимой или линейно независимой, тогда и только тогда когда соответственно линейно зависим или линейно независим набор векторов $x^{(1)}(t_0), \dots, x^{(s)}(t_0)$ хотя бы при одном значении $t_0 \in R^1$.

Доказательство. Необходимость теоремы вытекает непосредственно из определения 1 и следствия из леммы 1. Достаточность в части линейной зависимости системы решений $x^{(1)}(\cdot), \dots, x^{(s)}(\cdot)$ доказана в лемме 1. Наконец, если набор векторов $x^{(1)}(t_0), \dots, x^{(s)}(t_0)$ является линейно независимым при некотором значении $t_0 \in R^1$, то для системы решений $x^{(1)}(\cdot), \dots, x^{(s)}(\cdot)$ равенство

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i x^{(i)}(t_0) = 0$$

невозможно ни при каких ненулевых наборах констант $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in R^1$. Это означает, что система решений $x^{(1)}(\cdot), \dots, x^{(s)}(\cdot)$ не является линейно зависимой, и поэтому она линейно независима. Теорема доказана.

Определение 2. *Линейно независимая система решений*

$$x^{(1)}(\cdot), \dots, x^{(n)}(\cdot) \quad (3)$$

дифференциального уравнения (1), где n - размерность вектора x , называется фундаментальной системой решений дифференциального уравнения (1).

Теорема 2. *Для уравнения (1) существует фундаментальная система решений, и любое решение этого уравнения может быть представлено как линейная комбинация решений, составляющих фундаментальную систему.*

Доказательство. Пусть набор векторов

$$e_1, \dots, e_n \in R^n$$

образует базис в R^n . Определим систему решений (3) условиями

$$x^{(i)}(t_0) = e_i, i = 1, \dots, n.$$

По теореме 1 из линейной независимости векторов $x^{(1)}(t_0), \dots, x^{(n)}(t_0)$ вытекает линейная независимость системы решений (3). Таким образом, существование фундаментальной системы решений для уравнения (1) установлено.

Покажем, что каждое решение $x(\cdot)$ уравнения (1) можно представить в виде

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{(i)}(t), t \in R^1.$$

Набор векторов $x^{(1)}(t_0), \dots, x^{(n)}(t_0)$ является базисом в R^n . Тогда для любого решения $x(\cdot)$ уравнения (1) найдется набор констант $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R^1$ такой, что

$$x(t_0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{(i)}(t_0).$$

Решения $x(\cdot)$ и $\sum_{i=1}^n \alpha_i x^{(i)}(\cdot)$ имеют общее начальное условие и потому совпадают.

Теорема доказана.

Пример 4*. Рассмотрим однородную линейную систему дифференциальных уравнений третьего порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 4x_2 + x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 - 4x_2 + x_3. \end{aligned} \quad (4)$$

Приведем векторно-матричную форму записи этой системы

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что следующая система решений этого уравнения

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}, x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 7 \cos t + \sin t \\ \cos t - 2 \sin t \\ -10 \cos t \end{pmatrix}, x^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 3 \cos t - \sin t \\ -\sin t \\ -4 \cos t + 2 \sin t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}^1$$

образует фундаментальную систему решений.

Сначала непосредственно проверяем, что каждый член системы $x^{(1)}(\cdot), x^{(2)}(\cdot), x^{(3)}(\cdot)$ является решением уравнений (2). Далее составим определитель

$$D(t) = \begin{vmatrix} 2e^{3t} & 7 \cos t + \sin t & 3 \cos t - \sin t \\ e^{3t} & \cos t - 2 \sin t & -\sin t \\ 0 & -10 \cos t & -4 \cos t + 2 \sin t \end{vmatrix}.$$

Вычислим его значение при $t = 0$. Имеем

$$D(0) = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -4 \end{vmatrix} = -10 \neq 0.$$

Таким образом, $D(0) \neq 0$ и набор векторов $x^{(1)}(0), x^{(2)}(0), x^{(3)}(0)$ является линейно независимым. Тогда по **теореме 1** система решений $x^{(1)}(\cdot), x^{(2)}(\cdot), x^{(3)}(\cdot)$ уравнений (2) является фундаментальной системой решений.

1.3. Фундаментальная матрица Коши. Пусть

$$x^{(1)}(\cdot) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(\cdot) \\ \dots \\ x_n^{(1)}(\cdot) \end{pmatrix}, \dots, x^{(n)}(\cdot) = \begin{pmatrix} x_1^{(n)}(\cdot) \\ \dots \\ x_n^{(n)}(\cdot) \end{pmatrix}$$

фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения (2.1). Для всех $t \in \mathbb{R}^1$ построим квадратную матрицу $Z(t)$ следующего вида

$$Z(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & \dots & x_1^{(n)}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n^{(1)}(t) & \dots & x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}.$$

Из **теоремы 1** следует, что матрица $Z(t)$ является невырожденной при всех $t \in R^1$ и, следовательно, для всех $t \in R^1$ существует обратная матрица

$$Z^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \zeta_1^{(1)}(t) & \cdots & \zeta_1^{(n)}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \zeta_n^{(1)}(t) & \cdots & \zeta_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}.$$

Полагаем

$$X[t, \tau] = Z(t)Z^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}[t, \tau] & \cdots & x_1^{(n)}[t, \tau] \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^{(1)}[t, \tau] & \cdots & x_n^{(n)}[t, \tau] \end{pmatrix}, \quad t, \tau \in R^1.$$

Определение 3. Матрица $X[t, \tau]$, $t, \tau \in R^1$ называется *фундаментальной матрицей Коши* для однородного дифференциального уравнения (2.1).

Установим ряд свойств фундаментальной матрицы Коши.

Теорема 3. Для всех $t, \tau, s \in R^1$ имеют место равенства

$$X[s, s] = E = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$(X[t, \tau])^{-1} = X[\tau, t], \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} X[t, \tau] = A(t)X[t, \tau], \quad (3)$$

$$\frac{d}{d\tau} X[t, \tau] = -X[t, \tau]A(\tau). \quad (4)$$

Доказательство. Равенство (1) является простым следствием **определения 3**. Докажем равенство (2). Имеем

$$(X[t, \tau])^{-1} = (Z(t) Z^{-1}(\tau))^{-1} = (Z^{-1}(\tau))^{-1} Z^{-1}(t) = Z(\tau) Z^{-1}(t) = X[\tau, t].$$

Для вывода равенства (3) замечаем, что

$$x_i^{(j)}[t, \tau] = \sum_{s=1}^n x_i^{(s)}(t) \zeta_s^{(j)}(\tau), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$x^{(j)}[t, \tau] = \begin{pmatrix} x_1^{(j)}[t, \tau] \\ \cdots \\ x_n^{(j)}[t, \tau] \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^n \zeta_s^{(j)}(\tau) \begin{pmatrix} x_1^{(s)}(t) \\ \cdots \\ x_n^{(s)}(t) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, столбцы матрицы $X[t, \tau]$, $t, \tau \in [t_0, T]$ являются линейными комбинациями столбцов матрицы $Z(t)$ и поэтому представляют собой решения уравнения (2.1). Последнее означает, что

$$\frac{d}{dt} x^{(i)}[t, \tau] = A(t)x^{(i)}[t, \tau], \quad i = 1, \dots, n \Rightarrow \frac{d}{dt} X[t, \tau] = A(t)X[t, \tau]. \quad (5)$$

Для вывода равенства (4) продифференцируем по переменной τ очевидное тождество $X[t, \tau]X[\tau, t] = E$. Имеем

$$\left(\frac{d}{d\tau} X[t, \tau] \right) X[\tau, t] + X[t, \tau] \frac{d}{d\tau} X[\tau, t] = 0.$$

Перепишем последнее равенство с учетом (5):

$$\left(\frac{d}{d\tau} X[t, \tau] \right) X[\tau, t] = -X[t, \tau] A(\tau) X[\tau, t]. \quad (6)$$

Умножим равенство (6) на матрицу $X^{-1}[\tau, t]$ справа. В результате получим искомое равенство (4) Теорема доказана.

Равенству (4) в доказанной теореме можно дать следующую трактовку:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} X[t, \tau] = -X[t, \tau] A(\tau) &\Rightarrow \frac{d}{d\tau} X^{-1}[\tau, t] = -X^{-1}[\tau, t] A(\tau) \Rightarrow \\ \frac{d}{d\tau} \{X^{-1}[\tau, t]\}^{Tp} &= -A^{Tp}(\tau) \{X^{-1}[\tau, t]\}^{Tp}. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица $\{X^{-1}[t, \tau]\}^T$ является фундаментальной матрицей Коши для линейной однородной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\psi}{dt} = -A^{Tp}(t)\psi. \quad (7)$$

В дальнейшем систему (7) будем называть сопряженной системой дифференциальных уравнений по отношению к системе (2.1).

Укажем один способ построения фундаментальной матрицы Коши для случая, когда известна фундаментальная система решений $x^{(1)}(\cdot), \dots, x^{(n)}(\cdot)$ дифференциального уравнения (2.1), не связанный с вычислением обратной матрицы для матрицы

$$Z(\cdot) = (x^{(1)}(\cdot), \dots, x^{(n)}(\cdot)).$$

Для каждого номера $i \in \{1, \dots, n\}$ составим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
 & c_1 x_1^{(1)}(\tau) + \dots + c_n x_1^{(n)}(\tau) = 0, \\
 & \dots \dots \dots \\
 & c_1 x_i^{(1)}(\tau) + \dots + c_n x_i^{(n)}(\tau) = 1, \\
 & \dots \dots \dots \\
 & c_1 x_n^{(1)}(\tau) + \dots + c_n x_n^{(n)}(\tau) = 0, \\
 & \tau \in [t_0, T] \tag{8}
 \end{aligned}$$

относительно переменных c_1, \dots, c_n . Эта система имеет решение при всех $\tau \in [t_0, T]$, т. к. ее определитель отличен от нуля при всех $\tau \in [t_0, T]$. Пусть $c_k^{(i)}(\tau)$, $k, i = 1, \dots, n$, $\tau \in [t_0, T]$ – решение системы (8). Положим

$$x^{(i)}[t, \tau] = \begin{pmatrix} c_1^{(i)}(\tau) x_1^{(1)}(t) + \dots + c_n^{(i)}(\tau) x_1^{(n)}(t) \\ \dots \dots \dots \\ c_1^{(i)}(\tau) x_1^{(1)}(t) + \dots + c_n^{(i)}(\tau) x_1^{(n)}(t) \end{pmatrix}, \quad t, \tau \in [t_0, T], \quad i = 1, \dots, n.$$

Вектор $x^{(i)}[t, \tau]$ представляет собой i -й, $i = 1, \dots, n$, столбец фундаментальной матрицы Коши.

В случае, когда матрица A постоянна в алгоритме построения фундаментальной матрицы Коши система алгебраических уравнений (8) заменяется на следующую систему:

$$\begin{aligned}
 & c_1 x_1^{(1)}(0) + \dots + c_n x_1^{(n)}(0) = 0, \\
 & \dots \dots \dots \\
 & c_1 x_i^{(1)}(0) + \dots + c_n x_i^{(n)}(0) = 1, \\
 & \dots \dots \dots \\
 & c_1 x_n^{(1)}(0) + \dots + c_n x_n^{(n)}(0) = 0.
 \end{aligned}$$

Пусть $c_k^{(i)}$, $i, k = 1, \dots, n$ – ее решение. Столбцы фундаментальной матрицы Коши строятся по формуле

$$x^{(i)}[t, \tau] = \begin{pmatrix} c_1^{(i)} x_1^{(1)}(t-\tau) + \dots + c_n^{(i)} x_1^{(n)}(t-\tau) \\ \dots \\ c_1^{(i)} x_1^{(1)}(t-\tau) + \dots + c_n^{(i)} x_1^{(n)}(t-\tau) \end{pmatrix}, \quad t, \tau \in [t_0, T], \quad i = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Пример 5*. Требуется построить фундаментальную матрицу Коши для однородного дифференциального уравнения из **примера 4** и проверить для нее выполнение равенств (1)-(4).

Выше было показано, что система решений

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 7 \cos t + \sin t \\ \cos t - 2 \sin t \\ -10 \cos t \end{pmatrix}, \quad x^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 3 \cos t - \sin t \\ -\sin t \\ -4 \cos t + 2 \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in R^1$$

этого уравнения является фундаментальной. Построим фундаментальную матрицу Коши непосредственно следуя ее определению. Имеем

$$X[t, \tau] = \begin{pmatrix} 2e^{3t} & 7 \cos t + \sin t & 3 \cos t - \sin t \\ e^{3t} & \cos t - 2 \sin t & -\sin t \\ 0 & -10 \cos t & -4 \cos t + 2 \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2e^{3\tau} & 7 \cos \tau + \sin \tau & 3 \cos \tau - \sin \tau \\ e^{3\tau} & \cos \tau - 2 \sin \tau & -\sin \tau \\ 0 & -10 \cos \tau & -4 \cos \tau + 2 \sin \tau \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{5} e^{3(t-\tau)} + \frac{1}{5} \cos(t-\tau) - \frac{7}{5} \sin(t-\tau) & \frac{2}{5} e^{3(t-\tau)} - \frac{2}{5} \cos(t-\tau) + \frac{14}{5} \sin(t-\tau) & \frac{3}{5} e^{3(t-\tau)} - \frac{3}{5} \cos(t-\tau) - \frac{4}{5} \sin(t-\tau) \\ \frac{2}{5} e^{3(t-\tau)} - \frac{2}{5} \cos(t-\tau) - \frac{1}{5} \sin(t-\tau) & \frac{1}{5} e^{3(t-\tau)} + \frac{4}{5} \cos(t-\tau) + \frac{2}{5} \sin(t-\tau) & \frac{3}{10} e^{3(t-\tau)} - \frac{3}{10} \cos(t-\tau) + \frac{1}{10} \sin(t-\tau) \\ 2 \sin(t-\tau) & -4 \sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) + \sin(t-\tau) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Осуществим построение фундаментальной матрицы Коши, не прибегая к обращению матрицы $Z(\cdot)$. Для этого последовательно решаем три системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} 2c_1 + 7c_2 + 3c_3 &= 1, \\ c_1 + c_2 &= 0, \\ -10c_2 - 4c_3 &= 0. \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1^{(1)} \\ c_2^{(1)} \\ c_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} 2c_1 + 7c_2 + 3c_3 &= 0, \\ c_1 + c_2 &= 1, \\ -10c_2 - 4c_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1^{(2)} \\ c_2^{(2)} \\ c_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} 2c_1 + 7c_2 + 3c_3 &= 0, \\ c_1 + c_2 &= 0, \\ -10c_2 - 4c_3 &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1^{(3)} \\ c_2^{(3)} \\ c_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

По формуле (9) определяем столбцы фундаментальной матрицы Коши

$$\begin{aligned} x^{(1)}[t, \tau] &= \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2e^{3(t-\tau)} \\ e^{3(t-\tau)} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{5}(t-\tau) \cdot \begin{pmatrix} 7 \cos(t-\tau) + \sin(t-\tau) \\ \cos(t-\tau) - 2 \sin(t-\tau) \\ -10 \cos \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \cos(t-\tau) - \sin(t-\tau) \\ -\sin(t-\tau) \\ -4 \cos(t-\tau) + 2 \sin(t-\tau) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{5} e^{3(t-\tau)} + \frac{1}{5} \cos(t-\tau) - \frac{7}{5} \sin(t-\tau) \\ \frac{2}{5} e^{3(t-\tau)} - \frac{2}{5} \cos(t-\tau) - \frac{1}{5} \sin(t-\tau) \\ 2 \sin(t-\tau) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{(2)}[t, \tau] &= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2e^{3(t-\tau)} \\ e^{3(t-\tau)} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{5} \cdot \begin{pmatrix} 7 \cos(t-\tau) + \sin(t-\tau) \\ \cos(t-\tau) - 2 \sin(t-\tau) \\ -10 \cos(t-\tau) \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \cos(t-\tau) - \sin(t-\tau) \\ -\sin(t-\tau) \\ -4 \cos(t-\tau) + 2 \sin(t-\tau) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} e^{3(t-\tau)} - \frac{2}{5} \cos(t-\tau) + \frac{14}{5} \sin(t-\tau) \\ \frac{1}{5} e^{3(t-\tau)} + \frac{4}{5} \cos(t-\tau) + \frac{2}{5} \sin(t-\tau) \\ -4 \sin(t-\tau) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{(3)}[t, \tau] &= \frac{3}{10} \cdot \begin{pmatrix} 2e^{3(t-\tau)} \\ e^{3(t-\tau)} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{10} \cdot \begin{pmatrix} 7 \cos(t-\tau) + \sin(t-\tau) \\ \cos(t-\tau) - 2 \sin(t-\tau) \\ -10 \cos(t-\tau) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cos(t-\tau) - \sin(t-\tau) \\ -\sin(t-\tau) \\ -4 \cos(t-\tau) + 2 \sin(t-\tau) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} e^{3(t-\tau)} - \frac{3}{5} \cos(t-\tau) - \frac{4}{5} \sin(t-\tau) \\ \frac{3}{10} e^{3(t-\tau)} - \frac{3}{10} \cos(t-\tau) + \frac{1}{10} \sin(t-\tau) \\ \cos(t-\tau) + \sin(t-\tau) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Получили совпадение с формулой (10). Непосредственно убеждаемся, что равенства (1)-(4) выполняются (см. приложение).

В случае $A = const$ дадим другую интерпретацию для фундаментальной матрицы Коши.

Определение 4. Квадратная матрица e^{tA} , определенная степенным рядом

$$e^{tA} = E + \frac{A}{1!}t + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + \dots + \frac{A^k}{k!}t^k + \dots, \quad (11)$$

где E - единичная матрица размера $n \times n$, называется экспоненциалом матрицы A .

Покажем, что ряд (11) сходится абсолютно для любого фиксированного $t \in R^1$. Действительно, с одной стороны,

$$\left\| \frac{A^k}{k!} t^k \right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!} |t|^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

а с другой стороны, степенной ряд

$$1 + \frac{\|A\|}{1!} t + \frac{\|A\|^2}{2!} t^2 + \frac{\|A\|^3}{3!} t^3 + \dots + \frac{\|A\|^k}{k!} t^k + \dots$$

сходится абсолютно при всех $t \in R^1$.

Из абсолютной сходимости ряда (11) следует, что его можно почленно дифференцировать. Вычисляем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{tA} &= \frac{d}{dt} \left(E + \frac{A}{1!} t + \frac{A^2}{2!} t^2 + \frac{A^3}{3!} t^3 + \dots + \frac{A^k}{k!} t^k + \dots \right) = A + \frac{A^2}{1!} t + \frac{A^3}{2!} t^2 + \dots + \frac{A^k}{(k-1)!} t^{k-1} + \dots = \\ &= A \left(E + \frac{A}{1!} t + \frac{A^2}{2!} t^2 + \frac{A^3}{3!} t^3 + \dots + \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} t^{k-1} + \dots \right) = A e^{tA}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из (12) вытекает справедливость матричного равенства

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA},$$

которое означает, что столбцы экспоненциала матрицы A являются решениями однородного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = Ax. \quad (13)$$

В силу очевидного равенства $e^{At} \Big|_{t=0} = E$ эти столбцы образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения (13). Таким образом,

$$X[t, \tau] = e^{(t-\tau)A}, \quad t, \tau \in R^1.$$

1.4. Допустимые реализации вектора управляющих параметров.

Пусть управление динамическим объектом осуществляется на промежутке времени $[t_0, T]$. Начальную точку траектории x_0 называют левым концом траектории, а конечную x_T - правым концом траектории. Начальный t_0 и конечный T моменты времени в общем случае не являются фиксированными. Предполагается, что $t_0 \in \theta_0 \subset R^1$, $T \in \theta_1 \subset R^1$, $\sup_{t \in \theta_0} t < \inf_{t \in \theta_1} t$. На левый и правый концы траектории обычно накладываются ограничение в форме включений

1. ЛИНЕЙНЫЕ УПРАВЛЯЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ

$$x_0 \in S_0(t_0) \subset R^n, t_0 \in \theta_0, x_T \in S_1(T) \subset R^n, T \in \theta_1.$$

В задачах теории оптимального управления принята следующая терминология: если множество S_0 (множество S_1) состоит из одной точки и не зависит от $t_0 \in \theta_0$ ($T \in \theta_1$), то говорят, что левый (правый) конец траектории закреплен; если $S_0(t_0) = R^n, t_0 \in \theta_0, (S_1(T) = R^n, T \in \theta_1)$, то левый (правый) конец траектории называют свободным.

Реализация вектора управляющих параметров не является произвольной функцией времени. Эта функция должна быть достаточно «гладкой» и в любой момент времени удовлетворять геометрическим ограничениям

$$u(t) \in P \subset R^r, t \in [t_0, T].$$

Оба приведенных требования обуславливаются техническими возможностями механизмов, осуществляющих управляющие воздействия на объект.

С другой стороны, слишком «бедное» множество возможных реализаций вектора управляющих воздействий может не обеспечить достижение поставленной цели управления. В частности, таковым является класс непрерывных на отрезке времени $[t_0, T]$ функций. Покажем это на примере.

Пример 6. Рассмотрим поезд, движущийся от станции *A* к станции *B* в соответствии с уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \ddot{x}_2 = u,$$

где x_1 - расстояние от станции *A* до поезда; u - тяга поезда, которой можно управлять. На величину тяги наложено ограничение $|u| \leq 1$. Требуется так выбрать управление, чтобы поезд преодолел путь между станциями за наименьшее время. При этом скорость в начальный и конечный моменты времени должна быть нулевой.

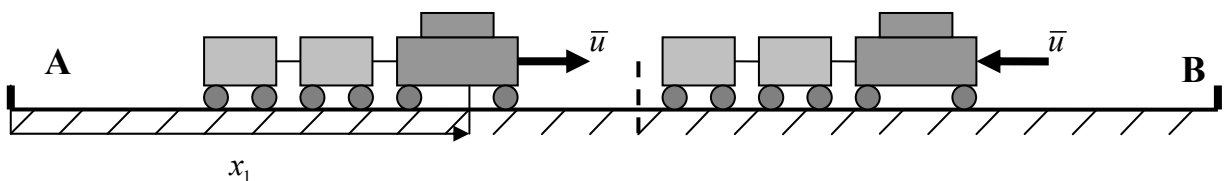


Рис. 4

Нетрудно сообразить, что время перехода будет минимальным, когда поезд до половины пути разгоняется с максимальным ускорением $u(t) = +1$, а вторую половину максимально затормаживается, т.е. $u(t) = -1$. Таким образом, реализация оптимального управления в данном случае имеет вид

$$u^0(t) = \begin{cases} +1, & t \in [t_0, \frac{1}{2}T], \\ -1, & t \in [\frac{1}{2}T, T], \end{cases}$$

Функция $u^0(t), t \in [t_0, T]$ терпит разрыв в точке $\frac{1}{2}T$.

Из опыта решения прикладных задач следует, что реализации вектора управляющих воздействий принадлежат классу $C^0[t_0, T]$ – кусочно-непрерывных функций, то есть таких функций $u: [t_0, T] \rightarrow R^r$, которые непрерывны в каждой точке $t \in [t_0, T]$, за исключением, быть может, конечного числа точек $\tau_1, \dots, \tau_m \in [t_0, T]$, в которых функция $u(\cdot)$ терпит разрывы первого рода. В этих точках существуют конечные пределы

$$\lim_{t \rightarrow \tau_i - 0} u(t) = u(\tau_i - 0), \quad \lim_{t \rightarrow \tau_i + 0} u(t) = u(\tau_i + 0),$$

но $u(\tau_i - 0) \neq u(\tau_i + 0), i = 1, \dots, m$. В теории оптимального управления принимается, что в точках разрыва реализации вектора управляющих воздействий непрерывны справа. Таким образом,

$$\lim_{t \rightarrow \tau_i + 0} u(t) = u(\tau_i), i = 1, \dots, m.$$

Определение 5. Реализация $u(\cdot)$ вектора управляющих воздействий называется допустимой, если $u(\cdot) \in C^0[t_0, T]$, функция $u(\cdot)$ непрерывна справа в точках разрыва и выполнено условие $u(t) \in P \subset R^r, t \in [t_0, T]$.

Определение 6. Движением линейного динамического объекта, отвечающим допустимой реализации вектора управляющих воздействий $u(\cdot)$ и выходящим из начального положения $x_0 \in S_0(t_0)$, называется решение следующей задачи Коши для векторного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) + C(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1)$$

Это движение будем обозначать символом $x(\cdot, t_0, x_0, u(\cdot))$.

Кусочно-непрерывная реализация вектора управляющих воздействий не гарантирует непрерывность по переменной t правой части дифференциального уравнения (1), поэтому условия классической теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения здесь не выполняются. В связи с этим предлагается следующая процедура построения движения динамического объекта, отвечающего реализации вектора управляющих воздействий $u(\cdot) \in C^0[t_0, T]$ и выходящего из начального положения $x_0 \in S_0(t_0)$. Пусть $\tau_1, \dots, \tau_m \in [t_0, T]$ - точки разрыва функции $u(\cdot)$. Движение объекта на полуинтервале $[t_0, \tau_1)$ отождествим с решением задачи Коши

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) + C(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, \tau_1).$$

В силу непрерывности управления $u(\cdot)$ на полуинтервале $[t_0, \tau_1)$ сформулированная задача Коши имеет решение и притом единственное. Доопределим фазовый вектор в момент времени τ_1 по непрерывности, положив

$$x_1 = x(\tau_1) = \lim_{t \rightarrow \tau_1 - 0} x(t).$$

Движение объекта на полуинтервале $[\tau_1, \tau_2)$ отождествим с решением задачи Коши

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) + C(t), \quad x(\tau_1) = x_1, \quad t \in [\tau_1, \tau_2),$$

которое также существует и единственно. Фазовый вектор в момент времени τ_2 снова доопределим по непрерывности

$$x_2 = x(\tau_2) = \lim_{t \rightarrow \tau_2 - 0} x(t).$$

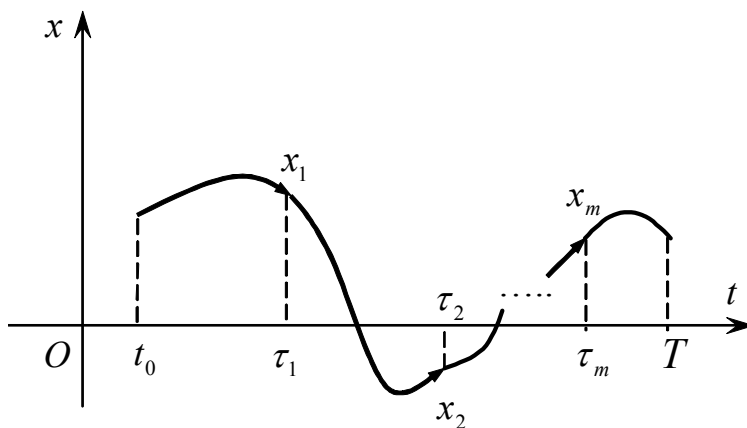


Рис. 5

Аналогичные построения производятся на каждом полуинтервале времени

$$[\tau_{i-1}, \tau_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

В результате получим искомое движение динамического объекта (см. рис 5). В книге [7] приводится теорема

существования и единственности такого движения. Заметим, что для любого момента времени $t \in [t_0, T]$ имеет место равенство

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(\tau)x(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t B(\tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t C(\tau)d\tau. \quad (2)$$

Равенство (2) может служить и непосредственным определением движения $x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$. Таким образом, движение объекта принадлежит классу $D^0[t_0, T]$ -классу кусочно-дифференцируемых на промежутке $[t_0, T]$ функций и удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) во всех точках промежутка $[t_0, T]$ за исключением тех, где реализация вектора управляющих воздействий терпит разрыв.

Пример 7*. Рассмотрим линейный управляемый динамический объект

$$\dot{x} = u, \quad x \in R^1, \quad u \in R^1, \quad [t_0, T] = [0, 4], \quad x_0 = 0.$$

Пусть реализация управляющего воздействия имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1), \\ t, & t \in [1, 2), \\ -t, & t \in [2, 3), \\ -1, & t \in [3, 4]. \end{cases}$$

Построим движение, отвечающее данной реализации управляющего воздействия и выходящее из начального положения $x_0 = 0$. Полагаем $\tau_0 = 0, \tau_1 = 1, \tau_2 = 2, \tau_3 = 3$ и проводим необходимые построения на каждом полуинтервале $[\tau_i, \tau_{i+1}), i = 0, 1, 2, 3$. Последовательно определяем

$$i = 0, x_0 = 0, \quad x(t) = t, \quad t \in [0, 1),$$

$$i = 1, x_1 = 1, \quad x(t) = \frac{1}{2}(t^2 + 1), \quad t \in [1, 2),$$

$$i = 2, x_2 = \frac{5}{2}, \quad x(t) = \frac{1}{2}(9 - t^2), \quad t \in [2, 3),$$

$$i = 3, x_3 = 0, \quad x(t) = 3 - t, \quad t \in [3, 4].$$

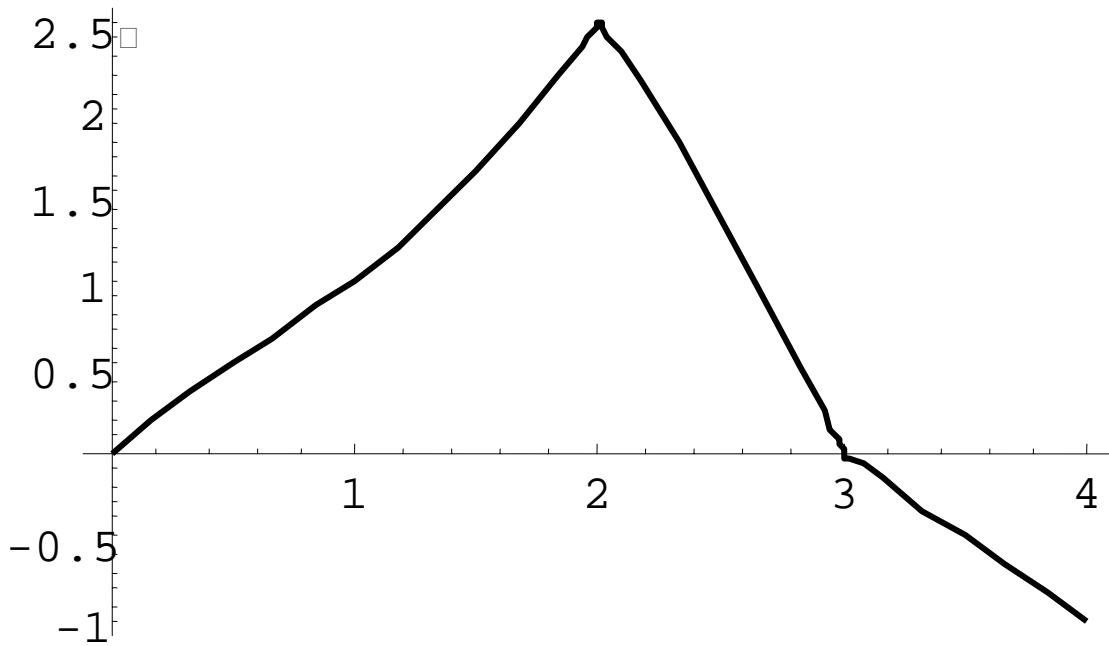


Рис 6.

Итоговая конструкция изображена на рис. 6.

1.5. Формула Коши. Рассмотрим линейный управляемый динамический объект, динамика которого описывается дифференциальным уравнением (1.2).

Пусть $t, s \in R^1, x_* \in R^n, u(\cdot) \in C^0[R^1]$. Для движения $x(\cdot) = x(\cdot, s, x_*, u(\cdot))$ этого объекта справедливо следующее утверждение.

Теорема 4 (Формула Коши). Для всех $t \in R^1$, в которых реализация вектора управляющих воздействий $u(\cdot)$ непрерывна, имеет место равенство

$$x(t) = X[t, s]x_* + \int_s^t X[t, \tau]B(\tau)u(\tau)d\tau + \int_s^t X[t, \tau]C(\tau)d\tau, \quad t \in R^1. \quad (1)$$

Доказательство. Требуется доказать следующие два равенства:

$$x(s) = x_*,$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t), \quad t \in R^1.$$

Первое из них следует непосредственно из **теоремы 3** (равенство (3.1)), а второе доказывается путем дифференцирования по аргументу t правой части равенства (1). Действительно,

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}X[t, s]x_* + \frac{d}{dt} \int_s^t X[t, \tau]B(\tau)u(\tau)d\tau + \frac{d}{dt} \int_s^t X[t, \tau]C(\tau)d\tau =$$

$$\begin{aligned}
 &= A(t)X[t,s]x_* + X[t,t]B(t)u(t) + \int_s^t A(t)X[t,\tau]B(\tau)u(\tau)d\tau + X[t,t] C(t) + \\
 &\quad + \int_s^t A(t)X[t,\tau] C(\tau)d\tau = \\
 &= A(t) \left[X[t,s]x_* + \int_s^t X[t,\tau]B(\tau)u(\tau)d\tau + \int_s^t X[t,\tau] C(\tau)d\tau \right] + B(t)u(t) + W(t) = \\
 &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t), \quad t \in R^1.
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Для однородной системы дифференциальных уравнений (т.е., если $B(t) \equiv 0, C(t) \equiv 0$) формула Коши принимает вид

$$x(t) = X[t,s]x_*, \quad t \in R^1.$$

Тогда решение $\psi(\cdot)$ сопряженной системы дифференциальных уравнений (3.7), удовлетворяющее условию $\psi(s) = \psi_*$, можно записать в виде

$$\psi(t) = \{X^{-1}[t,s]\}^T \psi_*, \quad t \in R^1. \quad (2)$$

Пример 8*. Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2, \quad t \in R^1 \quad (3)$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1. \quad (4)$$

В качестве реализации вектора управляющих воздействий выберем вектор-функцию $u: R^1 \rightarrow R^2$, определенную формулой

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}, \quad t \in R^1.$$

Нетрудно видеть, что после подстановки этой функции в (1) и интегрирования полученной системы дифференциальных уравнений с начальными условиями (4) получим

$$x_1(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t + 1, \quad x_2(t) = t^2 + 1, \quad t \in R^1. \quad (5)$$

Покажем, что движение $x(\cdot)$, определенное формулой Коши (1), совпадает с выражением (5). Действительно, для данного примера имеем

$$C(t) = 0, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X[t, \tau] = \begin{pmatrix} 1 & t - \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t, \tau \in R^1.$$

Подставляя последние выражения в формулу (1), получим

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & t - \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ 2\tau \end{pmatrix} d\tau = \\ &= \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & t - \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ 2\tau \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \tau + 2t\tau - 2\tau^2 \\ 2\tau \end{pmatrix} d\tau = \\ &= \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 + t^3 - \frac{2}{3}t^3 \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t + 1 \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}, \quad t \in R^1. \end{aligned}$$

Искомое совпадение установлено.

1.6. Критерии качества управления динамическими объектами. Цель управления динамическим объектом состоит в оптимизации некоторого критерия качества, который формализуется в виде функционала, определенного на множестве реализаций вектора управляющих параметров и отвечающих им движений объекта. Обычно функционал представляет собой следующее выражение:

$$\int_{t_0}^T f_0(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau + \Phi(t_0, x_0, T, x(T)), \quad (1)$$

где $f_0 : R^{n+r+1} \rightarrow R^1$, $\Phi : R^{2(n+1)} \rightarrow R^1$ - заданные функции, непрерывные по совокупности своих аргументов. Первое слагаемое в (1) называется интегральным, а второе – терминальным.

Определение 7. Функционал (1) называется функционалом Больца. В частности, если $f_0 \equiv 0$, то функционал (1) называют функционалом Майера, а если $\Phi \equiv 0$, то - функционалом Лагранжа.

Задача управления, в которой критерий качества имеет вид функционала Лагранжа с подынтегральной функцией $f_0 \equiv 1$, называется задачей на предельное быстроедействие.

Пусть задан критерий (1). Уточним схему, в соответствии с которой, можно оценить качество управления динамическим объектом в случае, когда известно дифференциальное уравнение движения объекта (1.2), промежуток

времени процесса управления $[t_0, T]$, начальное положение объекта $x_0 \in S_0(t_0)$ и реализация вектора управляющих параметров

$$u(\cdot) \in D^0[t_0, T], \quad u(t) \in P \subset R^r, \quad t \in [t_0, T].$$

Сначала определяется движение $x(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0, u(\cdot))$ динамического объекта, отвечающее реализации вектора управляющих воздействий $u(\cdot) \in D^0[t_0, T]$, $u(t) \in P$, $t \in [t_0, T]$ и выходящее из начального положения $x_0 \in S_0(t_0)$. Оно находится в результате решения задачи Коши (4.1), например, с помощью формулы Коши (5.1). В конечный момент времени T это движение должно удовлетворять граничному условию $x(T) \in S_1(T)$. В противном случае оценивать качество управления динамическим объектом не имеет смысла. Далее для пары $(u(\cdot), x(\cdot))$ вычисляется значение функционала (1). Полученное число и является количественной оценкой качества управления динамическим объектом.

Пример 9*. Рассмотрим линейный управляемый динамический объект

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

для которого

$$A(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [t_0, T].$$

Полагаем

$$\theta_0 = \{t_0\} = \{0\}, \quad \theta_1 = \{T\} = \{1\}, \quad S_0 = \{x_0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \in R^3, \quad S_1 = \{x_T \in R^3 \mid \|x_T\| \leq 50\},$$

$$I[u(\cdot), x(\cdot)] = \int_{t_0}^T \sqrt{\langle u(t), x(t) \rangle} dt + \sqrt{\|x(t_0)\|^2 + \|x(T)\|^2},$$

$$P = \{u \in R^3 \mid \|u\| \leq \sqrt{2}\}, \quad \hat{u}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1].$$

Реализуем описанную выше схему оценки качества управления динамическим объектом для рассматриваемого случая. В примере 5 для однородной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

была построена фундаментальная матрица Коши

$$X[t, \tau] = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}e^{3(t-\tau)} + \frac{1}{5}\cos(t-\tau) - \frac{2}{5}e^{3(t-\tau)} - \frac{2}{5}\cos(t-\tau) + \frac{3}{5}e^{3(t-\tau)} - \frac{3}{5}\cos(t-\tau) - \\ -\frac{7}{5}\sin(t-\tau) & +\frac{14}{5}\sin(t-\tau) & -\frac{4}{5}\sin(t-\tau) \\ \frac{2}{5}e^{3(t-\tau)} - \frac{2}{5}\cos(t-\tau) - \frac{1}{5}e^{3(t-\tau)} + \frac{4}{5}\cos(t-\tau) + \frac{3}{10}e^{3(t-\tau)} - \frac{3}{10}\cos(t-\tau) + \\ -\frac{1}{5}\sin(t-\tau) & +\frac{2}{5}\sin(t-\tau) & +\frac{1}{10}\sin(t-\tau) \\ & 2\sin(t-\tau) & -4\sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) + \sin(t-\tau) \end{pmatrix}.$$

Для управления $\hat{u}(\cdot)$ по формуле (5.1) находим

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= x(t, t_0, x_0, \hat{u}(\cdot)) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(4e^{3t} + \cos t - 7\sin t) & \frac{2}{5}(4e^{3t} - \cos t + 7\sin t) & \frac{1}{5}(3e^{3t} - 3\cos t - 4\sin t) \\ \frac{1}{5}(2e^{3t} - 2\cos t - \sin t) & \frac{1}{5}(2e^{3t} + 4\cos t + 2\sin t) & \frac{1}{10}(3e^{3t} - 3\cos t + \sin t) \\ 2\sin t & -4\sin t & \cos t + \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \\ &+ \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{4}{5}e^{3(t-\tau)} + \frac{1}{5}\cos(t-\tau) - \frac{2}{5}e^{3(t-\tau)} - \frac{2}{5}\cos(t-\tau) + \frac{3}{5}e^{3(t-\tau)} - \frac{3}{5}\cos(t-\tau) - \\ -\frac{7}{5}\sin(t-\tau) & +\frac{14}{5}\sin(t-\tau) & -\frac{4}{5}\sin(t-\tau) \\ \frac{2}{5}e^{3(t-\tau)} - \frac{2}{5}\cos(t-\tau) - \frac{1}{5}e^{3(t-\tau)} + \frac{4}{5}\cos(t-\tau) + \frac{3}{10}e^{3(t-\tau)} - \frac{3}{10}\cos(t-\tau) + \\ -\frac{1}{5}\sin(t-\tau) & +\frac{2}{5}\sin(t-\tau) & +\frac{1}{10}\sin(t-\tau) \\ 2\sin(t-\tau) & -4\sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) + \sin(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \tau \\ \cos \tau \\ \tau \end{pmatrix} d\tau = . \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{30}[-20 + 62e^{3t} + 3(-4 + 5t)\cos t + 9(1 + 5t)\sin t] \\ \frac{1}{30}[-10 + 31e^{3t} + 3(3 + 5t)\cos t + 12\sin t] \\ 1 + t - t\cos t - (1 + 2t)\sin t \end{pmatrix}, t \in [0, 1]$$

Далее полагаем

$$\hat{x}(1) = \begin{pmatrix} 41.4121 \\ 21.1906 \\ -1.06472 \end{pmatrix}, \|\hat{x}(1)\| = 46.531... < 50.$$

Последнее неравенство означает, что для движения $\hat{x}(\cdot)$ выполнены граничные условия на правом конце. Величина критерия качества процесса вычисляется по формуле

$$I[\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot)] = \int_0^1 \sqrt{\langle \hat{u}(t), \hat{x}(t) \rangle} dt + \sqrt{\|\hat{x}(0)\|^2 + \|\hat{x}(1)\|^2} = 49.7931.$$

1.7. Программные стратегии. Различают два типа стратегий управления динамическим объектом: позиционный и программный. Первый из них предполагает, что при назначении вектора управляющих параметров используется информация о текущем времени и о значении фазового вектора объекта; второй - только информация о текущем времени. В математическом плане программные стратегии можно отождествить с функциями одного переменного (текущего времени), а позиционные стратегии с функциями $n+1$ переменного, где n - размерность фазового вектора. Таким образом, множество программных стратегий формально включено в множество позиционных стратегий. Вместе с тем задача программного управления представляет и самостоятельный интерес. Это объясняется тем, что в ряде случаев результат управления, достигаемый в классе позиционных стратегий, может быть получен и в классе программных стратегий. В то же время техническая реализация программного управления значительно проще позиционного. Кроме того, решение задачи программного управления может быть использовано как вспомогательное средство решения задачи позиционного управления. Сами позиционные стратегии обычно применяются в тех случаях, когда дифференциальные уравнения движения объекта с недостаточной степенью точности описывают динамику управляемого процесса.

Другой сферой применения позиционных стратегий являются конфликтно-управляемые динамические объекты, математическими моделями которых служат дифференциальные игры. Позиционные стратегии управления не являются предметом изучения данного пособия.

Пусть $P \subset R^r$ - область изменения вектора управляющих параметров.

Определение 8. Программной стратегией управления динамическим объектом на промежутке времени $[t_0, T] \subset R^1$ называется функция вида

$$U : [t_0, T] \rightarrow P \subset R^r .$$

Обычно оговаривается класс допустимых программных стратегий. В частности, если им является класс кусочно-непрерывных (в точках разрыва непрерывных справа) функций, то допустимые программные управления можно отождествить с допустимыми реализациями вектора управляющих параметров. В этом случае программные стратегии будем также называть программными управлениями и обозначать строчными буквами.

В теоретических исследованиях программные стратегии обычно принадлежат более широким, классам функций, таким, как например, пространство $L_p[t_0, T]$, $p \in [1, \infty]$. Здесь символом $L_p[t_0, T]$, $p \in [1, \infty)$ обозначено пространство измеримых вектор функций $u : [t_0, T] \rightarrow P \subset R^r$, для которых функция $\|u(\cdot)\|^p$ суммируема на промежутке $[t_0, T]$ в смысле Лебега, с нормой

$$\|u\|_{L_p} = \left(\int_{t_0}^T \|u(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} .$$

При $p = \infty$ под символом $L_\infty[t_0, T]$ понимается пространство ограниченных измеримых функций, $u : [t_0, T] \rightarrow P \subset R^r$ с нормой

$$\|u\|_{L_\infty} = \text{ess sup}_{t \in [t_0, T]} \|u(t)\| = \inf_{v(\cdot)} \sup_{t \in [t_0, T]} \|v(t)\| ,$$

где $v(\cdot)$ пробегает множество всех измеримых функций, совпадающих с функцией $u(\cdot)$ почти всюду на отрезке $[t_0, T]$.

Класс допустимых программных стратегий должен удовлетворять следующему свойству: любую допустимую программную стратегию $U(\cdot)$ можно сколь угодно точно приблизить (в смысле сходимости в среднем

$\int_{t_0}^T \|u_s(t) - U(t)\| dt \rightarrow 0, s \rightarrow \infty$) реализацией вектора управляющих параметров

$$u_s(t), s = 1, 2, \dots, t \in [t_0, T].$$

В частности, пусть класс допустимых программных стратегий принадлежит пространству $L_p[t_0, T], p \in [1, \infty]$. Тогда указанное свойство следует из того, что множество непрерывных функций всюду плотно в $L_1[t_0, T]$ [16].

В дальнейшем, если не оговорено противное, множество допустимых программных стратегий будем считать принадлежащим пространству суммируемых по Лебегу функций.

Определение 9. *Движением динамического объекта на интервале времени $[t_0, T]$, выходящим из начального положения $\{t_0, x_0\}$ и порожденным допустимой программной стратегией $U(\cdot)$, называется функция $x: [t_0, T] \rightarrow R^n$, определенная равенством*

$$x(t) = X[t, t_0]x_0 + \int_{t_0}^t X[t, \tau]B(\tau)U(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t X[t, \tau]C(\tau)d\tau, t \in [t_0, T]. \quad (1)$$

В общем случае интегралы в формуле (1) следует понимать в смысле Лебега.

Движение объекта, определенное формулой (1), обозначим символом

$$x(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0, U(\cdot)).$$

Пусть $\{u_s(\cdot)\}$ - последовательность реализаций вектора управляющих воздействий, аппроксимирующая программное управление $U(\cdot)$, и $x_s(\cdot)$ движение объекта, отвечающее реализации $u_s(\cdot), s = 1, 2, \dots$. Тогда справедлива оценка

$$\|x(t) - x_s(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t X[t, \tau]B(\tau)[U(\tau) - u_s(\tau)]d\tau \right\| \leq M \int_{t_0}^T \|U(\tau) - u_s(\tau)\|d\tau,$$

$$t \in [t_0, T], M = const.$$

Из нее следует, что последовательность функций $\varphi_s(\cdot)$, определенных формулой

$$\varphi_s(t) = \|x(t) - x_s(t)\|, t \in [t_0, T], s = 1, 2, \dots$$

равномерно сходится к нулю на отрезке времени $[t_0, T]$.

Таким образом, любое движение динамического объекта можно рассматривать как равномерный предел движений объекта, порожденных соответствующими допустимыми реализациями вектора управляющих воздействий. При этом оно принадлежит классу абсолютно непрерывных на промежутке $[t_0, T]$ функций и удовлетворяет на нем дифференциальному уравнению

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)U(t) + C(t)$$

почти всюду.

1.8. Постановка и существование решения задачи теории оптимального управления. Пусть заданы дифференциальные уравнения (1.2) движения динамического объекта, критерий качества (6.1), множество начальных и конечных моментов времени $\theta_0 \subset R^1$, $\theta_1 \subset R^1$, $\inf \theta_0 \leq \sup \theta_1$, область изменения вектора управляющих параметров $P \subset R^r$, ограничения на левый конец $S_0(t_0) \subset R^n$, $t_0 \in \theta_0$ и правый конец $S_1(T)$, $T \in \theta_1$ фазовой траектории динамического объекта, и допустимая программная стратегия $U(\cdot)$.

Определение 10. Набор $(t_0, T, x_0, U(\cdot), x(\cdot))$ назовем допустимым, если

$$t_0 \in \theta_0, T \in \theta_1, t_0 < T, x(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0, U(\cdot)), x_0 \in S_0(t_0), x(T) \in S_1(T).$$

На множестве допустимых наборов посредством формулы (6.1) определим функционал $I : (t_0, T, x_0, U(\cdot), x(\cdot)) \rightarrow I[t_0, T, x_0, U(\cdot), x(\cdot)]$ и поставим следующую задачу.

Задача 1. Определить допустимый набор $(t_0^0, T^0, x_0^0, U^0(\cdot), x^0(\cdot))$ такой, что для любого другого допустимого набора $(t_0, T, x_0, U(\cdot), x(\cdot))$ выполнялось бы неравенство

$$I[t_0^0, T^0, x_0^0, U^0(\cdot), x^0(\cdot)] \leq I[t_0, T, x_0, U(\cdot), x(\cdot)].$$

Допустимый набор $(t_0^0, T^0, x_0^0, U^0(\cdot), x^0(\cdot))$ назовем решением задачи оптимального управления, $U^0(\cdot)$ – оптимальной программной стратегией, $x^0(\cdot)$ – оптимальной траекторией. В задаче 1 требуется минимизировать функционал I . Случай максимизации функционала сводится к эквивалентной задаче минимизации функционала $-I$.

Сформулированная задача 1 оптимального управления динамическим объектом не всегда имеет решение. Покажем это на примере.

Пример 10. Рассмотрим управляемый динамический объект

$$\dot{x} = u, \quad x \in R^1, \quad u \in [-1, 1], \quad \theta_0 = \{0\}, \quad \theta_1 = (0, +\infty), \quad S_0 = \{0\}, \quad S_1(T) = \left\{ x \mid x - \frac{1}{T} = 0, T \in \theta_1 \right\},$$

$$I[T, u(\cdot)] = x(T).$$

Очевидно, что $I[T, U(\cdot)] = \frac{1}{T} > 0$. Для каждого $\hat{T} > 0$ положим

$$u_{\hat{T}}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, \hat{T}] \\ 1 & t > \hat{T}. \end{cases}$$

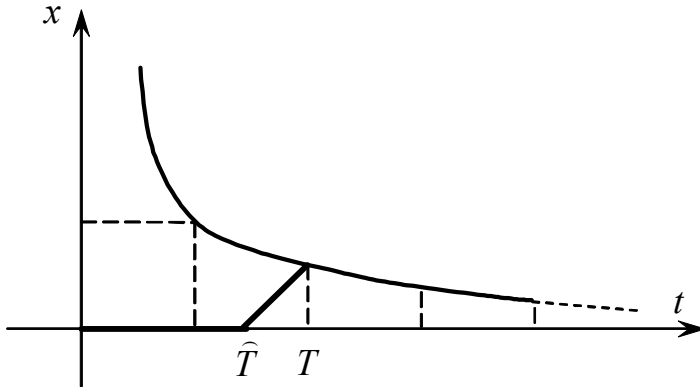


Рис. 7

Траектория движения, отвечающая программному управлению $u_{\hat{T}}(\cdot)$, изображена на рис. 7.

Момент времени T окончания процесса в данном случае удовлетворяет неравенству $T > \hat{T}$, и

поэтому $\frac{1}{T} < \frac{1}{\hat{T}}$. Выбирая величину \hat{T} достаточно большой, значение функционала $I[\hat{T}, u_{\hat{T}}(\cdot)] = \frac{1}{\hat{T}}$ можно сделать сколь угодно малым. Однако программной стратегии $U(\cdot)$, для которой $I[T, U(\cdot)] = 0$, не существует в классе $L_p[t_0, T]$, $p \in [1, \infty]$. Отсюда заключаем, что рассматриваемая задача оптимального управления решения не имеет.

Для задачи теории оптимального управления

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t),$$

1. ЛИНЕЙНЫЕ УПРАВЛЯЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ

$$t \in [t_0, T], \quad t_0 \in \theta_0 = [t_{0*}, t_0^*], \quad T \in \theta_1 = [T_*, T^*], \quad t_0^* < T_*,$$

$$x \in R^n, \quad u \in P \subset R^r, \quad x_0 \in S_0(t_0), \quad t_0 \in \theta_0, \quad x(T) \in S_1(T), \quad T \in \theta_1,$$

$$I[t_0, T, x_0, u(\cdot), x(\cdot)] = \Phi(t_0, T, x_0, x(T))$$

выведем достаточные условия существования ее решения в классе интегрируемых по Лебегу программных стратегий.

Теорема 5 (существование решения задачи теории оптимального управления).

Пусть выполнены следующие предположения:

1) множество $P \subset R^r$ компактно и выпукло;

2) множество $\Xi = \{e = (t_0, T, x_0, x_T) \mid x_0 \in S_0(t_0), x_T \in S_1(T), t_0 \in \theta_0, T \in \theta_1\} \subset R^{2(n+1)}$

компактно;

3) множество допустимых наборов $G = \{(t_0, T, x_0, U(\cdot), x(\cdot))\}$ содержит хотя бы один элемент;

4) множество допустимых программных стратегий принадлежит пространству функций, интегрируемых по Лебегу на интервале управления.

Тогда существует допустимый набор $(t_0^0, T^0, x_0^0, U^0(\cdot), x^0(\cdot)) \in G$, на котором функционал I достигает минимума.

Доказательству теоремы предпошлем лемму.

Лемма 2. Пусть $R: [t_0, t] \rightarrow K \subset R^n$ – интегрируемая по Лебегу функция и множество K – выпуклый компакт. Тогда

$$\frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t R(\tau) d\tau \in K. \quad (1)$$

Доказательство. Известно [16], что для всякой интегрируемой по Лебегу функции R , определенной на интервале $[t_0, t]$, найдется последовательность ступенчатых функций $\{R_s\}$, определенных и равномерно сходящихся на этом интервале к функции R , причем справедливо равенство

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t R_s(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t R(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Покажем, что включение (1) справедливо для всякой ступенчатой функции $R: [t_0, T] \rightarrow K$. Напомним, что функция называется ступенчатой, если она принимает конечное число значений $R^{(1)}, \dots, R^{(k)} \in K$. Обозначим

$$T_j = \left\{ \tau \in [t_0, t] \mid R(\tau) = R^{(j)} \right\}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Тогда

$$\frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^t R(\tau) d\tau = \frac{1}{t-t_0} \sum_{j=1}^k R^{(j)} \mu(T_j). \quad (3)$$

Здесь $\mu(T_j)$ – мера множества T_j , $j = 1, \dots, k$. Заметим, что

$$\frac{1}{t-t_0} \sum_{j=1}^k \mu(T_j) = 1.$$

Выражение (3) представляет собой выпуклую комбинацию векторов $R^{(j)} \in K$, $j = 1, \dots, k$. Отсюда следует справедливость включения (1) для случая, когда функция R ступенчатая. Доказательство общего случая использует предельный переход в (2) и условие компактности множества K .

Доказательство теоремы. В силу компактности множества Ξ функционал I ограничен на множестве допустимых наборов G . Из условия $G \neq \emptyset$ следует существование для функционала I минимизирующей последовательности $\left\{ (t_0^s, T^s, x_0^s, U^s(\cdot), x^s(\cdot)) \right\}$, $(t_0^s, T^s, x_0^s, U^s(\cdot), x^s(\cdot)) \in G$, $s = 1, 2, \dots$, т.е. такой последовательности, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} I \left[t_0^s, T^s, x_0^s, U^s(\cdot), x^s(\cdot) \right] = \inf_{(t_0, T, x_0, U(\cdot), x(\cdot)) \in G} I \left[t_0, T, x_0, U(\cdot), x(\cdot) \right] = I_*, \quad |I_*| < \infty.$$

В силу 2) из последовательности $\left\{ (t_0^s, T^s, x_0^s, x^s(T^s)) \right\}$, $s = 1, 2, \dots$ можно извлечь сходящуюся. Не теряя общности, считаем, что

$$\left\{ (t_0^s, T^s, x_0^s, x^s(T^s)) \right\} \rightarrow (t_0^0, T^0, x_0^0, x^{T^0}) \in \Xi.$$

Рассмотрим последовательность движений

$$\left\{ x^{(s)}(\cdot) \right\}, \quad x^{(s)}(\cdot) = x(\cdot, t_0^s, x_0^s, U^s(\cdot)), \quad s = 1, 2, \dots$$

Для всех номеров $s = 1, 2, \dots$ справедливо равенство

$$x^{(s)}(t) = X \left[t, t_0^s \right] x_0^s + \int_{t_0}^t X \left[t, \tau \right] B(\tau) U^s(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t X \left[t, \tau \right] C(\tau) d\tau, \quad t \in \left[t_0^s, T^s \right]. \quad (4)$$

Полагаем

$$x^{(s)*}(t) = \begin{cases} x_0^s, & t \in [t_{0*}, t_0^s], \\ x^{(s)}(t), & t \in [t_0^s, T^s], \\ x^{(s)}(T^s), & t \in (T^s, T^*]. \end{cases} \quad (5)$$

Из компактности множеств Ξ, P и формул (4) (5) следует, что функции, образующие последовательность $\{x^{(s)*}(\cdot)\}$, равномерно ограничены и равномерно непрерывны на отрезке $[t_{0*}, T^*]$. По теореме Арцела (при необходимости следует перейти к подпоследовательности) эта последовательность равномерно сходится на отрезке $[t_{0*}, T^*]$ к некоторой абсолютно непрерывной функции $x^{0*}(\cdot)$. Очевидно, что

$$x^{0*}(t_0^0) = x_0^0, \quad x^{0*}(T^0) = x^{T^0}.$$

Обозначим через $x^0(\cdot)$ сужение функции $x^{0*}(\cdot)$ на отрезке $[t_0^0, T^0]$ и докажем существование допустимой программной стратегии $U^0(\cdot)$, для которой почти всюду на отрезке $[t_0^0, T^0]$ выполняется равенство

$$\dot{x}^0(t) = A(t)x^0(t) + B(t)U^0(t) + C(t). \quad (6)$$

Пусть $t \in (t_0, T^0)$ – точка, где функция $x^0(\cdot)$ имеет производную. Для достаточно больших номеров $s = 1, 2, \dots$ и малых положительных чисел h будет выполнено вложение $[t, t+h] \subset [t_0^s, T^s]$. Из равенства

$$x^{(s)}(t) = x_0^s + \int_{t_{0*}}^t A(\tau)x^{(s)}(\tau)d\tau + \int_{t_{0*}}^t B(\tau)U^s(\tau)d\tau + \int_{t_{0*}}^t C(\tau)d\tau, \quad t \in [t, t+h]$$

следует

$$\frac{x^{(s)}(t+h) - x^{(s)}(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} [A(\tau)x^{(s)}(\tau) + B(\tau)U^s(\tau) + C(\tau)]d\tau. \quad (7)$$

В силу равномерной сходимости последовательности функций $\{x^{(s)}(\cdot)\}$ к функции $x^0(\cdot)$, для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно малого $h > 0$, начиная с некоторого номера s , будет выполняться включение

$$A(\tau)x^{(s)}(\tau) + B(\tau)U^s(\tau) + C(\tau) \in K(x^0(t), \varepsilon), \tau \in [t, t+h],$$

где

$$K(x^0(t), \varepsilon) = A(t)x^0(t) + B(t)P + C(t) + \bar{O}(0, \varepsilon).$$

Множество $K(x^0(t), \varepsilon)$ является выпуклым компактом. Тогда по лемме 2 следует, что

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} [A(\tau)x^s(\tau) + B(\tau)U^s(\tau) + C(\tau)] d\tau \in K(x^0(t), \varepsilon).$$

Отсюда и из равенства (7) выводим

$$\frac{x^{(s)}(t+h) - x^{(s)}(t)}{h} \in A(t)x^0(t) + B(t)P + C(t) + \bar{O}(0, \varepsilon).$$

Переходя в нем к пределу при $s \rightarrow \infty$, получим

$$\frac{x^0(t+h) - x^0(t)}{h} \in A(t)x^0(t) + B(t)P + C(t) + \bar{O}(0, \varepsilon). \quad (8)$$

Из существования производной функции $x^0(\cdot)$ в точке t вытекает возможность предельного перехода в левой части равенства (8) при $h \rightarrow 0$. В результате такого перехода получим

$$\dot{x}^0(t) \in A(t)x^0(t) + B(t)P + C(t) + \bar{O}(0, \varepsilon).$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ выводим

$$x^0(t) \in A(t)x^0(t) + B(t)P + C(t).$$

Итак, установлено, что для каждого момента времени $t \in [t_0^0, T^0]$, в который существует производная функции $x^0(\cdot)$, найдется вектор $u^0(t) \in P$, удовлетворяющий равенству (6). По лемме об измеримом выборе [31] функция $u^0(\cdot)$ может быть выбрана интегрируемой по Лебегу. Допустимую программную стратегию $U^0(\cdot)$ отождествим с функцией $u^0(\cdot)$.

Очевидно, что набор $(t_0^0, T^0, x_0^0, U^0(\cdot), x^0(\cdot))$ является допустимым, и при этом

$$\begin{aligned} I_* &= \lim_{s \rightarrow \infty} I[t_0^s, T^s, x_0^s, U^s(\cdot), x^s(\cdot)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \Phi(t_0^s, T^s, x_0^s, x^s(T^s)) = \Phi(t_0^0, T^0, x_0^0, x^0(T^0)) = \\ &= I(t_0^0, T^0, x_0^0, U^0(\cdot)). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

1.9. Область достижимости линейного управляемого динамического объекта. Важной характеристикой управляемого объекта является его область достижимости. Пусть $t_0 \in \theta_0, x_0 \in S_0(t_0), T \in \theta_1$. Символом $\Pi[t_0, T]$ обозначим множество всех допустимых программных стратегий вида $U : [t_0, T] \rightarrow P$.

Определение 11. *Множество*

$$G(t_0, x_0, T) = \{q = x(T, t_0, x_0, U(\cdot)) \mid U(\cdot) \in \Pi[t_0, T]\} \subset R^n$$

называется областью достижимости управляемого динамического объекта в момент времени T для начального положения $\{t_0, x_0\}$.

Теорема 6. *Пусть множество $P \subset R^r$ выпукло и компактно. Тогда область достижимости является выпуклым компактным множеством в пространстве R^n .*

Доказательство. *Из определения области достижимости для всякого $q \in G(t_0, x_0, T)$ следует существование программной стратегии $U(\cdot) \in \Pi[t_0, T]$ такой, что*

$$q = X[T, t_0]x_0 + \int_{t_0}^T X[T, \tau]B(\tau)U(\tau)d\tau + \int_{t_0}^T X[T, \tau]C(\tau)d\tau, \quad (1)$$

где $X[s, t], s, t \in [t_0, T]$ – фундаментальная матрица Коши, отвечающая однородному дифференциальному уравнению $\dot{x} = A(t)x, t \in [t_0, T]$. Оценим по норме вектор q . Имеем

$$\|q\| \leq \|X[T, t_0]\| \|x_0\| + \int_{t_0}^T \|X[T, \tau]\| \|B(\tau)\| \|U(\tau)\| d\tau + \int_{t_0}^T \|X[T, \tau]\| \|C(\tau)\| d\tau.$$

В силу ограниченности множества $P \subset R^r$ из последнего неравенства вытекает ограниченность области достижимости. Пусть \tilde{q} – предельная точка области достижимости и $\{q^{(s)}\} \rightarrow \tilde{q}, q^{(s)} \in G(t_0, x_0, T)$. Из равенства (1) следует, что для всех $s = 1, 2, \dots$ будет справедливо

$$q^{(s)} = X[T, t_0]x_0 + \int_{t_0}^T X[T, \tau]B(\tau)U^{(s)}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^T X[T, \tau]C(\tau)d\tau, \quad (2)$$

где $U^{(s)}(\cdot) \in \Pi[t_0, T]$. В силу слабой компактности множества $\Pi[t_0, T]$ [16] из последовательности функций $\{U^{(s)}(\cdot)\}$ можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к функции $\tilde{U}(\cdot) \in \Pi[t_0, T]$. Переходя к пределу по подходящей подпоследовательности индексов в (2), получаем равенство

$$q_* = X[T, t_0]x_0 + \int_{t_0}^T X[T, \tau]B(\tau)\tilde{U}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^T X[T, \tau]C(\tau)d\tau. \quad (3)$$

Равенство (3) означает, что $q_* \in G(t_0, x_0, T)$. Отсюда следует замкнутость области достижимости. Докажем ее выпуклость. Пусть $q^{(1)}, q^{(2)} \in G(t_0, x_0, T)$. Это означает, что существуют функции $U^{(1)}(\cdot), U^{(2)}(\cdot) \in \Pi[t_0, T]$, для которых справедливы равенства

$$q^{(i)} = X[T, t_0]x_0 + \int_{t_0}^T X[T, \tau]B(\tau)U^{(i)}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^T X[T, \tau]C(\tau)d\tau, \quad i=1, 2. \quad (4)$$

Для любого $\alpha \in [0, 1]$ положим $q_\alpha = \alpha q^{(1)} + (1 - \alpha)q^{(2)}$. В силу (1) имеем

$$q_\alpha = X[T, t_0]x_0 + \int_{t_0}^T X[T, \tau]B(\tau)[\alpha U^{(1)}(\tau) + (1 - \alpha)U^{(2)}(\tau)]d\tau + \int_{t_0}^T X[T, \tau]C(\tau)d\tau. \quad (5)$$

Из выпуклости множества P следует, что $\alpha U^{(1)}(\tau) + (1 - \alpha)U^{(2)}(\tau) \in P$ для всех $\tau \in [t_0, T]$. Это означает справедливость включения $\alpha U^{(1)}(\cdot) + (1 - \alpha)U^{(2)}(\cdot) \in \Pi[t_0, T]$. Тогда в силу (5) заключаем, что $q_\alpha \in G(t_0, x_0, T)$. Таким образом, область достижимости выпукла. Теорема доказана.

Упражнения для самостоятельной работы

Даны дифференциальные уравнения движения управляемых линейных динамических объектов

$$\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = -3x_1 + 4x_2 - 6x_3 + u_1, & \dot{x}_1 = -2x_1 - 4x_2 - 60x_3 + u_1, \\ \text{а) } \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + u_2, & \text{б) } \dot{x}_2 = -4x_1 - x_2 - 51x_3 + u_2, \\ \dot{x}_3 = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + u_3, & \dot{x}_3 = 2x_1 - 2x_2 + x_3 + u_3, \end{array}$$

1. ЛИНЕЙНЫЕ УПРАВЛЯЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ

$$\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = 2x_1 + 4x_2 - 16x_3 + u_1, & \dot{x}_1 = -3x_1 - x_2 - 5x_3 + u_1, \\ \text{в) } \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 + 21x_3 + u_2, & \text{г) } \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + u_2, \\ \dot{x}_3 = -2x_1 - 2x_2 + x_3 + u_3, & \dot{x}_3 = x_1 + x_2 + 2x_3 + u_3. \end{array}$$

1. Записать дифференциальные уравнения движения в матричной форме.

2. Для однородных систем линейных дифференциальных уравнений, соответствующих заданным неоднородным системам, построить фундаментальную матрицу Коши двумя способами: с использованием операции обращения матрицы и без использования. Убедиться в том, что оба метода строят одну и ту же матрицу. Проверить выполнение свойств (3.1)-(3.4) фундаментальной матрицы Коши.

3. Проверить справедливость формулы Коши (5.1) при следующих дополнительных данных:

$$\text{а) } x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t_0 = 0, T = 1,$$

$$u_1(t) = \sin t, u_2(t) = \cos t, u_3(t) = e^t,$$

$$\text{б) } x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t_0 = 0, T = 1,$$

$$u_1(t) = t, u_2(t) = e^{-t}, u_3(t) = \cos t,$$

$$\text{в) } x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t_0 = 0, T = 1,$$

$$u_1(t) = \sin t, u_2(t) = t^2, u_3(t) = e^t,$$

$$\text{г) } x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t_0 = 0, T = 1,$$

$$u_1(t) = e^t, u_2(t) = \sin t, u_3(t) = -\cos t.$$

4. Вычислить критерии оптимальности для движений, отвечающих указанным в пункте 3 задания управлениям и выходящих из приведенных там же начальных положений

$$\begin{array}{ll} I[u(\cdot)] = & I[u(\cdot)] = \\ \text{а) } = \int_0^1 \sqrt{x_1(\tau)u_1(\tau) + x_2(\tau)u_2(\tau) + x_3(\tau)u_3(\tau)} d\tau + & \text{б) } = \int_0^1 \sqrt{x_1(\tau) + x_2(\tau) + x_3(\tau)} d\tau + \\ + x_1^2(0) + x_2^2(0) - 2x_1(1)x_2(1)x_3(1) & + x_1^2(0) + x_2(1) + x_3(0) \end{array}$$

1. ЛИНЕЙНЫЕ УПРАВЛЯЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ

$$\begin{aligned}
 I[u(\cdot)] &= & I[u(\cdot)] &= \\
 \text{B)} &= \int_0^1 \sqrt{u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau) + x_3(\tau)u_3(\tau)} d\tau + & \Gamma) &= \int_0^1 \sqrt{x_1^2(\tau) + x_2^2(\tau) + x_3(\tau)u_3(\tau)} d\tau + \\
 &+ x_1^2(1) + x_2^2(1) - 2x_1(0)x_2(0)x_3(0) & &+ x_1(1) - x_2(1) - 2x_1(1)x_2(0)x_3(1).
 \end{aligned}$$

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

2.1. Случай закрепленного левого конца и свободного правого конца траектории. Рассматривается следующая задача теории оптимального управления.

Задача 1. Найти допустимую программную стратегию $U^0(\cdot) \in \Pi[t_0, T]$, доставляющую минимум функционалу

$$I[U(\cdot)] = \Phi(x(T)), \Phi \in C^1(R^1)$$

при ограничениях

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t), \quad x \in R^n, u \in P \subset R^r,$$

$$\theta_0 = \{t_0\}, \theta_1 = \{T\}, S_0 = \{x_0\}, S_1 = R^n,$$

где множество $P \subset R^r$ является выпуклым компактом.

По теореме 1.6 область достижимости $G(t_0, x_0, T)$ является компактом в пространстве R^n . Тогда в силу непрерывности функции Φ решение задачи 1 существует.

Пусть $U^0(\cdot)$ - оптимальная программная стратегия. Обозначим через $x^0(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0, U^0(\cdot))$ оптимальное движение объекта, а через $\psi^0(\cdot)$ - решение сопряженной системы дифференциальных уравнений (1.3.7), удовлетворяющее условию

$$\psi^0(T) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x^0(T)).$$

Теорема 1 (принцип максимума Л.С. Понтрягина). *Оптимальная программная стратегия $U^0(\cdot)$ удовлетворяет следующему условию максимума:*

$$\langle B(t)U^0(t), \psi^0(t) \rangle = \max_{u \in P} \langle B(t)u, \psi^0(t) \rangle \quad (1)$$

для почти всех $t \in [t_0, T]$.

Доказательство. Из выпуклости области достижимости $G(t_0, x_0, T)$ в силу [7] следует, что для всех $q \in G(t_0, x_0, T)$ имеет место неравенство

$$0 \leq \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x^0(T)), q - x^0(T) \right\rangle = -\langle \psi^0(T), q - x^0(T) \rangle = \langle \psi^0(T), x^0(T) \rangle - \langle \psi^0(T), q \rangle. \quad (2)$$

Тогда для всех $u(\cdot) \in \Pi[t_0, T]$ должно выполняться

$$\begin{aligned} & \left\langle \psi^0(T), X[T, t_0]x_0 + \int_{t_0}^T X[T, \tau]B(\tau)U^0(\tau)d\tau + \int_{t_0}^T X[T, \tau]C(\tau)d\tau \right\rangle - \\ & - \left\langle \psi^0(T), X[T, t_0]x_0 + \int_{t_0}^T X[T, \tau]B(\tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_0}^T X[T, \tau]C(\tau)d\tau \right\rangle = \\ & = \left\langle \psi^0(T), \int_{t_0}^T X[T, \tau]B(\tau)U^0(\tau)d\tau \right\rangle - \left\langle \psi^0(T), \int_{t_0}^T X[T, \tau]B(\tau)u(\tau)d\tau \right\rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Последнее возможно, только если

$$\left\langle \psi^0(T), \int_{t_0}^T X[T, \tau]B(\tau)U^0(\tau)d\tau \right\rangle = \max_{u(\cdot) \in \Pi[t_0, T]} \left\langle \psi^0(T), \int_{t_0}^T X[T, \tau]B(\tau)u(\tau)d\tau \right\rangle. \quad (3)$$

Последовательно преобразуем левую и правую части равенства (3). Имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \langle \psi^0(T), X[T, \tau]B(\tau)U^0(\tau) \rangle d\tau &= \max_{u(\cdot) \in \Pi[t_0, T]} \int_{t_0}^T \langle \psi^0(T), X[T, \tau]B(\tau)u(\tau) \rangle d\tau \Rightarrow \\ \int_{t_0}^T \langle \psi^0(T), X^{-1}[\tau, T]B(\tau)U^0(\tau) \rangle d\tau &= \max_{u(\cdot) \in \Pi[t_0, T]} \int_{t_0}^T \langle \psi^0(T), X^{-1}[\tau, T]B(\tau)u(\tau) \rangle d\tau \Rightarrow \\ \int_{t_0}^T \langle \{X^{-1}[\tau, T]\}^{Tp} \psi^0(T), B(\tau)U^0(\tau) \rangle d\tau &= \max_{u(\cdot) \in \Pi[t_0, T]} \int_{t_0}^T \langle \{X^{-1}[\tau, T]\}^{Tp} \psi^0(T), B(\tau)u(\tau) \rangle d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (1.5.2) выводим

$$\int_{t_0}^T \langle \psi^0(\tau), B(\tau)U^0(\tau) \rangle d\tau = \max_{u(\cdot) \in \Pi[t_0, T]} \int_{t_0}^T \langle \psi^0(\tau), B(\tau)u(\tau) \rangle d\tau$$

В книге [18] показано, что

$$\max_{u(\cdot) \in \Pi[t_0, T]} \int_{t_0}^T \langle \psi^0(\tau), B(\tau)u(\tau) \rangle d\tau = \int_{t_0}^T \max_{u \in P} \langle \psi^0(\tau), B(\tau)u \rangle d\tau.$$

Тогда

$$\int_{t_0}^T \left[\langle \psi^0(\tau), B(\tau)U^0(\tau) \rangle - \max_{u \in P} \langle \psi^0(\tau), B(\tau)u \rangle \right] d\tau = 0,$$

что и означает выполнение условия (1). Теорема доказана.

Функция

$$H(t, x, u, \psi) = \langle A(t)x + B(t)u + C(t), \psi \rangle$$

представляет собой функцию Л.С. Понтрягина [25] для рассматриваемого управляемого динамического объекта. Таким образом, доказанная теорема утверждает, что на оптимальном управлении функция Л.С. Понтрягина достигает максимального значения.

Заметим, что для выпуклых функций Φ неравенство (2) является достаточным условием минимума функции Φ на множестве $G(t_0, x_0, T)$. Тогда условие

(1) будет не только необходимым, но и достаточным для оптимальности программной стратегии $U^0(\cdot)$.

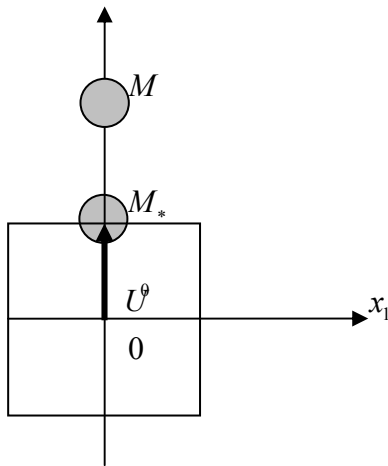


Рис. 1

Пример 1. Рассмотрим линейный управляемый динамический объект

$$\dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = u_2, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in P = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in R^2 \mid |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1 \right\},$$

$$\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t_0 = 0, T = 1, \Phi(x) = \sqrt{x_1^2 + (x_2 - 2)^2}.$$

Оптимальное управление объектом, как видно из рис. 1, здесь состоит в том, чтобы перевести управляемую точку из начала координат в положение $M_* \div \begin{pmatrix} x_1^0(1) \\ x_2^0(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Это можно осуществить только программной стратегией вида

$$U^0(t) = \begin{pmatrix} u_1^0(t) \\ 1 \end{pmatrix}, \int_0^1 u_1^0(\tau) d\tau = 0, \quad t \in [0, 1]. \quad (4)$$

Проверим выполнение условий теоремы 1 для таких стратегий. Сопряженная система дифференциальных уравнений и граничные условия для нее здесь имеют вид

$$\dot{\psi}_1 = 0, \dot{\psi}_2 = 0,$$

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

$$\psi_1(1) = -\frac{x_1^0(1)}{\sqrt{(x_1^0(1))^2 + (x_2^0(1) - 2)^2}} = 0,$$

$$\psi_2(1) = -\frac{x_2^0(1) - 2}{\sqrt{(x_1^0(1))^2 + (x_2^0(1) - 2)^2}} = 1.$$

Интегрируя, находим, что

$$\psi_1^0(t) \equiv 0, \quad \psi_2^0(t) \equiv 1, \quad t \in [0, 1].$$

Выпишем функцию Л.С. Понтрягина, вычисленную вдоль оптимальной пары $(x^0(\cdot), \psi^0(\cdot))$. Имеем

$$H(t, x^0(t), u, \psi^0(t)) = \psi_1^0(t)u_1 + \psi_2^0(t)u_2 = u_2, \quad t \in [0, 1].$$

Отсюда следует, что

$$\max_{u \in P} H(t, x^0(t), u, \psi^0(t)) = \max_{|u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1} (\psi_1^0(t)u_1 + \psi_2^0(t)u_2) = \max_{|u_2| \leq 1} u_2 = 1, \quad t \in [0, 1]. \quad (5)$$

Очевидно, что программное управление (4) доставляет максимум в (5) и, следовательно, удовлетворяет условию (1).

Практическое применение **теоремы 1** для поиска решения задачи управления осуществляется следующим образом.

Для каждой фиксированной пары $(t, \psi) \in [t_0, T] \times R^n$ решается задача математического программирования

$$\langle B^{Tp}(t)\psi, u \rangle \rightarrow \max, \quad u \in P. \quad (6)$$

Распишем подробнее левую часть условия (6). Имеем

$$B^{Tp}(t)\psi = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{n1}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1r}(t) & \cdots & b_{nr}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \cdots \\ \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n b_{k1}(t)\psi_k \\ \cdots \\ \sum_{k=1}^n b_{kr}(t)\psi_k \end{pmatrix}.$$

Тогда задача математического программирования принимает вид

$$u_1 \left(\sum_{k=1}^n b_{k1}(t)\psi_k \right) + \cdots + u_r \left(\sum_{k=1}^n b_{kr}(t)\psi_k \right) \rightarrow \max, \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_r \end{pmatrix} \in P. \quad (7)$$

По теореме Вейерштрасса максимум в условии (7) существует для любой пары $(t, \psi) \in [t_0, T] \times R^n$. Следовательно, можно определить вектор-функцию

$$\hat{U} : [t_0, T] \times R^n \rightarrow P, \quad (8)$$

которая каждой паре $(t, \psi) \in [t_0, T] \times R^n$ ставит в соответствие вектор $\hat{U}(t, \psi) \in P$, доставляющий максимум в условии (7).

Пусть функция \hat{U} уже построена. Рассмотрим систему из $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)\hat{U}(t, \psi) + C(t), \\ \dot{\psi} = -A^{Tp}\psi. \end{cases} \quad (10)$$

относительно $2n$ неизвестных x, ψ с $2n$ граничными условиями

$$x(t_0) = x_0, \quad \psi(T) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x^0(T)). \quad (11)$$

Заметим, что в общем случае эта система нелинейная. Более того, функция \hat{U} может оказаться разрывной по переменной ψ , и тогда для системы дифференциальных уравнений (10) не будут выполняться условия существования решения. В случае, когда все же для задачи (10), (11) получено решение $x^0(\cdot), \psi^0(\cdot)$, программная стратегия $U^0(\cdot) = \hat{U}(\cdot, \psi^0(\cdot))$ будет удовлетворять условиям **теоремы 1**, т.е. являться стратегией подозрительной на оптимальную стратегию.

2.2. Поведение функции Л.С. Понтрягина вдоль оптимальной пары

В предыдущем пункте (**теорема 1**) было доказано, что функция Понтрягина на оптимальном управлении принимает максимальное значение. Установим ниже некоторые общие свойства функции максимума (минимума).

Пусть $F : X \times Y \rightarrow R^1$, $X \subset R^n$, $Y \subset R^m$ – некоторая функция, непрерывная по совокупности своих переменных в каждой точке области определения. При этом множество Y компактное, а множество X – открытое. Положим

$$F^0(x) = \max_{y \in Y} F(x, y), \quad x \in X, \quad (1)$$

$$Y^0(x) = \{y^0(x) \mid F(x, y^0(x)) = F^0(x)\}, \quad x \in X.$$

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

Лемма 1. *Функция $F^0 : X \rightarrow R^1$, определенная равенством (1), является непрерывной в каждой точке $x \in X$.*

Доказательство. Пусть $x \in X$. Для всякого $\Delta x \in R^n, x + \Delta x \in X$ положим

$$\Delta F^0(x) = F^0(x + \Delta x) - F^0(x) = F(x + \Delta x, y^0(x + \Delta x)) - F(x, y^0(x)).$$

Справедливо двойное неравенство

$$F(x + \Delta x, y^0(x)) - F(x, y^0(x)) \leq \Delta F^0(x) \leq F(x + \Delta x, y^0(x + \Delta x)) - F(x, y^0(x + \Delta x)), \quad (2)$$

из которого следует, что $\Delta F^0(x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Лемма доказана.

Определение 1. Будем говорить, что многозначное отображение $\chi : X \rightarrow 2^Y$, где через 2^Y обозначено множество всех подмножеств множества Y , называется полунепрерывным сверху по включению в точке $x_* \in X$, если для всякой последовательности $\{x^{(s)}\} \rightarrow x_*$ и $\{y^{(s)}\} \rightarrow y_*$, $y^{(s)} \in \chi(x^{(s)})$, $s = 1, 2, \dots$ имеет место включение $y_* \in \chi(x_*)$.

Заметим, что если отображение χ однозначное, т.е. множество $\chi(x)$ состоит ровно из одного элемента при всех $x \in X$, то из полунепрерывности сверху по включению этого отображения следует его непрерывность в обычном смысле.

Лемма 2. *Многозначное отображение $Y^0 : X \rightarrow 2^Y$ полунепрерывно сверху по включению в каждой точке $x \in X$.*

Доказательство. От противного приходим к существованию точки $x_* \in X$ и таких последовательностей

$$\{x_s\} \rightarrow x_*, x_s \in X, \{y_s^0\} \rightarrow y_* \in Y, y_s^0 \in Y^0(x_s), s = 1, 2, \dots,$$

что $y_* \notin Y^0(x_*)$. Тогда найдется число $\varepsilon > 0$, для которого

$$F^0(x_*) - F(x_*, y_*) = \varepsilon. \quad (3)$$

Из непрерывности функций F, F^0 и сходимости последовательностей $\{x_s\}, \{y_s^0\}$ к точкам x_*, y_* , соответственно, для достаточно больших номеров s будут справедливы неравенства

$$|F^0(x_*) - F^0(x_s)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |F(x_*, y_*) - F(x_s, y_s^0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4)$$

Учитывая, что $F^0(x_s) = F(x_s, y_s^0)$, $s = 1, 2, \dots$, из соотношений (3), (4) выводим

$$\begin{aligned} \varepsilon = F^0(x_*) - F(x_*, y_*) &= |F^0(x_*) - F(x_*, y_*)| \leq \\ &\leq |F^0(x_*) - F^0(x_s)| + |F(x_s, y_s^0) - F(x_*, y_*)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Получили противоречие, которое и доказывает лемму.

Дополнительно предположим, что функция F непрерывно дифференцируема по переменной x в области X , а множество $Y^0(x)$ состоит ровно из одного элемента $y^0(x)$ при всех $x \in X$. Тогда, как отмечалось выше, функция $y^0 : X \rightarrow R^m$ будет непрерывной в каждой точке $x \in X$.

Теорема 2. В принятых предположениях функция $F^0 : X \rightarrow R^1$ непрерывно дифференцируема в каждой точке области определения и при этом имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial x} F^0(x) = \frac{\partial^*}{\partial^* x} F(x, y^0(x)), \quad x \in X, \quad (5)$$

где индекс «*» в обозначении производной по векторному аргументу x в правой части (5) означает, что эта производная вычисляется без учета зависимости y^0 от $x \in X$.

Доказательство. По формуле конечных приращений [7] из двойного неравенства (2) находим

$$\left\langle \frac{\partial^*}{\partial^* x} F(x, y^0(x + \Delta x)), \Delta x \right\rangle + o\|\Delta x\| \leq \Delta F^0(x) \leq \left\langle \frac{\partial^*}{\partial^* x} F(x, y^0(x)), \Delta x \right\rangle + o\|\Delta x\|. \quad (6)$$

Из соотношений (6) с учетом непрерывности функции y^0 следует, что

$$\Delta F^0(x) = \left\langle \frac{\partial^*}{\partial^* x} F(x, y^0(x)), \Delta x \right\rangle + o\|\Delta x\|.$$

Последнее условие означает дифференцируемость функции F^0 в точке $x \in X$ и справедливость равенства (5). Из непрерывности правой части равенства (5) следует непрерывность и его левой части. Теорема доказана.

Докажем одно важное свойство функции Л.С. Понтрягина.

Теорема 3. Пусть $A = const, B = const, C = const$ и тройка $U^0(\cdot), x^0(\cdot), \psi^0(\cdot)$

удовлетворяет условиям **теоремы 1**. Тогда функция Л.С. Понтрягина

$$H(t, x^0(t), U^0(t), \psi^0(t)) = \langle \psi^0(t), Ax^0(t) + BU^0(t) + C \rangle,$$

вычисленная вдоль оптимальной пары $(x^0(\cdot), \psi^0(\cdot))$, остается постоянной на всем промежутке времени $[t_0, T]$.

Доказательство. Вычисляем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \psi^0(t), Ax^0(t) + BU^0(t) + C \rangle &= \frac{d}{dt} \langle \psi^0(t), Ax^0(t) \rangle + \frac{d}{dt} \langle \psi^0(t), BU^0(t) + C \rangle = \\ &= \langle \dot{\psi}^0(t), Ax^0(t) \rangle + \langle \psi^0(t), A\dot{x}^0(t) \rangle + \frac{d}{dt} \langle \psi^0(t), BU^0(t) + C \rangle = \\ &= \langle -A^{Tp} \psi^0(t), Ax^0(t) \rangle + \langle A^{Tp} \psi^0(t), \dot{x}^0(t) \rangle + \frac{d}{dt} \langle \psi^0(t), BU^0(t) + C \rangle = \\ &= \langle -A^{Tp} \psi^0(t), Ax^0(t) \rangle + \langle A^{Tp} \psi^0(t), Ax^0(t) + BU^0(t) + C \rangle + \frac{d}{dt} \langle \psi^0(t), BU^0(t) + C \rangle = \\ &= -\langle \dot{\psi}^0(t), BU^0(t) + C \rangle + \frac{d}{dt} \langle \psi^0(t), BU^0(t) + C \rangle = \\ &= -\langle \dot{\psi}^0(t), BU^0(t) \rangle + \frac{d}{dt} \langle \psi^0(t), BU^0(t) \rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

В силу **теоремы 2** справедливо равенство

$$\frac{d}{dt} \langle \psi^0(t), BU^0(t) \rangle = \frac{\partial^*}{\partial t} \langle \psi^0(t), BU^0(t) \rangle = \langle \dot{\psi}^0(t), BU^0(t) \rangle.$$

Тогда из (12) следует, что

$$\frac{d}{dt} \langle \psi^0(t), Ax^0(t) + BU^0(t) + C \rangle = 0 \Rightarrow \langle \psi^0(t), Ax^0(t) + BU^0(t) + C \rangle = const, t \in [t_0, T].$$

Теорема доказана.

2.3 Частные случаи геометрических ограничений на вектор управляющих параметров. Иногда функция (1.8) может быть выписана в явном виде. Рассмотрим два таких частных случая.

Случай 1. Пусть

$$P = \left\{ u \in R^r \left| \sum_{i=1}^r \frac{(u^i)^2}{(a_i)^2} \leq 1 \right. \right\}, a_i > 0, i = 1, \dots, r.$$

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

Задача математического программирования по определению функции \hat{U} состоит в максимизации линейной формы (1,7) при квадратичных ограничениях

$$\sum_{i=1}^r \frac{(u^i)^2}{(a_i)^2} \leq 1.$$

Решение этой задачи приводится в **примере 1.4.3** книги [22]. Ее решением при ус-

ловии, что $\psi \neq 0$, служит вектор $\hat{U}(t, \psi) = \begin{pmatrix} \hat{U}^1(t, \psi) \\ \dots \\ \hat{U}^r(t, \psi) \end{pmatrix} \in P$, для которого

$$\hat{U}^i(t, \psi) = \frac{a_i^2 \left(\sum_{k=1}^n b_{ki}(t) \psi_k \right)}{\sqrt{\sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^n b_{ks}(t) \psi_k \right)^2} a_s^2}, \quad i = 1, \dots, r. \quad (1)$$

В частности, если $a_1 = \dots = a_r = a$, то формула (1) принимает вид

$$\hat{U}^i(t, \psi) = a \frac{\left(\sum_{k=1}^n b_{ki}(t) \psi_k \right)}{\sqrt{\sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^n b_{ks}(t) \psi_k \right)^2}}, \quad i = 1, \dots, r.$$

Пример 2*. Рассмотрим линейный управляемый динамический объект

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u_2, \quad t \in [0, \pi];$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad u \in P = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in R^2 \mid u_1^2 + u_2^2 \leq 1 \right\}, \quad x_1(0) = -3, \quad x_2(0) = 2;$$

$$I[U(\cdot)] = 3x_1^2(\pi) + 2x_2^2(\pi) \rightarrow \min.$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2$$

Сформулируем задачу математического программирования (1.7)

$$\psi_1 u_1 + \psi_2 u_2 \rightarrow \min, \quad u_1^2 + u_2^2 \leq 1$$

Функция (1.8) здесь имеет вид

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

$$\hat{U}(t, \psi) = \begin{pmatrix} \frac{\psi_1}{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}} \\ \frac{\psi_2}{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}} \end{pmatrix}, \psi \neq 0, \quad (2)$$

система дифференциальных уравнений (1.10) и граничные условия (1.11) записываются так:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \frac{\psi_1}{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}}, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \frac{\psi_2}{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}}, \\ \dot{\psi}_1 &= -\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 &= \psi_1, \end{aligned} \quad (3)$$

$$x_1(0) = -3, x_2(0) = 2, \psi_1(\pi) = -6x_1(\pi), \psi_2(\pi) = -4x_2(\pi). \quad (4)$$

Общее решение сопряженной системы находится независимо от остальных уравнений системы

$$\psi_1(t, c_1, c_2) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad \psi_2(t, c_1, c_2) = c_2 \cos t - c_1 \sin t. \quad (5)$$

Преобразуем первые два уравнения в (3) с учетом (5)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \frac{(c_1 \cos t + c_2 \sin t)}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \frac{(c_2 \cos t - c_1 \sin t)}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \end{aligned}$$

и проинтегрируем полученную систему

$$\begin{aligned} x_1(t, c_1, c_2, c_3, c_4) &= \frac{tc_1 \cos t}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} + c_3 \cos t + \frac{tc_2 \sin t}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} + c_4 \sin t, \\ x_2(t, c_1, c_2, c_3, c_4) &= \frac{tc_2 \cos t}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} + c_4 \cos t - \frac{tc_1 \sin t}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} - c_3 \sin t. \end{aligned} \quad (6)$$

Граничные условия (4) принимают вид

$$c_3 = -3, \quad c_4 = 2, \quad -c_1 = 6 \left(\frac{\pi c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} + c_3 \right), \quad -c_2 = 4 \left(\frac{\pi c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} + c_4 \right). \quad (7)$$

Решением нелинейной системы уравнений (7) будут числа

$$c_1^* = 2.0562, \quad c_2^* = -1.2967, \quad c_3^* = -3, \quad c_4^* = 2.. \quad (8)$$

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

Подставляя найденные константы в (5) определяем вектр-функцию $\psi^0(\cdot)$, а из

(2) - оптимальное программное управление

$$u^0(t) = \hat{U}(t, \psi^0(t)) = \begin{pmatrix} \frac{\psi_1^0(t)}{\sqrt{\psi_1^{02}(t) + \psi_2^{02}(t)}} \\ \frac{\psi_2^0(t)}{\sqrt{\psi_1^{02}(t) + \psi_2^{02}(t)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c_1^* \cos t + c_2^* \sin t}{\sqrt{c_1^{*2} + c_2^{*2}}} \\ \frac{c_2^* \cos t - c_1^* \sin t}{\sqrt{c_1^{*2} + c_2^{*2}}} \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi]. \quad (9)$$

Аналогично из (8) находим оптимальную траекторию

$$x^0(t) = \begin{pmatrix} x_1^0(t) \\ x_2^0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{tc_1^* \cos t}{\sqrt{c_1^{*2} + c_2^{*2}}} + c_3^* \cos t + \frac{tc_2^* \sin t}{\sqrt{c_1^{*2} + c_2^{*2}}} + c_4^* \sin t \\ \frac{tc_2^* \cos t}{\sqrt{c_1^{*2} + c_2^{*2}}} + c_4^* \cos t - \frac{tc_1^* \sin t}{\sqrt{c_1^{*2} + c_2^{*2}}} - c_3^* \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [t_0, T]. \quad (10)$$

Ниже на **рис. 2** приводятся графики изменения каждой из компонент вектора $\psi^0(t)$ от времени

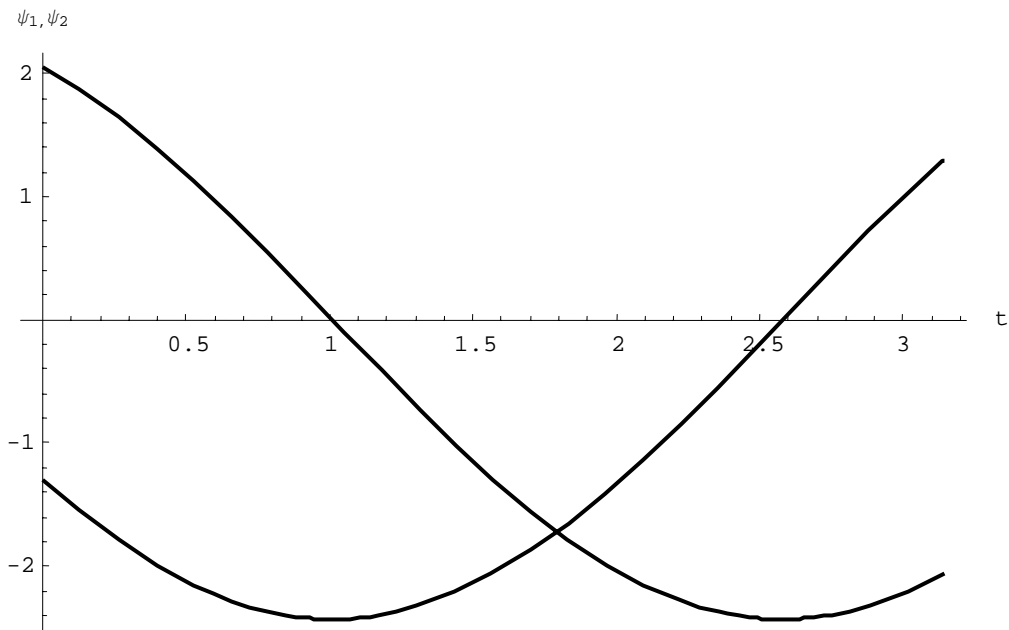


Рис. 2

Из графиков видно, что вектор $\psi^0(t)$ не является нулевым вектором на всем промежутке времени $[t_0, T]$, и программное управление, удовлетворяющее условиям принципа максимума, единственное. В силу выпуклости функции Φ

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА
 программное управление $u^0(\cdot)$ и движение объекта $x^0(\cdot)$, определенные равенствами (9) и (10) соответственно, являются оптимальными. Вычислим значение функционала на оптимальном управлении

$$I[u^0(\cdot)] = 3(x_1^0(\pi))^2 + 2(x_2^0(\pi))^2 = 0.56252.$$

Для сравнения вычислим значение функционала на допустимом программном управлении

$$\tilde{u}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\psi_1^0(t) + 0.1}{\sqrt{[\psi_1^0(t) + 0.1]^2 + [\psi_2^0(t) - 0.1]^2}} \\ \frac{\psi_2^0(t) - 0.1}{\sqrt{[\psi_1^0(t) + 0.1]^2 + [\psi_2^0(t) - 0.1]^2}} \end{pmatrix}, t \in [0, \pi].$$

Имеем

$$I[\tilde{u}(\cdot)] = 0.598124.$$

Итак,

$$I[\tilde{u}(\cdot)] = 0.598124 > 0.56252 = I[u^0(\cdot)].$$

Оптимальная траектория объекта показана на **рис. 3**

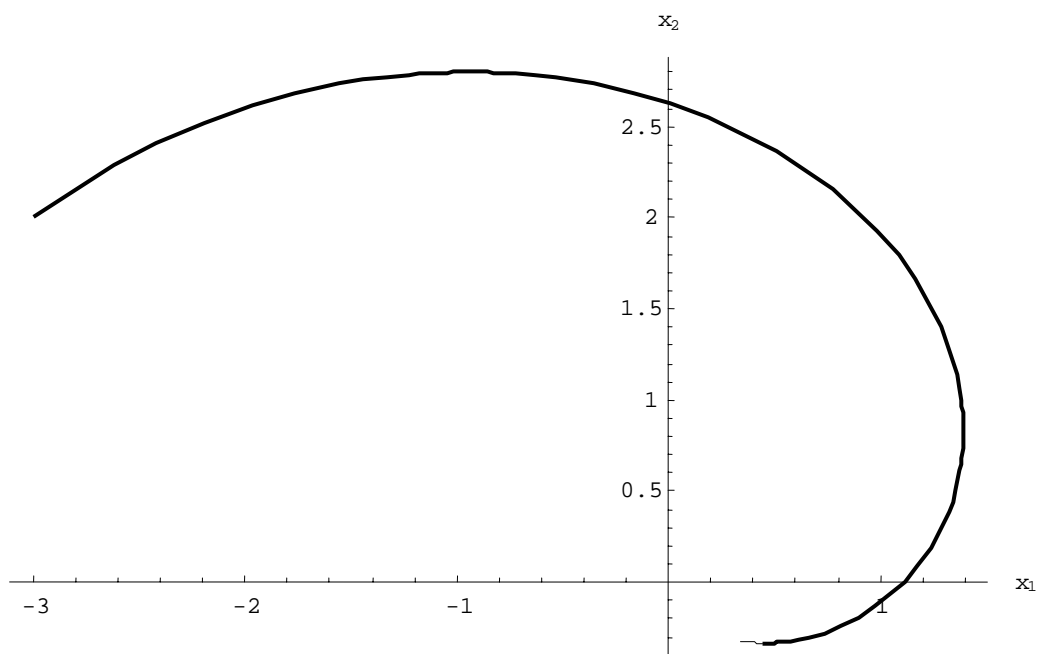


Рис. 3

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

Заметим, что в соответствии с теоремой 3 функция Понтрягина

$$H(t, x^0(t), u^0(t), \psi^0(t)) = \psi_1^0(t)(x_2^0(t) + u_1^0(t)) + \psi_2^0(t)(-x_1^0(t) + u_2^0(t)),$$

должна оставаться постоянной на всем промежутке времени $[0, \pi]$. Действительно, ниже на рис. 4 приводится график функции

$$H(t, x^0(t), u^0(t), \psi^0(t)) = \psi_1^0(t) \left[x_2^0(t) + \frac{\psi_1^0(t)}{\sqrt{(\psi_1^0(t))^2 + (\psi_2^0(t))^2}} \right] + \psi_2^0(t) \left[-x_1^0(t) + \frac{\psi_2^0(t)}{\sqrt{(\psi_1^0(t))^2 + (\psi_2^0(t))^2}} \right]$$

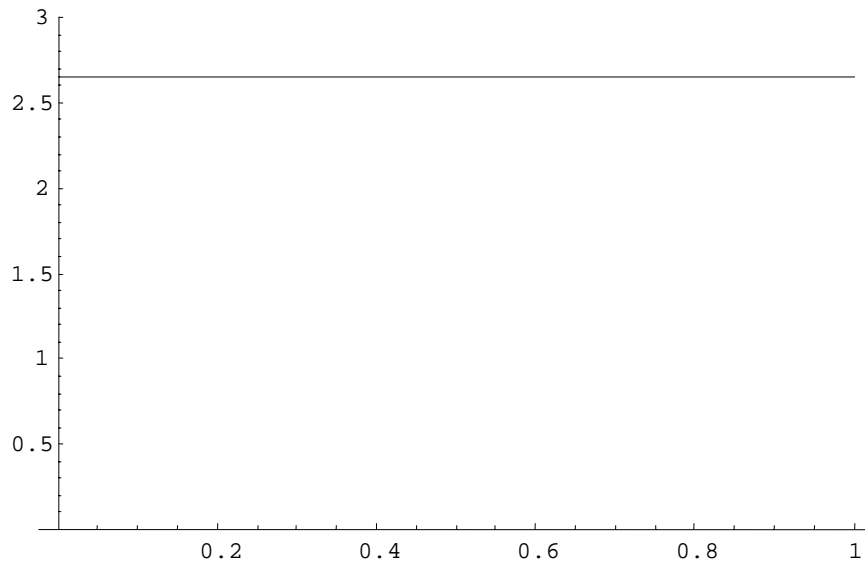


Рис. 4

который подтверждает факт постоянства функции Л.С. Понтрягина.

Случай 2. Геометрические ограничения на вектор управляющих параметров имеют вид

$$P = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_r \end{pmatrix} \in R^r \mid \alpha_i \leq u_i \leq \beta_i, i = 1, \dots, r \right\}.$$

Решением задачи (1.7) будет служить вектор $\hat{U}(t, \psi) = \begin{pmatrix} \hat{U}^1(t, \psi) \\ \dots \\ \hat{U}^r(t, \psi) \end{pmatrix} \in P$, для которого

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

$$\hat{U}^i(t, \psi) = \begin{cases} \beta_i, & \sum_{k=1}^n b_{ki}(t) \psi_k > 0, \\ \forall u_i \in [\alpha_i, \beta_i], & \sum_{k=1}^n b_{ki}(t) \psi_k = 0, \quad i = 1, \dots, r, \\ \alpha_i, & \sum_{k=1}^n b_{ki}(t) \psi_k < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что оптимальное управление $u^0(t) = \hat{U}(t, \psi^0(t))$, $t \in [t_0, T]$ имеет кусочно-постоянные компоненты. При дополнительных предположениях относительно матриц A и B можно дать оценку сверху для числа переключений каждой из компонент оптимального управления.

Теорема 4 (А. А. Фельдбаума). Пусть в задаче линейного быстрогодействия $A = \text{const}$, $B = \text{const}$, множество P имеет вид (1), все собственные значения матрицы A - действительные числа и вектор-функция $\psi^0(\cdot)$ не является тривиальным решением сопряженной системы дифференциальных уравнений (1.3.7). Тогда каждая компонента оптимального управления $u^0(t) = \hat{U}(t, \psi^0(t))$, $t \in [t_0, T]$ имеет не более $n - 1$ переключений, где n - размерность фазового вектора.

Доказательству теоремы предположим лемму.

Лемма 3. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ - действительные попарно различные числа, а f_1, \dots, f_m - многочлены с действительными коэффициентами, имеющие степень k_1, \dots, k_m , соответственно. Тогда функция $F: R^1 \rightarrow R^1$, определенная формулой

$$F(t) = f_1(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + f_m(t)e^{\lambda_m t}, \quad t \in R^1, \quad (11)$$

имеет не более чем $k_1 + \dots + k_m + m - 1$ корней.

Доказательство. Проведем индукцию по числу m . При $m = 1$ лемма очевидно справедлива, ибо функция F тогда имеет вид $F(t) = f_1(t)e^{\lambda_1 t}$, $t \in R^1$, ее действительные корни совпадают с действительными корнями полинома f_1 и их число не более чем k_1 . Предположим, что лемма уже доказана для случая, когда в формуле (11) содержится меньше чем m слагаемых.

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

От противного будем считать, что функция F имеет, по крайней мере, $k_1 + \dots + k_m + m$ действительных корней. Построим функцию $F_1 : R^1 \rightarrow R^1$ по формуле

$$F_1(t) = F(t)e^{-\lambda_m t} = f_1(t)e^{(\lambda_1 - \lambda_m)t} + \dots + f_{m-1}(t)e^{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)t} + f_m(t), \quad t \in R^1.$$

Функции F и F_1 имеют одни и те же действительные корни. Так как между каждыми двумя действительными корнями функции лежит, по крайней мере, один корень ее производной, то производная $(k_m + 1)$ -го порядка функции F_1 имеет по крайней мере

$$(k_1 + \dots + k_m + m) - (k_m + 1) = k_1 + \dots + k_{m-1} + m - 1$$

действительных корней. С другой стороны, эта производная имеет вид

$$F_1^{(k_m+1)}(t) = g_1(t)e^{(\lambda_1 - \lambda_m)t} + \dots + g_{m-1}(t)e^{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)t}, \quad t \in R^1,$$

где числа $\lambda_1 - \lambda_m, \dots, \lambda_{m-1} - \lambda_m$ попарно различны, а степень многочлена g_i равна $k_i, i = 1, \dots, m - 1$. Согласно предположению индукции функция $F_1^{(k_m+1)}$ имеет не более

$$k_1 + \dots + k_m + (m - 1) - 1 = k_1 + \dots + k_m + m - 2$$

действительных корней, вопреки тому, что было установлено выше. Полученное противоречие завершает индукцию. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. Достаточно установить, что для всех $i = 1, \dots, r$ функция $V_i(\cdot) = \sum_{k=1}^n b_{ki} \psi_k^0(\cdot)$ имеет не более чем $n - 1$ действительных корней. Напомним, что вектор-функция $\psi^0(\cdot)$ является решением линейного дифференциального уравнения

$$\dot{\psi} = -A^T \psi.$$

Каждое собственное число матрицы $-A^T$ представляет собой собственное число матрицы A , взятое с противоположным знаком, и поэтому является действительным числом. Тогда

$$\psi_k^0(t) = g_{1k}(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + g_{mk}(t)e^{\lambda_k t}, \quad t \in R^1, \quad k = 1, \dots, n,$$

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ – все попарно различные собственные значения матрицы $-A^T$, а $g_{jk}(\cdot)$ – многочлен степени $r_j - 1$, где r_j – кратность корня λ_j , $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$. Таким образом,

$$V_i(t) = f_{1i}(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + f_{mi}(t)e^{\lambda_m t}, \quad t \in R^1, \quad i = 1, \dots, r.$$

Здесь f_{ji} – многочлен степени $r_j - 1$, $j = 1, \dots, m$. По лемме 3 функция $V_s(\cdot)$ имеет не более чем

$$(r_1 - 1) + \dots + (r_m - 1) + m - 1 = r_1 + \dots + r_m - 1 = n - 1$$

действительных корней. Теорема доказана.

Пример 3*. Рассмотрим линейный управляемый динамический объект

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + 2x_2 - 30x_3 + u_1,$$

$$\dot{x}_2 = 10x_1 - x_2 - 35x_3 + u_2,$$

$$\dot{x}_3 = 2x_1 - x_2 + x_3 + u_3,$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad u \in P = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in R^3 \mid |u_i| \leq 1, i = 1, 2, 3 \right\}, \quad x_1(0) = -3, x_2(0) = 2, x_3(0) = 1;$$

$$I[U(\cdot)] = x_1(1) + 2x_2(1) - x_3(1) \rightarrow \min.$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -30 \\ 10 & -1 & -35 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi(x) = x_1(1) + 2x_2(1) - x_3(1).$$

Сформулируем задачу математического программирования (1.7)

$$\psi_1 u_1 + \psi_2 u_2 + \psi_3 u_3 \rightarrow \min, \quad |u_i| \leq 1, \quad i = 1, 2, 3$$

и решим ее. Функция (1.8) здесь имеет вид

$$\hat{U}(t, \psi) = \begin{pmatrix} \hat{U}_1(t, \psi) \\ \hat{U}_2(t, \psi) \\ \hat{U}_3(t, \psi) \end{pmatrix}, \quad \hat{U}_i(t, \psi) = \begin{cases} \text{sign}[\psi_i], & \psi_i < 0 \\ \text{любое число} & \psi_i = 0, \\ \text{из } [0, 1], & \\ -\text{sign}[\psi_i], & \psi_i > 0. \end{cases}$$

Система дифференциальных уравнений (1.10) и граничные условия (1.11) записываются так:

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + 2x_2 - 30x_3 + \hat{U}_1(t, \psi),$$

$$\dot{x}_2 = 10x_1 - x_2 - 35x_3 + \hat{U}_2(t, \psi),$$

$$\dot{x}_3 = 2x_1 - x_2 + x_3 + \hat{U}_3(t, \psi),$$

$$\dot{\psi}_1 = -2\psi_1 - 10\psi_2 - 2\psi_3,$$

$$\dot{\psi}_2 = -2\psi_1 + \psi_2 + \psi_3,$$

$$\dot{\psi}_3 = 30\psi_1 + 35\psi_2 - \psi_3,$$

$$x_1(0) = -3, x_2(0) = 2, x_3(0) = 1, \quad \psi_1(1) = -1, \psi_2(1) = -2, \psi_3(1) = 1.$$

В данном примере сопряженная система дифференциальных уравнений интегрируется независимо от основной системы. В результате с учетом граничных условий получим вектор-функцию $\psi^0(t), t \in [0, 1]$

Ниже на **рис. 5** приводятся графики зависимости компонент этой вектор-функции от времени

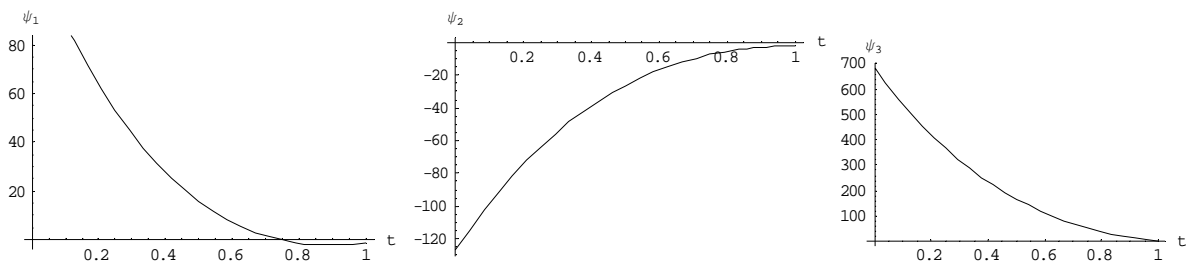


Рис. 5

Из приведенных графиков видно, что вектор $\psi^0(t), t \in [0, 1]$ не является тождественным нулем. Тогда функция (8) определяется однозначно и представляет собой оптимальное программное управление. Компоненты $\psi_2^0(t), \psi_3^0(t), t \in [0, 1]$ вектора $\psi^0(t)$ знакопостоянны, поэтому для построения оптимальной программной стратегии достаточно определить момент времени $\hat{t} \in [0, 1]$, в который происходит переключение первой компоненты вектора $\psi^0(t)$. В результате решения уравнения $\psi_1^0(t) = 0$ приходим к равенству $\hat{t} = 0.741061$.

Таким образом, оптимальное программное управление имеет вид

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

$$u_1^0(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \hat{t}), \\ \text{произвольное число} \\ \text{из } [-1, 1], & t = \hat{t}, \\ -1, & t \in (\hat{t}, 1]. \end{cases}, \quad u_2^0(t) = -1, u_3^0(t) = 1, \quad t \in [0, 1]$$

Подставим оптимальное управление в основную систему дифференциальных уравнений и проинтегрируем ее с соответствующими начальными условиями. В результате получим оптимальное движение $x^0(t), t \in [0, 1]$.

Вычислим значение функционала на оптимальном программном управлении

$$I[u^0(\cdot)] = x_1^0(1) + 2x_2^0(1) - x_3^0(1) = -366.188$$

Для сравнения вычислим значение функционала на допустимом программном управлении $\tilde{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in [0, 1]$. Пусть $\tilde{x}(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0, \tilde{u}(\cdot))$. Тогда

$$I[\tilde{u}(\cdot)] = \tilde{x}_1(1) + 2\tilde{x}_2(1) - \tilde{x}_3(1) = -365.348.$$

Таким образом,

$$I[\tilde{u}(\cdot)] = -365.348 > -366.188 = I[u^0(\cdot)].$$

Наконец, в соответствии с теоремой 3 проверим постоянство функции Понтрягина, вычисленной вдоль оптимальной пары $(x^0(t), \psi^0(t))$ на промежутке времени $[0, 1]$. Действительно, ниже на рис. 6 приводится график функции

$$H(t, x^0(t), u^0(t), \psi^0(t)) = \psi_1^0(t)(2x_1^0(t) + 2x_2^0(t) - 30x_3^0(t) + u_1^0(t)) + \psi_2^0(t)(10x_1^0(t) - x_2^0(t) - 35x_3^0(t) + u_2^0(t)) + \psi_3^0(t)(2x_1^0(t) - x_2^0(t) + x_3^0(t) + u_3^0(t)),$$

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

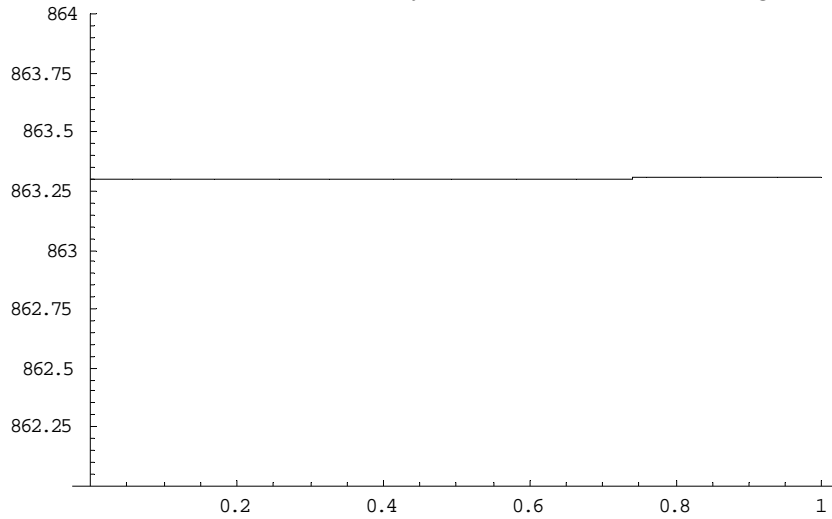


Рис. 6

который подтверждает факт постоянства функции Л.С. Понтрягина.

2.4. Минимизация расстояния до целевого множества. Рассмотрим частный случай задачи 1, исследованной в предыдущем пункте. Именно, будем предполагать, что функция Φ , определяющая критерий качества, имеет смысл евклидоваго расстояния от проекции фазового вектора на часть своих (k первых, $k \leq n$) координат до некоторого выпуклого компактного множества $M \subset R^k$. Таким образом,

$$\Phi(x) = \rho(\{x\}_k, M) = \min_{m \in M} \rho(\{x\}_k, m) = \min_{m \in M} \sqrt{\langle m - \{x\}_k, m - \{x\}_k \rangle}, \quad k \leq n, M \subset R^k.$$

Здесь символ $\{ \cdot \}_k$ означает проекцию вектора из пространства R^n на свои первые $k \leq n$ координат.

В дальнейшем множество $M \subset R^k$ будем называть целевым.

Проекцию области достижимости $G(t_0, x_0, T) \subset R^n$ на подпространство R^k обозначим символом $\{G(t_0, x_0, T)\}_k$. Предположим, что выполняется условие $\{G(t_0, x_0, T)\}_k \cap M = \emptyset$. Полагаем

$$\varepsilon^0 = \min \{ \varepsilon > 0 \mid \{G(t_0, x_0)\}_k \cap M^\varepsilon \neq \emptyset \},$$

где символом M^ε обозначена замкнутая ε -окрестность целевого множества. Из компактности множества $\{G(t_0, x_0, T)\}_k$ следует существование минимума в правой части последнего равенства и справедливость соотношения

$$\varepsilon^0 = I[U^0(\cdot)] > 0.$$

Вычислим величину ε^0 . По **теореме 1.30** [22] условие $\{G(t_0, x_0, T)\}_k \cap M^\varepsilon \neq \emptyset$ будет иметь место тогда и только тогда, когда

$$\min_{q \in \{G(t_0, x_0, T)\}_k} \langle l, q \rangle \leq \chi(M^\varepsilon, l), \quad \forall l \in S(0, 1) = \{s \in R^k \mid \|s\| = 1\}.$$

Здесь $\chi(M^\varepsilon, \cdot)$ - опорная функция множества M^ε . Тогда

$$\varepsilon^0 = \min \left\{ \varepsilon > 0 \mid \min_{q \in \{G(t_0, x_0, T)\}_k} \langle l, q \rangle \leq \chi(M^\varepsilon, l) \quad \forall l \in S(0, 1) \right\}. \quad (1)$$

В силу равенства

$$\chi(M^\varepsilon, l) = \max_{m \in M^\alpha} \langle m, l \rangle = \varepsilon + \max_{m \in M} \langle m, l \rangle$$

из (1) выводим, что

$$\varepsilon^0 = \max_{l \in S(0,1)} \left[-\max_{m \in M} \langle m, l \rangle + \min_{q \in \{G(t_0, x_0, T)\}_k} \langle q, l \rangle \right]. \quad (2)$$

Пусть максимум в (2) достигается на векторе $l^0 \in S(0,1)$. Покажем, что вектор $l^0 \in S(0,1)$ определяется однозначно. Действительно, от противного приходим к существованию векторов $l^{(1)}, l^{(2)} \in S(0,1)$, $l^{(1)} \neq l^{(2)}$, для которых

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 &= -\max_{m \in M} \langle m, l^{(1)} \rangle + \min_{q \in \{G(t_0, x_0, T)\}_k} \langle q, l^{(1)} \rangle, \\ \varepsilon^0 &= -\max_{m \in M} \langle m, l^{(2)} \rangle + \min_{q \in \{G(t_0, x_0, T)\}_k} \langle q, l^{(2)} \rangle. \end{aligned}$$

Сложим эти равенства почленно

$$\begin{aligned} 2\varepsilon^0 &= -\max_{m \in M} \langle m, l^{(1)} \rangle + \min_{q \in \{G(t_0, x_0, T)\}_k} \langle q, l^{(1)} \rangle - \max_{m \in M} \langle m, l^{(2)} \rangle + \min_{q \in \{G(t_0, x_0, T)\}_k} \langle q, l^{(2)} \rangle \leq \\ &\leq -\max_{m \in M} \langle m, l^{(1)} + l^{(2)} \rangle + \min_{q \in \{G(t_0, x_0, T)\}_k} \langle q, l^{(1)} + l^{(2)} \rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

Из неравенства (3) следует, что $l^{(1)} \neq -l^{(2)}$, а из условия $l^{(1)} \neq l^{(2)}$ следует, что $\|l^{(1)} + l^{(2)}\| < 2$. Полагаем

$$l^* = \frac{l^{(1)} + l^{(2)}}{\|l^{(1)} + l^{(2)}\|} \in S(0,1).$$

Тогда из (3) выводим

$$\varepsilon^0 < \frac{2\varepsilon^0}{\|l^{(1)} + l^{(2)}\|} \leq -\max_{m \in M} \left\langle m, \frac{l^{(1)} + l^{(2)}}{\|l^{(1)} + l^{(2)}\|} \right\rangle + \min_{q \in \{G(t_0, x_0, T)\}_k} \left\langle q, \frac{l^{(1)} + l^{(2)}}{\|l^{(1)} + l^{(2)}\|} \right\rangle =$$

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

$$-\max_{m \in M} \langle m, l^* \rangle + \min_{q \in \{G(t_0, x_0, T)\}_k} \langle q, l^* \rangle \leq \max_{l \in S(0,1)} \left[-\max_{m \in M} \langle m, l \rangle + \min_{q \in \{G(t_0, x_0, T)\}_k} \langle q, l \rangle \right] = \varepsilon^0.$$

Получили противоречие, которое и доказывает единственность максимизирующего вектора $l^0 \in S(0,1)$.

Геометрическая интерпретация полученного результата (см. **рис. 7**) состоит в том, что вектор l^0 является опорным к множеству M , а вектор $-l^0$ - опорным к множеству $\{G(t_0, x_0)\}_k$.

Используя формулу Коши, придадим равенству (2) другую форму

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 &= \\ &= \max_{\|l\|=1} \left[-\max_{m \in M} \langle m, l \rangle + \min_{u(\cdot) \in \Pi[t_0, T]} \left\langle \left\{ X[T, t_0]x_0 + \int_{t_0}^T X[T, \tau]B(\tau)u(\tau) d\tau + \int_{t_0}^T X[t, \tau]C(\tau) d\tau \right\}_k, l \right\rangle \right] = \\ &= \max_{\|l\|=1} \left[-\max_{m \in M} \langle m, l \rangle + \min_{u(\cdot) \in \Pi[t_0, T]} \left\langle X[T, t_0]x_0 + \int_{t_0}^T X[T, \tau]B(\tau)u(\tau) d\tau + \int_{t_0}^T X[t, \tau]C(\tau) d\tau, l^* \right\rangle \right] = \\ &= \max_{\|l\|=1} \left[-\max_{m \in M} \langle m, l \rangle + \langle X[T, t_0]x_0, l^* \rangle + \min_{u(\cdot) \in \Pi[t_0, T]} \left\langle \int_{t_0}^T X[T, \tau]B(\tau)u(\tau), l^* \right\rangle d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \left\langle \int_{t_0}^T X[t, \tau]C(\tau), l^* \right\rangle d\tau = \right. \\ &= \max_{\|l\|=1} \left[-\max_{m \in M} \langle m, l \rangle + \langle x_0, X[T, t_0]^{Tp} l^* \rangle + \left\langle \int_{t_0}^T \min_{u \in P} B(\tau)u, X^{Tp}[T, \tau]l^* \right\rangle d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \left\langle \int_{t_0}^T C(\tau), X^{Tp}[T, \tau]l^* \right\rangle d\tau. \right. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь обозначено $l^* = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \in R^n$.

Теорема 5. Пусть $\varepsilon^0 > 0$ и $U^0(\cdot) \in \Pi[t_0, T]$ - оптимальная программная стратегия. Тогда

$$\langle B(t)U^0(t), X^{Tp}[T, t]l^{0*} \rangle = \min_{u \in P} \langle B(t)u, X^{Tp}[T, t]l^{0*} \rangle \quad (5)$$

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

при почти всех $t \in [t_0, T]$, где $l^{0*} = \begin{pmatrix} l^0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \in R^n$.

Доказательство. Допустим, что условие (5) нарушается. Тогда существует множество $\tilde{T} \in [t_0, T]$ ненулевой меры, на котором выполняется неравенство

$$\langle B(t)U^0(t), X^{Tp}[T, t]l^{0*} \rangle > \min_{u \in P} \langle B(t)u, X^{Tp}[T, t]l^{0*} \rangle, t \in \tilde{T}.$$

Из последнего соотношения вытекает, что

$$\int_{t_0}^T \langle B(\tau)U^0(\tau), X^{Tp}[T, \tau]l^{0*} \rangle d\tau > \int_{t_0}^T \min_{u \in P} \langle B(\tau)u(\tau), X^{Tp}[T, \tau]l^{0*} \rangle d\tau. \quad (6)$$

Подставим вектор $l^0 \in S(0,1)$ в правую часть равенства (4). Имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 = & -\max_{m \in M} \langle m, l^0 \rangle + \langle x_0, X^{Tp}[T, t_0]l^{0*} \rangle + \int_{t_0}^T \min_{u \in P} \langle B(\tau)u(\tau), X^{Tp}[T, \tau]l^{0*} \rangle d\tau + \\ & + \int_{t_0}^T \langle C(\tau), X^{Tp}[t, \tau]l^{0*} \rangle d\tau. \end{aligned}$$

С учетом неравенства (6) выводим

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 = I[U^0(\cdot)] &= \rho(\{x^0(T)\}_k, M) = \max_{\|l\|=1} \left[-\max_{m \in M} \langle m, l \rangle + \langle \{x^0(T)\}_k, l \rangle \right] = \\ &= \max_{\|l\|=1} \left[-\max_{m \in M} \langle m, l \rangle + \left\langle \left\{ X[T, t_0]x_0 + \int_{t_0}^T X[T, \tau]B(\tau)U^0(\tau) d\tau + \int_{t_0}^T X[t, \tau]C(\tau) d\tau \right\}_k, l \right\rangle \right] \geq \\ &\geq -\max_{m \in M} \langle m, l^0 \rangle + \left\langle \left\{ X[T, t_0]x_0 + \int_{t_0}^T X[T, \tau]B(\tau)U^0(\tau) d\tau + \int_{t_0}^T X[t, \tau]C(\tau) d\tau \right\}_k, l^0 \right\rangle = \\ &= -\max_{m \in M} \langle m, l^0 \rangle + \left\langle X[T, t_0]x_0 + \int_{t_0}^T X[T, \tau]B(\tau)U^0(\tau) d\tau + \int_{t_0}^T X[t, \tau]C(\tau) d\tau, l^{0*} \right\rangle = \\ &= -\max_{m \in M} \langle m, l^0 \rangle + \langle x_0, X^{Tp}[T, t_0]l^{0*} \rangle + \int_{t_0}^T \langle B(\tau)U^0(\tau), X^{Tp}[T, \tau]l^{0*} \rangle d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^T \langle C(\tau), X^{Tp}[t, \tau]l^{0*} \rangle d\tau > -\max_{m \in M} \langle m, l^0 \rangle + \langle x_0, X^{Tp}[T, t_0]l^{0*} \rangle + \end{aligned}$$

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

$$+ \int_{t_0}^T \min_{u \in P} \langle B(\tau)u, X^{Tp} [T, \tau] l^{0*} \rangle d\tau + \int_{t_0}^T \langle C(\tau), X^{Tp} [t, \tau] l^{0*} \rangle d\tau = \varepsilon^0.$$

Получили противоречие. Теорема доказана.

Очевидно (см. рис. 7), что

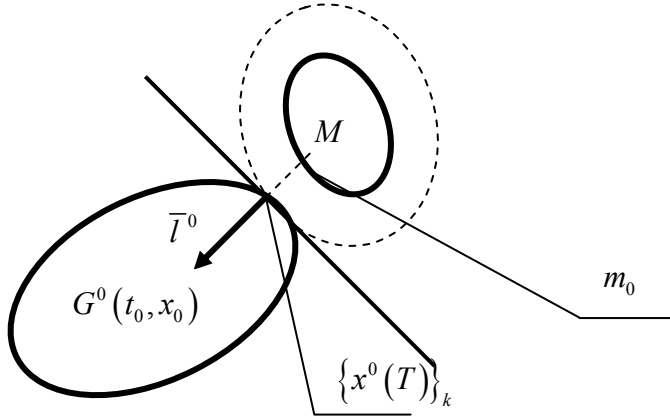


Рис. 7

$$l^0 = \frac{\{x^0(T)\}_k - m_0}{\|\{x^0(T)\}_k - m_0\|}.$$

Представим функцию Φ в

виде

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \min_{m \in M} \sqrt{\langle \{x\}_k - m, \{x\}_k - m \rangle} = \\ &= \sqrt{\langle \{x\}_k - m^0(x), \{x\}_k - m^0(x) \rangle}, \end{aligned}$$

$$x \in R^n.$$

Из теоремы 3 следует, что

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \right\}_k &= \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\langle \{x\}_k - m, \{x\}_k - m \rangle} \Big|_{m=m^0(x)} \right\}_k = \frac{\{x\}_k - m^0(x)}{\sqrt{\langle \{x\}_k - m^0(x), \{x\}_k - m^0(x) \rangle}} = \frac{\{x\}_k - m^0(x)}{\|\{x\}_k - m^0(x)\|} = l^0. \end{aligned}$$

При $x = x^0(T)$ отсюда выводим

$$\left\{ \frac{\partial \Phi(x^0(T))}{\partial x} \right\}_k = \frac{\{x^0(T)\}_k - m^0(x^0(T))}{\|\{x^0(T)\}_k - m^0(x^0(T))\|} = l^0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi(x^0(T))}{\partial x} = l^{0*}.$$

Тогда условие (5) эквивалентно следующему:

$$\left\langle B(t)U^0(t), -X^{Tp} [T, t] \frac{\partial \Phi(x^0(T))}{\partial x} \right\rangle = \max_{u \in P} \left\langle B(t)u, -X^{Tp} [T, t] \frac{\partial \Phi(x^0(T))}{\partial x} \right\rangle, t \in [t_0, T].$$

В силу равенства

$$\psi^0(t) = -X^{Tp} [T, t] \frac{\partial \Phi(x^0(T))}{\partial x}, t \in [t_0, T]$$

необходимые условия оптимальности программного управления, доказанные в теореме 6, совпадают с аналогичными условиями принципа максимума Л.С. Понтрягина (теорема 1). Из теоремы 5 также следует, что если величина

$\Phi(x^0(T))$, вычисленная в результате интегрирования исходной системы дифференциальных уравнений после подстановки в нее программного управления, определенного из условия (4), совпадает с величиной ε^0 , вычисленной по формуле (5), то это программное управление является оптимальным.

Пример 4. Рассмотрим линейный управляемый динамический объект из примера 1. Терминальный критерий качества $\Phi(x) = \sqrt{x_1^2 + (x_2 - 2)^2}$ можно трактовать как расстояние в конечный момент времени от фазового вектора до точки $m = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Для данного примера выполнены равенства

$$k = 2, \quad X[t, \tau] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad l^{0*} = l^0.$$

Последовательно вычисляем

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 &= -\max_{m \in M} \langle m, l^0 \rangle + \langle X[T, t_0]x_0, l^0 \rangle + \int_{t_0}^T \min_{u \in P} \langle X[T, \tau]B(\tau)u, l^0 \rangle d\tau = \\ &= \max_{\|l\|=1} \left[-\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \right\rangle + \int_0^1 \min_{u \in P} \left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \right\rangle d\tau \right] = \max_{\|l\|=1} \left[-2l_2 - \int_0^1 (|l_1| + |l_2|) d\tau \right] = \\ &= \max_{\|l\|=1} [-2l_2 - (|l_1| + |l_2|)] = 1, \quad \begin{pmatrix} l_1^0 \\ l_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Необходимые условия оптимальности программного управления здесь принимают вид

$$u_1^0(t) = -\text{sign}(l_1^0), \quad u_2^0(t) = -\text{sign}(l_2^0), \quad t \in [0, 1]. \quad (7)$$

В силу $l_1^0 = 0$ условия(7) определяют программную стратегию неоднозначно. В частности, им удовлетворяет стратегия

$$U^0(t) = \begin{pmatrix} u_1^0(t) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \int_0^1 u_1^0(\tau) d\tau = 0, \quad t \in [0, 1].$$

При этом

$$I[U^0(\cdot)] = 1 = \varepsilon^0.$$

Следовательно, стратегия $U^0(\cdot)$ является оптимальной.

Приведем последовательность действий по решению задачи управления динамической системой на основе **теоремы 5**.

В начале строится фундаментальная матрица Коши для однородной системы дифференциальных уравнений и вычисляется опорная функция $\chi(M, \cdot)$ целевого множества M по формуле

$$\chi(M, l) = \max_{m \in M} \langle m, l \rangle, l \in S(0, 1).$$

Далее для произвольного $l \in S(0, 1)$ решается задача математического программирования

$$\left\langle B^{Tp}(t) X^{Tp}[T, t] \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, u \right\rangle \rightarrow \min, \quad u \in P. \quad (8)$$

По теореме Вейерштрасса минимум в левой части равенства (8) существует для любой пары $(t, l) \in [t_0, T] \times S(0, 1)$. Таким образом, определена вектор-функция

$$\hat{U} : [t_0, T] \times S(0, 1) \rightarrow P, \quad (9)$$

которая каждой паре $(t, l) \in [t_0, T] \times S(0, 1)$ ставит в соответствие вектор $\hat{U}(t, l) \in P$, доставляющий минимум в условии (8). Явная запись этой функции возможна для частных случаев управляемой системы, рассмотренных в предыдущем пункте. Пусть функция \hat{U} уже построена. Тогда приходим к следующей задаче математического программирования:

$$\begin{aligned} \varepsilon(l) = -\chi(M, l) + \left\langle x_0, X^{Tp}[T, t_0] \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle + \int_{t_0}^T \left\langle \hat{U}(\tau, l), B^{Tp}(\tau) X^{Tp}[T, \tau] \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle d\tau + \\ + \int_{t_0}^T \left\langle C(\tau), X^{Tp}[T, \tau] \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle d\tau \rightarrow \max, \quad \|l\| = 1. \end{aligned} \quad (10)$$

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

Эта задача всегда имеет решение, а в случае когда $\varepsilon^0 = \varepsilon(l^0) > 0$, ее решение единственное. Заметим, что приведенная задача математического программирования осложнена наличием определенных интегралов в выражении для целевой функции. Эти интегралы обычно не берутся аналитически даже, если функция \hat{U} определена явно.

Пусть $\varepsilon^0 > 0$ и $l^0 \in S(0,1)$ - максимизирующий вектор. Тогда программное управление, удовлетворяющее необходимому условию оптимальности, определяется по формуле

$$U^0(\cdot) = \hat{U}(\cdot, l^0). \quad (11)$$

После подстановки этого управления в исходные дифференциальные уравнения движения объекта, последние могут быть проинтегрированы с заданными начальными условиями. Далее проверяется справедливость равенства

$$\varepsilon^0 = I[U^0(\cdot)].$$

В случае его выполнения программная стратегия, определенная равенством (11), является оптимальной.

Пример 5*. Рассматривается следующая управляемая динамическая система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 + 9x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2x_2 + u_2, \end{aligned} \quad u \in P = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in R^2 \mid u_1^2 + u_2^2 \leq 1 \right\}, t \in [0, 1],$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \mid \frac{(m_1 - 50)^2}{2^2} + \frac{(m_2 - 30)^2}{3^2} \leq 1 \right\}, k = n = 2, x_1(0) = x_2(0) = 0.$$

Фундаментальная матрица Коши для однородной системы дифференциальных уравнений здесь имеет вид

$$X[t, \tau] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-(t-\tau)} (1 + e^{6(t-\tau)}) & \frac{3}{2} e^{-(t-\tau)} (-1 + e^{6(t-\tau)}) \\ \frac{1}{6} e^{-(t-\tau)} (-1 + e^{6(t-\tau)}) & \frac{1}{2} e^{-(t-\tau)} (1 + e^{6(t-\tau)}) \end{pmatrix}.$$

Вычислим опорную функцию $\chi(M, \cdot)$ терминального множества M . Имеем

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

$$m_1 l_1 + m_2 l_2 \rightarrow \max, \quad \frac{(m_1 - 50)^2}{2^2} + \frac{(m_2 - 30)^2}{3^2} \leq 1.$$

Обозначим $n_1 = m_1 - 50$, $n_2 = m_2 - 12$. Тогда

$$(n_1 + 50)l_1 + (n_2 + 12)l_2 = n_1 l_1 + n_2 l_2 + 50l_1 + 30l_2 \rightarrow \max, \quad \frac{n_1^2}{2^2} + \frac{n_2^2}{3^2} \leq 1.$$

Отсюда выводим

$$\chi(M, l) = \sqrt{4l_1^2 + 9l_2^2} + 50l_1 + 30l_2, \quad l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \in R^2.$$

Выражение $\varepsilon(l)$ здесь принимает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon(l) &= -\max_{m \in M} \langle m, l^0 \rangle + \langle X[T, t_0] x_*, l^0 \rangle + \int_{t_0}^T \min_{u \in P} \langle X[T, \tau] B(\tau) u(\tau), l^0 \rangle = \\ &= -\left(\sqrt{4l_1^2 + 9l_2^2} + 50l_1 + 12l_2 \right) + \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-(1-\tau)} (1 + e^{6(1-\tau)}) & \frac{3}{2} e^{-(1-\tau)} (-1 + e^{6(1-\tau)}) \\ \frac{1}{6} e^{-(1-\tau)} (-1 + e^{6(1-\tau)}) & \frac{1}{2} e^{-(1-\tau)} (1 + e^{6(1-\tau)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \right\rangle + \\ &+ \int_0^1 \min_{u \in P} \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-(1-\tau)} (1 + e^{6(1-\tau)}) & \frac{3}{2} e^{-(1-\tau)} (-1 + e^{6(1-\tau)}) \\ \frac{1}{6} e^{-(1-\tau)} (-1 + e^{6(1-\tau)}) & \frac{1}{2} e^{-(1-\tau)} (1 + e^{6(1-\tau)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \right\rangle = -\left(\sqrt{4l_1^2 + 9l_2^2} + 50l_1 + 30l_2 \right) + \\ &+ \int_0^1 \min_{u \in P} \left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-(1-\tau)} (1 + e^{6(1-\tau)}) & \frac{1}{6} e^{-(1-\tau)} (-1 + e^{6(1-\tau)}) \\ \frac{3}{2} e^{-(1-\tau)} (-1 + e^{6(1-\tau)}) & \frac{1}{2} e^{-(1-\tau)} (1 + e^{6(1-\tau)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= -\left(\sqrt{4l_1^2 + 9l_2^2} + 50l_1 + 30l_2 \right) - \int_0^1 \left[\left[\frac{1}{2} e^{-(1-\tau)} (1 + e^{6(1-\tau)}) l_1 + \frac{1}{6} e^{-(1-\tau)} (-1 + e^{6(1-\tau)}) l_2 \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{3}{2} e^{-(1-\tau)} (-1 + e^{6(1-\tau)}) l_1 + \frac{1}{2} e^{-(1-\tau)} (1 + e^{6(1-\tau)}) l_2 \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\tau = \\ &= -\left(\sqrt{4l_1^2 + 9l_2^2} + 50l_1 + 30l_2 \right) - \int_0^1 E(\tau, l_1, l_2) d\tau, \end{aligned}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} E(\tau, l_1, l_2) &= \left[\left[\frac{1}{2} e^{-(1-\tau)} (1 + e^{6(1-\tau)}) l_1 + \frac{1}{6} e^{-(1-\tau)} (-1 + e^{6(1-\tau)}) l_2 \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{3}{2} e^{-(1-\tau)} (-1 + e^{6(1-\tau)}) l_1 + \frac{1}{2} e^{-(1-\tau)} (1 + e^{6(1-\tau)}) l_2 \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Функция \hat{U} , доставляющая минимум в выражении (8), определяется формулой

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

$$\hat{U}(t, l) = \begin{pmatrix} \frac{\frac{1}{2}e^{-(1-\tau)}(1+e^{6(1-\tau)})l_1 + \frac{1}{6}e^{-(1-\tau)}(-1+e^{6(1-\tau)})l_2}{E(\tau, l_1, l_2)} \\ \frac{\frac{3}{2}e^{-(1-\tau)}(-1+e^{6(1-\tau)})l_1 + \frac{1}{2}e^{-(1-\tau)}(1+e^{6(1-\tau)})l_2}{E(\tau, l_1, l_2)} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Задача математического программирования (10) формулируется следующим образом:

$$= -\left(\sqrt{4l_1^2 + 9l_2^2} + 50l_1 + 30l_2\right) - \int_0^1 E(\tau, l_1, l_2) d\tau \rightarrow \max, \quad l_1^2 + l_2^2 = 1.$$

Ее решение в силу равенства $l_2 = \pm\sqrt{1-l_1^2}$ сводится к проблеме максимизации функции одного переменного $l_1 \in [-1, 1]$. Максимум целевой функции и вектор, на котором этот максимум достигается, соответственно имеют вид

$$\varepsilon^0 = \varepsilon(l^0) = 11.874 > 0, \quad l^0 = \begin{pmatrix} l_1^0 \\ l_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.316 \\ -0.949 \end{pmatrix}.$$

Подставляя l^0 в (12,) находим управление

$$U^0(t) = \begin{pmatrix} \frac{\frac{1}{2}e^{-(1-\tau)}(1+e^{6(1-\tau)})l_1^0 + \frac{1}{6}e^{-(1-\tau)}(-1+e^{6(1-\tau)})l_2^0}{E(\tau, l_1^0, l_2^0)} \\ \frac{\frac{3}{2}e^{-(1-\tau)}(-1+e^{6(1-\tau)})l_1^0 + \frac{1}{2}e^{-(1-\tau)}(1+e^{6(1-\tau)})l_2^0}{E(\tau, l_1^0, l_2^0)} \end{pmatrix},$$

удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности.

Подставим это управление в исходное дифференциальное уравнение и проинтегрируем полученное уравнение с заданными начальными условиями.

Ниже на **рис. 8** приводятся графики изменения фазовых координат по времени для найденного закона движения объекта

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

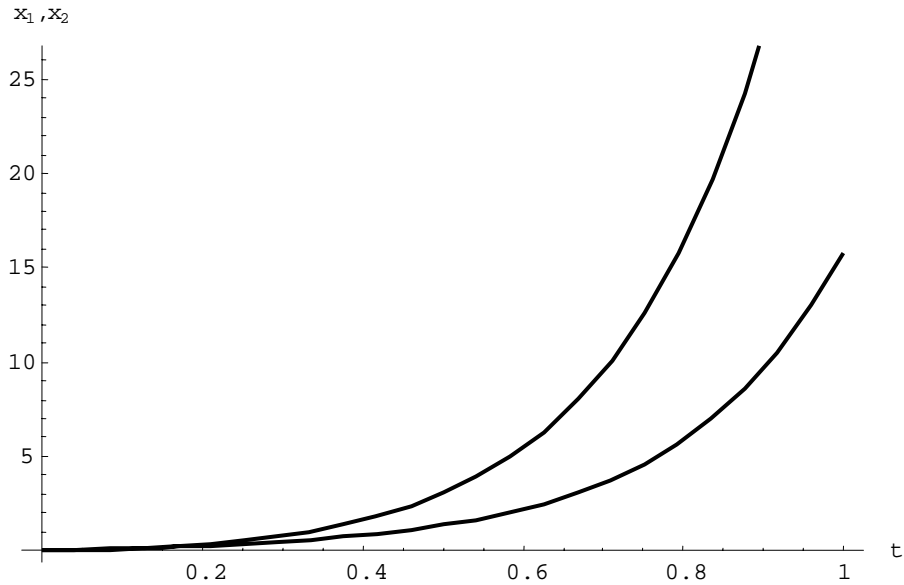


Рис. 8

Вычислим координаты фазового вектора в конечный момент времени и финальное расстояние от него до целевого множества

$$x^0(1) = \begin{pmatrix} x_1^0(1) \\ x_2^0(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45.817 \\ 15.805 \end{pmatrix}, \quad I[U^0(\cdot)] = \rho(x^0(1), M) = 11.874.$$

Непосредственно убеждаемся в справедливости равенства

$$\varepsilon^0 = \varepsilon(I^0) = I[U^0(\cdot)].$$

Таким образом, стратегия U^0 является оптимальной стратегией, а отвечающая ей траектория движения объекта – оптимальной траекторией.

Для сравнения вычислим финальное расстояние от фазового вектора до терминального множества в случае, когда в качестве допустимого программного управления взята вектор-функция

$$\tilde{y}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\frac{1}{2}e^{-(1-\tau)}(1+e^{6(1-\tau)})l_1^0 + \frac{1}{6}e^{-(1-\tau)}(-1+e^{6(1-\tau)})l_2^0 - 0.5}{E_1(\tau, l_1^0, l_2^0)} \\ \frac{\frac{3}{2}e^{-(1-\tau)}(-1+e^{6(1-\tau)})l_1^0 + \frac{1}{2}e^{-(1-\tau)}(1+e^{6(1-\tau)})l_2^0 + 0.5}{E_1(\tau, l_1^0, l_2^0)} \end{pmatrix},$$

где

$$E_1(\tau, l_1, l_2) = \left[\left[\frac{1}{2}e^{-(1-\tau)}(1+e^{6(1-\tau)})l_1 + \frac{1}{6}e^{-(1-\tau)}(-1+e^{6(1-\tau)})l_2 - 0.5 \right]^2 + \right.$$

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

$$+\left[\frac{3}{2}e^{-(1-\tau)}(-1+e^{6(1-\tau)})l_1+\frac{1}{2}e^{-(1-\tau)}(1+e^{6(1-\tau)})l_2+0.5\right]^2\Bigg]^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $\tilde{x}(\cdot) = \tilde{x}(\cdot, t_0, x_0, V(\cdot))$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1(1) \\ \tilde{x}_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45.878 \\ 15.733 \end{pmatrix}, \quad I[\tilde{u}(\cdot)] = 11.923.$$

Таким образом,

$$I[\tilde{u}(\cdot)] = 11.923 > 11.8735 = I[U^0(\cdot)].$$

Пример 6*. В условиях предыдущего примера принимается, что

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in R^2 \mid |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1 \right\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon(l) = & -\left(\sqrt{4l_1^2 + 9l_2^2} + 50l_1 + 30l_2\right) - \int_0^1 \left| \frac{1}{2}e^{-(1-\tau)}(1+e^{6(1-\tau)})l_1 + \frac{1}{6}e^{-(1-\tau)}(-1+e^{6(1-\tau)})l_2 \right| d\tau - \\ & - \int_0^1 \left| \frac{3}{2}e^{-(1-\tau)}(-1+e^{6(1-\tau)})l_1 + \frac{1}{2}e^{-(1-\tau)}(1+e^{6(1-\tau)})l_2 \right| d\tau. \end{aligned}$$

Функция \hat{U} , доставляющая минимум в выражении (8), определяется формулой

$$\hat{U}(t, l) = \begin{pmatrix} -\text{sign}\left[\frac{1}{2}e^{-(1-\tau)}(1+e^{6(1-\tau)})l_1 + \frac{1}{6}e^{-(1-\tau)}(-1+e^{6(1-\tau)})l_2\right] \\ -\text{sign}\left[\frac{3}{2}e^{-(1-\tau)}(-1+e^{6(1-\tau)})l_1 + \frac{1}{2}e^{-(1-\tau)}(1+e^{6(1-\tau)})l_2\right] \end{pmatrix}, \quad (13)$$

а задача математического программирования (10) формулируется следующим образом:

$$\varepsilon(l) \rightarrow \max, \quad l_1^2 + l_2^2 = 1.$$

Ниже приводится ее численное решение

$$l^0 = \begin{pmatrix} l_1^0 \\ l_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.304 \\ -0.953 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^0 = \varepsilon(l^0) = 9.036 > 0.$$

Подставляя l^0 в (13), находим программное управление

$$U^0(t) = \begin{pmatrix} -\text{sign}[z_1(t)] \\ -\text{sign}[z_2(t)] \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

$$z_1(t) = \frac{1}{2} e^{-(1-t)} \left(1 + e^{6(1-t)} \right) l_1^0 + \frac{1}{6} e^{-(1-t)} \left(-1 + e^{6(1-t)} \right) l_2^0,$$

$$z_2(t) = \frac{3}{2} e^{-(1-t)} \left(-1 + e^{6(1-t)} \right) l_1^0 + \frac{1}{2} e^{-(1-t)} \left(1 + e^{6(1-t)} \right) l_2^0, \quad t \in [0, 1].$$

Моменты переключений управления (14) определим из анализа графиков функций $z_1(t), z_2(t)$, $t \in [0, 1]$, представленных на **рис. 9**.

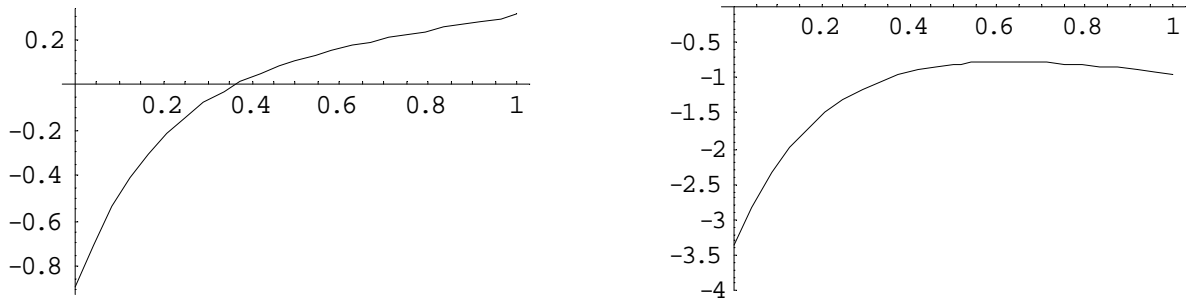


Рис. 9

Из условия $z_1(t) = 0$ находим момент времени $\tilde{t} \approx 0.36245$, в который происходит переключение первой компоненты вектора оптимального управления. Очевидно, что вторая компонента этого вектора все время остается постоянной.

Приведем (см. **рис. 10**) графики зависимостей компонент вектора управления (14) от времени

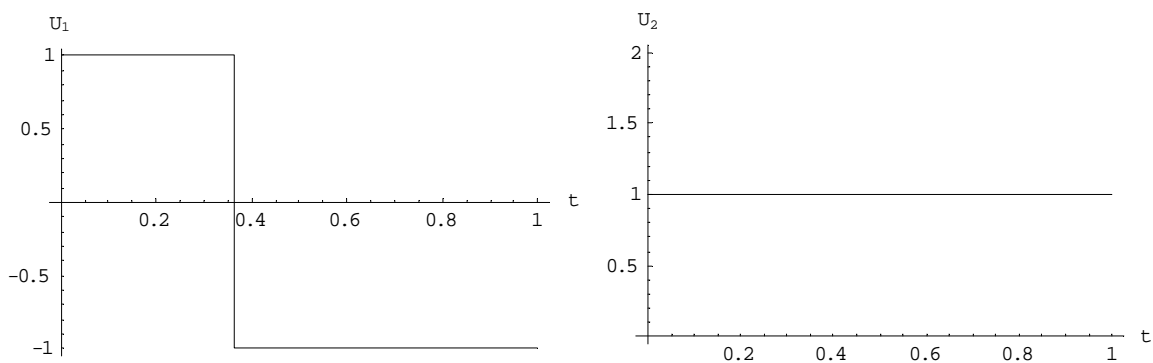


Рис. 10

Финальное расстояние от фазового вектора до терминального множества при управлении (12) равно $I[U^0] = \rho(x^0(1), M) = 9.036$. Соотношение

$$I[U^0] = \varepsilon^0 = \varepsilon(l^0)$$

здесь снова выполняется и, следовательно, управление (12) является оптимальным. Финальное расстояние до терминального множества оказалось меньше того, что было получено в **примере 5**. Этот результат ожидаемый, так как область изменения вектора управляющих параметров в рассматриваемом случае шире, чем в **примере 5**.

Для сравнения вычислим финальное расстояние от фазового вектора до терминального множества, когда в качестве допустимого программного управления взята вектор-функция

$$\tilde{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in [0, 1].$$

Пусть $\tilde{x}(\cdot) = \tilde{x}(\cdot, t_0, x_0, \tilde{u}(\cdot))$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1(1) \\ \tilde{x}_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58.334 \\ 19.866 \end{pmatrix}, \quad I[\tilde{u}(\cdot)] = 10.513.$$

Таким образом,

$$I[\tilde{u}(\cdot)] = 10.513 > 9.036 = I[U^0(\cdot)].$$

Рассмотрим управляемый объект, динамика которого описывается линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами.

Пример 7*.

$$\dot{x}_1 = x_3,$$

$$\dot{x}_2 = x_4,$$

$$\dot{x}_3 = (\cos t)x_3 + tx_4 + u_1,$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{t+1}x_3 + (\sin t)x_4 + u_2,$$

$$u \in P = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in R^2 \mid u_1^2 + u_2^2 \leq 1 \right\}, t \in [0, 1],$$

$$k = 2, M = \left\{ \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \in R^2 \mid (m_1 - 5)^2 + (m_2 - 4)^2 \leq 1 \right\},$$

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0.$$

Построим фундаментальную матрицу Коши для однородной системы дифференциальных уравнений и запишем выражение (4) для данного случая

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 &= \max_{l \in S(0,1)} \left[-\max_{m \in M} \langle m, l \rangle + \min_{q \in \{G(t_0, x_0, T)\}_2} \langle q, l \rangle \right] = \max_{l \in S(0,1)} \left[-\max_{\|m\|=1} (l_1 n_1 + l_2 n_2 + 5l_1 + 4l_2) + \right. \\ & \left. + \int_0^1 \min_{u \in P} \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{11}(1, \tau) & x_{12}(1, \tau) & x_{13}(1, \tau) & x_{14}(1, \tau) \\ x_{21}(1, \tau) & x_{22}(1, \tau) & x_{23}(1, \tau) & x_{24}(1, \tau) \\ x_{31}(1, \tau) & x_{32}(1, \tau) & x_{33}(1, \tau) & x_{34}(1, \tau) \\ x_{41}(1, \tau) & x_{42}(1, \tau) & x_{43}(1, \tau) & x_{44}(1, \tau) \end{pmatrix}^{Tp} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle d\tau \right] = \\ & = \max_{l \in S(0,1)} \left[-1 - (5l_1 + 4l_2) + \int_0^1 \min_{u \in P} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_1 x_{11}(\tau) + l_2 x_{21}(\tau) \\ l_1 x_{12}(\tau) + l_2 x_{22}(\tau) \\ l_1 x_{13}(\tau) + l_2 x_{23}(\tau) \\ l_1 x_{14}(\tau) + l_2 x_{24}(\tau) \end{pmatrix} \right\rangle d\tau \right] = \\ & = -1 + \max_{l \in S(0,1)} \left[-(5l_1 + 4l_2) + \int_0^1 \sqrt{[x_{13}(1, \tau)l_1 + x_{23}(1, \tau)l_2]^2 + [x_{14}(1, \tau)l_1 + x_{24}(1, \tau)l_2]^2} d\tau \right]. \end{aligned}$$

Задача математического программирования (10) здесь принимает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon(l) &= -1 - (5l_1 + 4l_2) - \\ & - \int_0^1 \sqrt{[x_{13}(1, \tau)l_1 + x_{23}(1, \tau)l_2]^2 + [x_{14}(1, \tau)l_1 + x_{24}(1, \tau)l_2]^2} d\tau \rightarrow \max, \quad \|l\| = 1. \end{aligned}$$

Приведем ее решение

$$l^0 = \begin{pmatrix} -0.779 \\ -0.627 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon(l^0) = 4.596.$$

Заметим, что построить фундаментальную матрицу Коши в аналитическом виде в данном примере не удастся. Это обстоятельство в некоторой степени осложняет численное решение задачи математического программирования.

Программная стратегия, удовлетворяющая необходимым условиям оптимальности, определяется по формуле

$$U^0(t) = \begin{pmatrix} -\frac{x_{13}(1, t)l_1^0 + x_{23}(1, t)l_2^0}{E(t, l_1^0, l_2^0)} \\ -\frac{x_{14}(1, t)l_1^0 + x_{24}(1, t)l_2^0}{E(t, l_1^0, l_2^0)} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где

$$E(t, l_1^0, l_2^0) = \sqrt{(x_{13}(1, t)l_1^0 + x_{23}(1, t)l_2^0)^2 + (x_{14}(1, t)l_1^0 + x_{24}(1, t)l_2^0)^2}.$$

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

Закон движения объекта определяется путем интегрирования основной системы дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями, в которую подставлено программное управление (15). Ниже на **рис. 11** приводятся графики изменения первых двух координат фазового вектора от времени

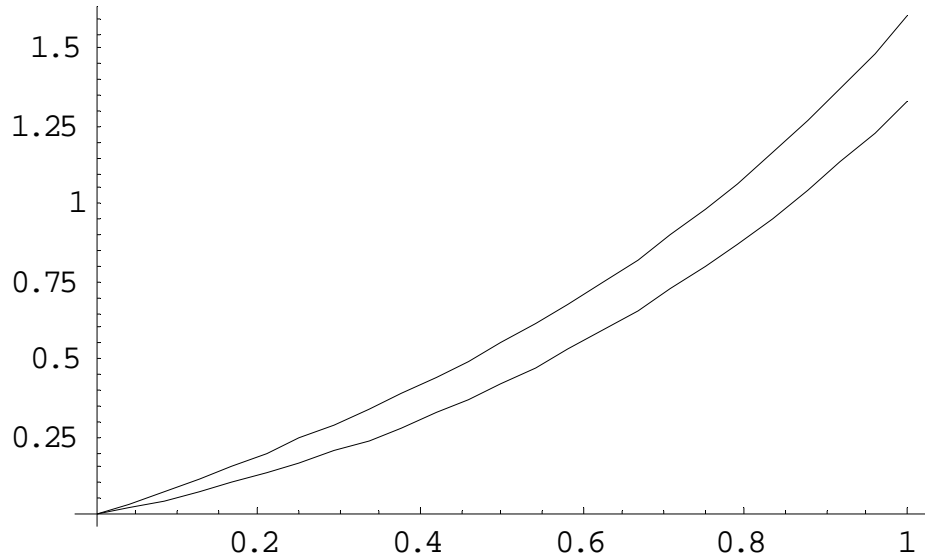


Рис. 11

Финальное значение проекции фазового вектора на первые две координаты и расстояние от нее до терминального множества задается равенствами

$$\{x^0(1)\}_2 = \begin{pmatrix} x_1^0(1) \\ x_2^0(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.641 \\ 0.491 \end{pmatrix}, \quad I[U^0(\cdot)] = \rho(\{x^0(1)\}_2, M) = 4.596.$$

Непосредственно проверяется, что

$$\varepsilon^0 = \varepsilon(l^0) = I[U^0(\cdot)]$$

и устанавливается, что программное управление $U^0(\cdot)$ является оптимальным.

Для сравнения вычислим финальное расстояние от проекции фазового вектора на первые две координаты до терминального множества для случая, когда в качестве допустимого программного управления взята вектор функция

$$\tilde{u}(t) = \begin{pmatrix} \frac{x_{13}(1,t)l_1^0 + x_{23}(1,t)l_2^0 - 0.5}{E_1(t, l_1^0, l_2^0)} \\ \frac{x_{14}(1,t)l_1^0 + x_{24}(1,t)l_2^0 + 0.5}{E_1(t, l_1^0, l_2^0)} \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1].$$

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

Здесь

$$E_1(t, l_1^0, l_2^0) = \sqrt{[x_{13}(1, t)l_1^0 + x_{23}(1, t)l_2^0 - 0.5]^2 + [x_{14}(1, t)l_1^0 + x_{24}(1, t)l_2^0 + 0.5]^2}.$$

Пусть $\tilde{x}(\cdot) = \tilde{x}(\cdot, t_0, x_0, \tilde{u}(\cdot))$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1(1) \\ \tilde{x}_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.703 \\ 0.193 \end{pmatrix}, \quad I[\tilde{u}(\cdot)] = 4.74077$$

Таким образом,

$$I[\tilde{u}(\cdot)] = 4.74077 > 4.596 = I[U^0(\cdot)].$$

Пример 8*. В условиях предыдущего примера принимается, что

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in R^2 \mid |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1 \right\}.$$

Тогда

$$\varepsilon^0 = -1 + \max_{l \in S(0,1)} \left[-(5l_1 + 4l_2) - \int_0^1 |x_{13}(1, \tau)l_1 + x_{23}(1, \tau)l_2| + |x_{14}(1, \tau)l_1 + x_{24}(1, \tau)l_2| d\tau \right].$$

Вектор- функция \hat{U} определяется формулой

$$\hat{U}(t, l_1, l_2) = \begin{pmatrix} -\text{sign}[x_{13}(1, \tau)l_1 + x_{23}(1, \tau)l_2] \\ -\text{sign}[x_{14}(1, \tau)l_1 + x_{24}(1, \tau)l_2] \end{pmatrix}, \quad (14)$$

а задача математического программирования (8) здесь принимает вид

$$\varepsilon(l) = -1 - (5l_1 + 4l_2) - \int_0^1 [|x_{13}(1, \tau)l_1 + x_{23}(1, \tau)l_2| + |x_{14}(1, \tau)l_1 + x_{24}(1, \tau)l_2|] d\tau \rightarrow \max, \quad \|l\| = 1.$$

Приведем ее решение

$$l^0 = \begin{pmatrix} -0.791 \\ -0.612 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon(l^0) = 4.282.$$

Подставляя l^0 в (12), находим управление

$$U^0(t) = \begin{pmatrix} -\text{sign}[x_{13}(1, \tau)l_1^0 + x_{23}(1, \tau)l_2^0] \\ -\text{sign}[x_{14}(1, \tau)l_1^0 + x_{24}(1, \tau)l_2^0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]. \quad (15)$$

Из графиков компонент вектора управления (15), представленных на рис. 12

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

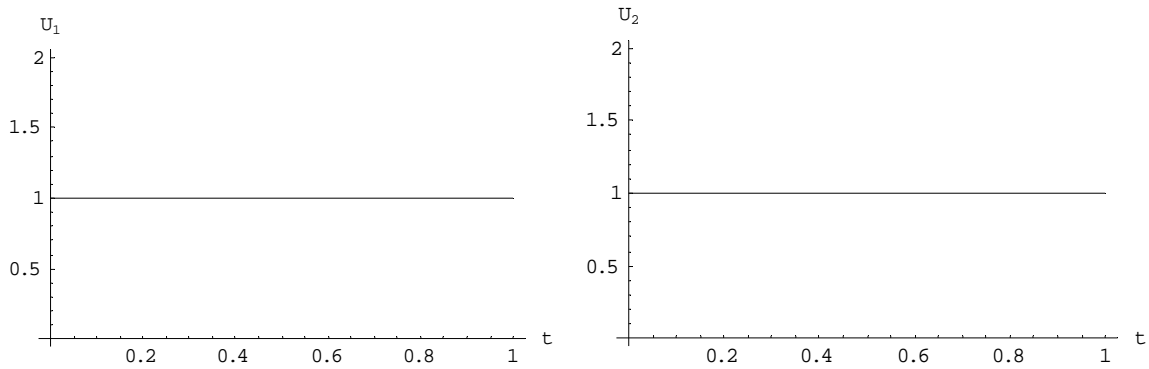


Рис. 12.

видно, что оптимальное управление постоянно на всем промежутке времени $[0,1]$. Оптимальный закон движения объекта определяется путем интегрирования основной системы дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями, в которую подставлено оптимальное программное управление (15). Ниже на **рис 13** приводятся графики изменения первых двух координат фазового вектора от времени

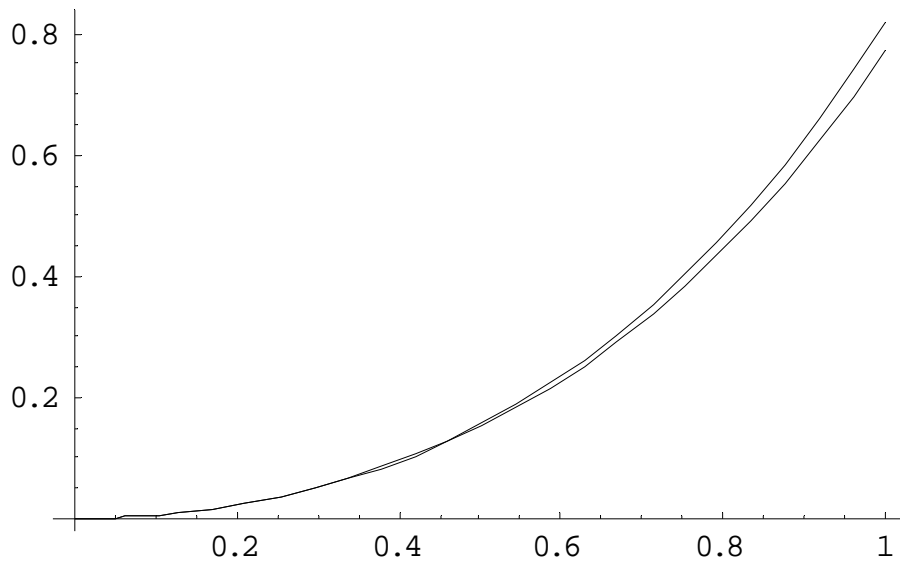


Рис. 13

Финальное значение проекции фазового вектора на первые две координаты и расстояние от нее до терминального множества задается равенствами

$$\{x^0(1)\}_2 = \begin{pmatrix} x_1^0(1) \\ x_2^0(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.821 \\ 0.771 \end{pmatrix}, I[U^0(\cdot)] = \rho(\{x^0(1)\}_2, M) = 4.282.$$

Вновь подтверждается выполнение равенства

$$I[U^0(\cdot)] = \varepsilon^0 = \varepsilon(t^0).$$

Найденное расстояние меньше того, что было получено в **примере 7**. Этот результат ожидаемый, так как область изменения вектора управляющих параметров в рассматриваемом примере шире, чем в **примере 7**.

Для сравнения вычислим финальное расстояние от проекции фазового вектора на первые две координаты до терминального множества для случая, когда в качестве допустимого программного управления взята вектор-функция

$$\tilde{u}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1(t) \\ \tilde{u}_2(t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{u}_1(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 0.1] \\ 1 & t \in [0.1, 1] \end{cases}, \quad \tilde{u}_2(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 0.9] \\ -1 & t \in [0.9, 1] \end{cases}.$$

Пусть $\tilde{x}(\cdot) = \tilde{x}(\cdot, t_0, x_0, \tilde{U}(\cdot))$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1(1) \\ \tilde{x}_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.499 \\ 0.652 \end{pmatrix}, \quad I[\tilde{U}(\cdot)] = 4.60949.$$

Таким образом, $I[\tilde{u}(\cdot)] = 4.60949 > 4.282 = I[U^0(\cdot)]$.

2.5. Случай подвижного левого и свободного правого конца траектории. Будем предполагать, что в постановке **задачи 1** множество $S_0 \subset R^n$ содержит более одной точки и является компактным множеством в R^n . Сформулируем получившуюся задачу.

Задача 2. Найти допустимую программную стратегию $U^0(\cdot) \in \Pi[t_0, T]$, доставляющую минимум функционалу

$$I[U(\cdot)] = \Phi(x(T)), \quad \Phi \in C^1(R^1)$$

при ограничениях

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t), \quad x \in R^n, u \in P \subset R^r,$$

$$\theta_0 = \{t_0\}, \theta_1 = \{T\}, x_0 \in S_0 \subset R^n, S_1 = R^n.$$

Обозначим

$$\Gamma(t_0, S_0, T) = \bigcup_{x_0 \in S_0} G(t_0, x_0, T).$$

Из непрерывной зависимости области достижимости от начального положения $x_0 \in S_0$ (см. формулу Коши) и компактности множества S_0 следует, что

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА
множество $\Gamma(t_0, S_0, T) \subset R^n$ также является компактным, поэтому решение **задачи 2** существует.

Пусть пара $(x_0^0, U^0(\cdot))$, $x_0^0 \in S_0, U^0(\cdot) \in \Pi[t_0, T]$ доставляет решение **задачи 2**. Очевидно, что программная стратегия $U^0(\cdot) \in \Pi[t_0, T]$ будет оптимальной для **задачи 1**, если принять $S_0 = \{x_0^0\}$, а остальные условия **задачи 1** считать совпадающими с соответствующими условиями **задачи 2**. Тогда по **теореме 4** должно выполняться

$$\langle B(t)U^0(t), \psi^0(t) \rangle = \max_{u \in P} \langle B(t)u, \psi^0(t) \rangle \quad (1)$$

для почти всех $t \in [t_0, T]$, где

$$\psi^0(T) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x^0(T)), x^0(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0^0, U^0(\cdot)). \quad (2)$$

Условия (1) и (2) не позволяют однозначно определить программную стратегию управления, претендующую на решение **задачи 2**, поскольку они содержат n неизвестных параметров, образующих вектор начальных условий $x_0^0 \in S_0$. Для их определения выведем так называемые условия трансверсальности на левом конце траектории.

Пусть

$$S_0 = \{x \in R^n \mid \varphi_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\},$$

где $\varphi_i: R^n \rightarrow R^1, i = 1, \dots, m$ - заданные непрерывно дифференцируемые по совокупности аргументов функции. Дополнительно предположим, что для множества S_0 выполнено следующее условие регулярности: для всех $x \in S_0$ набор векторов

$$\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x}, i \in I^0(x) = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid \varphi_i(x) = 0\}$$

является линейно независимым.

Оптимальное начальное положение фазового вектора x_0^0 удовлетворяет равенству

$$\Phi(x^0(T)) = \Phi \left(X[T, t_0]x_0^0 + \int_{t_0}^T X[T, \tau]B(\tau)U^0(\tau) d\tau + \int_{t_0}^T X[T, \tau]C(\tau) d\tau \right) =$$

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

$$= \min_{x_0 \in S_0} \Phi \left(X[T, t_0]x_0 + \int_{t_0}^T X[T, \tau]B(\tau)U^0(\tau)d\tau + \int_{t_0}^T X[T, \tau]C(\tau)d\tau \right).$$

По теореме Кароша – Джона [22] существует вектор $\begin{Bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \dots \\ \mu_m \end{Bmatrix} \neq 0$, для которого

справедливы соотношения

$$\mu_0 \frac{\partial \Phi \left(X[T, t_0]x_0^0 + \int_{t_0}^T X[T, \tau]B(\tau)U^0(\tau)d\tau + \int_{t_0}^T X[T, \tau]C(\tau)d\tau \right)}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^m \mu_i \frac{\partial \varphi_i(x_0^0)}{\partial x_0} = 0; \quad (3)$$

$$\mu_i \varphi_i(x_0^0) = 0, \quad \mu_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad (4)$$

$$\mu_0 \in \{0, 1\}. \quad (5)$$

Заметим, что в силу регулярности множества S_0 , в условии (5) можно сразу записать $\mu_0 = 1$. Действительно, пусть $\mu_0 = 0$. Тогда из условий (3) и (4) следует, что

$$\sum_{i=1}^m \mu_i \frac{\partial \varphi_i(x_0^0)}{\partial x_0} = 0 \Rightarrow \sum_{i \in I^0(x_0^0)} \mu_i \frac{\partial \varphi_i(x_0^0)}{\partial x_0} = 0, \quad (6)$$

причем среди чисел $\mu_i, i \in I^0(x)$ есть числа, отличные от нуля. Равенство (6) противоречит линейной независимости набора векторов $\frac{\partial \varphi_i(x_0^0)}{\partial x}, i \in I^0(x_0^0)$. Остается признать, что $\mu_0 = 1$.

Вычисляем

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x_0} \left(X[T, t_0]x_0 + \int_{t_0}^T X[T, \tau]B(\tau)U^0(\tau)d\tau + \int_{t_0}^T X[T, \tau]C(\tau)d\tau \right) \right|_{x_0=x_0^0} = \\ & = X^{Tp}[T, t_0] \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x^0(T)) = -\psi^0(t_0). \end{aligned}$$

Теперь условие (3) можно переписать в виде

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

$$\psi^0(t_0) = \sum_{i=1}^m \mu_i \frac{\partial \varphi_i(x_0^0)}{\partial x}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 6. Пусть пара $(x_0^0, U^0(\cdot))$, $x_0^0 \in S_0, U^0(\cdot) \in \Pi[t_0, T]$ доставляет решение задачи 2. Тогда необходимо

$$\langle B(t)U^0(t), \psi^0(t) \rangle = \max_{u \in P} \langle B(t)u, \psi^0(t) \rangle$$

при почти всех $t \in [t_0, T]$. В случае, когда для множества S_0 выполнены условия регулярности, существует набор чисел $\mu_1 \geq 0, \dots, \mu_m \geq 0$ таких, что

$$\psi^0(t_0) = \sum_{i=1}^m \mu_i \frac{\partial \varphi_i(x_0^0)}{\partial x}, \quad \mu_i \varphi_i(x_0^0) = 0, i = 1, \dots, m.$$

Пример 9*. Рассмотрим линейный управляемый динамический объект

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1, \dot{x}_2 = -x_1 + u_2, \quad t \in [0, \pi];$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, u \in P = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in R^2 \mid u_1^2 + u_2^2 \leq 1 \right\},$$

$$S_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2 \mid -\frac{4}{5} \cdot \sqrt{25 - x_1^2} + x_2 \leq 0, x_1 - x_2 + 5 \leq 0 \right\}$$

$$I[U(\cdot)] = 3x_1^2(\pi) + 2x_2^2(\pi) \rightarrow \min.$$

Условия рассматриваемого примера совпадают с условиями примера 2 за исключением граничных условий на левом конце траектории. В данном примере множество S_0 содержит более одной точки. Множество S_0 показано на рис. 14.

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

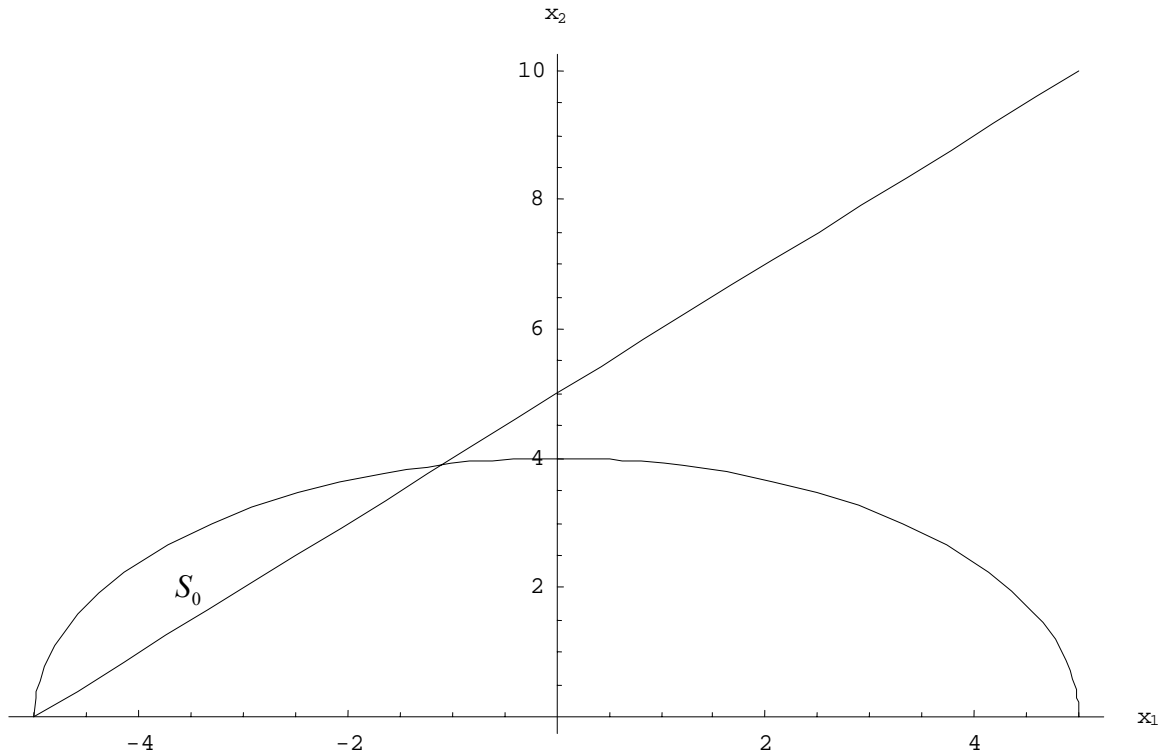


Рис. 14

Повторяя выкладки из примера 2, приходим к тому, что

$$\hat{U}(t, \psi) = \begin{pmatrix} \frac{\psi_1}{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}} \\ \frac{\psi_2}{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}} \end{pmatrix}, \psi \neq 0,$$

а объединенная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \frac{\psi_1}{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}}, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \frac{\psi_2}{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}}, \\ \dot{\psi}_1 &= -\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 &= \psi_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Выпишем граничные условия. На правом конце траектории они тождественны условиям, полученным в примере 2

$$\psi_1(\pi) = -6x_1(\pi), \psi_2(\pi) = -4x_2(\pi). \quad (8)$$

В соответствии с теоремой 6 выпишем граничные условия на левом конце траектории

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

$$\begin{aligned}\psi^0(0) &= \mu_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{4}{5} \cdot \sqrt{25-x_1^2} + x_2 \right) + \mu_2 \frac{\partial}{\partial x} (x_1 - x_2 + 5) = \\ &= \mu_1 \begin{pmatrix} \frac{4x_1}{5\sqrt{25-x_1^2}} \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \frac{4x_1}{5\sqrt{25-x_1^2}} + \mu_2 \\ \mu_1 - \mu_2 \end{pmatrix}, \\ \mu_1 \left(-\frac{4}{5} \cdot \sqrt{25-x_1^2} + x_2 \right) &= 0, \quad \mu_2 (x_1 - x_2 + 5) = 0, \quad \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0.\end{aligned}$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений (7) имеет вид

$$\begin{aligned}\psi_1(t, c_1, c_2) &= c_1 \cos t + c_2 \sin t, \\ \psi_2(t, c_1, c_2) &= c_2 \cos t - c_1 \sin t, \\ x_1(t, c_1, c_2, c_3, c_4) &= \frac{tc_1 \cos t}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} + c_3 \cos t + \frac{tc_2 \sin t}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} + c_4 \sin t, \\ x_2(t, c_1, c_2, c_3, c_4) &= \frac{tc_2 \cos t}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} + c_4 \cos t - \frac{tc_1 \sin t}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} - c_3 \sin t.\end{aligned}\tag{9}$$

Выпишем граничные условия с учетом равенств (9).

На левом конце

$$\begin{aligned}c_1 &= \mu_1 \frac{4x_{10}}{5\sqrt{25-x_{10}^2}} + \mu_2, \quad c_2 = \mu_1 - \mu_2, \\ \mu_1 \left(-\frac{4}{5} \cdot \sqrt{25-x_{10}^2} + x_{20} \right) &= 0, \quad \mu_2 (x_{10} - x_{20} + 5) = 0, \\ c_3 &= x_{10}, \quad c_4 = x_{20}, \quad \mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0.\end{aligned}\tag{10}$$

На правом конце

$$-c_1 = 6 \left(\frac{\pi c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} + c_3 \right), \quad -c_2 = 4 \left(\frac{\pi c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} + c_4 \right).\tag{11}$$

В результате получилась система из восьми уравнений относительно восьми $c_1, c_2, c_3, c_4, \mu_1, \mu_2, x_{10}, x_{20}$ неизвестных. Последовательно рассмотрим четыре случая: 1) $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$, : 2) $\mu_1 > 0, \mu_2 = 0$, : 1) $\mu_1 = 0, \mu_2 > 0$, : 1) $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$.

Случай 1. Из первых двух равенств в (10) вытекает, что

$$c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow \psi^0(t) \equiv 0, \quad t \in [0, \pi].$$

Из граничных условий (8) следуют равенства $x_1(\pi) = x_2(\pi) = 0$. Покажем, что

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \Gamma(0, S_0, \pi)$. Для этого достаточно установить справедливость неравенства

ва

$$\max_{l \in S(0,1)} \left[\min_{q \in G(t_0, x_0, T)} \langle q, l \rangle \right] = \max_{l \in S(0,1)} \left[\min_{x_0 \in S_0} \langle X[\pi, 0]x_0, l \rangle + \int_0^\pi \min_{u \in P} \langle X[\pi, \tau]u, l \rangle d\tau \right] > 0. \quad (12)$$

Последовательно вычисляем

$$X[t, \tau] = \begin{pmatrix} \cos(t-\tau) & \sin(t-\tau) \\ -\sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{pmatrix}, \quad \langle X[\pi, 0]x_0, l \rangle = -l_1 x_{10} - l_2 x_{20},$$

$$\langle X[\pi, \tau]u, l \rangle = u_2 (-l_2 \cos \tau + l_1 \sin \tau) + u_1 (-l_1 \cos \tau - l_2 \sin \tau),$$

$$\min_{u \in P} \langle X[\pi, \tau]u, l \rangle = -\sqrt{(-l_2 \cos \tau + l_1 \sin \tau)^2 + (-l_1 \cos \tau - l_2 \sin \tau)^2} = -\sqrt{l_1^2 + l_2^2} = -1.$$

В результате неравенство (12) принимает вид

$$\max_{l_1^2 + l_2^2 = 1} \left[\min_{x_0 \in S_0} (-l_1 x_{10} - l_2 x_{20}) \right] > \pi. \quad (13)$$

Минимум линейной формы, стоящей в левой части неравенства (13), может достигаться лишь в тех начальных позициях, которые лежат на дуге эллипса.

Тогда левая часть неравенства (13) вычисляется по формуле

$$\max \left\{ \max_{l_1 \in [-1,1]} \min_{x_{10} \in [-5, -1.09756]} \left(-l_1 x_{10} - \frac{4}{5} l_2 \sqrt{25 - x_{10}^2} \right), \max_{l_1 \in [-1,1]} \min_{x_{10} \in [-5, -1.09756]} \left(-l_1 x_{10} + \frac{4}{5} l_2 \sqrt{25 - x_{10}^2} \right) \right\} = 3.527 > \pi,$$

и неравенство (13) имеет место. Таким образом, **случай 1** не дает решения задачи оптимального управления.

Случай 2). Граничные условия принимают вид

$$c_1 = \mu_1 \frac{4x_{10}}{5\sqrt{25 - x_{10}^2}}, \quad c_2 = \mu_1, \quad -\frac{4}{5} \cdot \sqrt{25 - x_{10}^2} + x_{20} = 0, \quad x_{10} - x_{20} + 5 \leq 0, \quad (14)$$

$$c_3 = x_{10}, \quad c_4 = x_{20}, \quad \mu_1 > 0, \quad -c_1 = 6 \left(\frac{\pi c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} + c_3 \right), \quad -c_2 = 4 \left(\frac{\pi c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} + c_4 \right). \quad (15)$$

Эти условия противоречивы, так как в силу второго равенства в (14) выполняется $c_2 > 0$. Тогда из второго и четвертого равенств в (15) следует, что $x_{20} < 0$ и $x_0 \notin S_0$.

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

Случай 3). Граничные условия принимают вид

$$c_1 = \mu_2, \quad c_2 = -\mu_2, \quad -\frac{4}{5} \cdot \sqrt{25 - x_{10}^2} + x_{20} \leq 0, \quad x_{10} - x_{20} + 5 = 0, \quad (16)$$

$$c_3 = x_{10}, \quad c_4 = x_{20}, \quad \mu_2 > 0, \quad -c_1 = 6 \left(\frac{\pi c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} + c_3 \right), \quad -c_2 = 4 \left(\frac{\pi c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} + c_4 \right). \quad (17)$$

Решением системы (16), (17) будут числа

$$c_1 = 1.337, \quad c_2 = -1.337, \quad c_3 = -2.444, \quad c_4 = 2.556, \quad \mu_2 = 1.337 > 0, \quad x_{10} = -2.444, \quad x_{20} = 2.556.$$

Подставляя их в (7), определяем оптимальную программную стратегию и оптимальную траекторию объекта. Ниже на **рис. 15** приводится вид этой траектории.

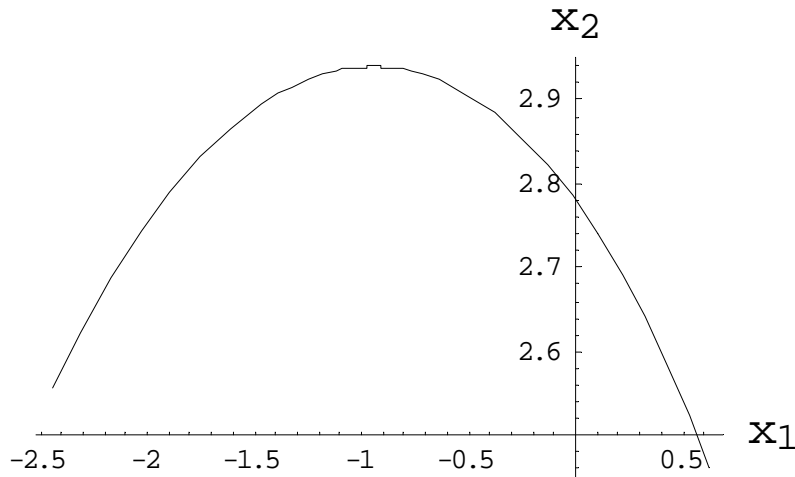


Рис. 15

Оптимальное значение функционала равно

$$I[U^0(\cdot)] = 3(x_1^0(\pi))^2 + 2(x_2^0(\pi))^2 = 0.372.$$

В примере 4 значение функционала на оптимальном управлении было «хуже» и равнялось величине 0.562. Такой результат является ожидаемым, так как начальная точка $x_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ из примера 4 принадлежит множеству S_0 данного примера.

Случай 4). Граничные условия принимают вид

$$c_1 = \mu_1 \frac{4x_{10}}{5\sqrt{25 - x_{10}^2}} + \mu_2, \quad c_2 = \mu_1 - \mu_2, \quad -\frac{4}{5} \cdot \sqrt{25 - x_{10}^2} + x_{20} = 0, \quad x_{10} - x_{20} + 5 = 0,$$

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

$$c_3 = x_{10}, \quad c_4 = x_{20}, \quad \mu_1 > 0, \quad \mu_2 > 0, \quad -c_1 = 6 \left(\frac{\pi c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} + c_3 \right), \quad -c_2 = 4 \left(\frac{\pi c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} + c_4 \right).$$

Эта система имеет два решения.

Первое решение

$$c_1 = 11.150, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -5, \quad c_4 = 0, \quad \mu_1 = -8.79 \cdot 10^{-7}, \quad \mu_2 = -8.79 \cdot 10^{-7}, \\ x_{10} = -5, \quad x_{20} = 0.$$

Второе решение

$$c_1 = 1.093, \quad c_2 = -3.589, \quad c_3 = -1.098, \quad c_4 = 3.902, \quad \mu_1 = -3.043 < 0, \quad \mu_2 = 0.545, \\ x_{10} = -1.098, \quad x_{20} = 3.902.$$

Оба решения не удовлетворяют предположениям четвертого случая.

Таким образом, задача оптимального управления имеет единственное решение, которое было получено в третьем случае.

Пример 10*. *Рассмотрим линейный управляемый динамический объект*

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + 2x_2 - 30x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 = 10x_1 - x_2 - 35x_3 + u_2, \\ \dot{x}_3 = 2x_1 - x_2 + x_3 + u_3,$$

$$u \in P = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in R^3 \mid |u_i| \leq 1, i = 1, 2, 3 \right\}, \quad t \in [0, 1]$$

$$x_0 \in S_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R^3 \mid \frac{x_1}{(-9)} + \frac{x_2}{6} + \frac{x_3}{3} \leq 1, x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0, -x_3 \leq 0 \right\};$$

$$I[U(\cdot)] = x_1(1) + 2x_2(1) - x_3(1) \rightarrow \min.$$

Условия рассматриваемого примера совпадают с условиями примера 3 за исключением граничных условий на левом конце траектории. В данном примере множество S_0 содержит более одной точки. Множество S_0 показано на рис. 16.

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

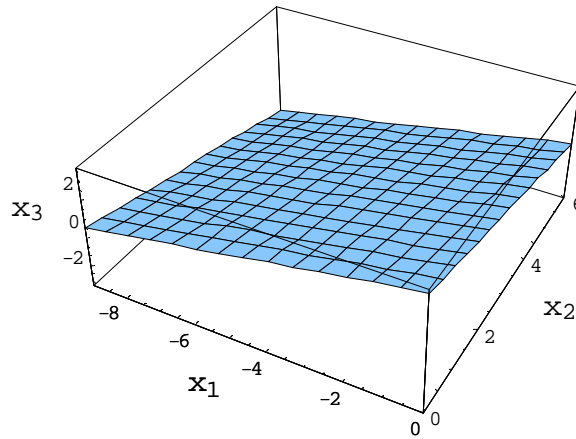


Рис. 16

Повторяя выкладки из примера 3, приходим к тому, что

$$\hat{U}(t, \psi) = \begin{pmatrix} \hat{U}_1(t, \psi) \\ \hat{U}_2(t, \psi) \\ \hat{U}_3(t, \psi) \end{pmatrix}, \hat{U}_i(t, \psi) = \begin{cases} \text{sign}[\psi_i], & \psi_i < 0 \\ \text{любое число} & \psi_i = 0, \\ \text{из } [0, 1], & \\ -\text{sign}[\psi_i], & \psi_i > 0. \end{cases}$$

Объединенная система дифференциальных уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 + 2x_2 - 30x_3 + \hat{U}_1(t, \psi), \\ \dot{x}_2 &= 10x_1 - x_2 - 35x_3 + \hat{U}_2(t, \psi), \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 - x_2 + x_3 + \hat{U}_3(t, \psi), \\ \dot{\psi}_1 &= -2\psi_1 - 10\psi_2 - 2\psi_3, \\ \dot{\psi}_2 &= -2\psi_1 + \psi_2 + \psi_3, \\ \dot{\psi}_3 &= 30\psi_1 + 35\psi_2 - \psi_3. \end{aligned}$$

В данном примере сопряженная система дифференциальных уравнений интегрируется независимо от основной системы. В результате с учетом граничных условий

$$\psi_1(1) = -1, \psi_2(1) = -2, \psi_3(1) = 1$$

получим вектор-функцию $\psi^0(t), t \in [0, 1]$. Эта функция тождественна той, что была построена в примере 3.

Тогда оптимальная программная стратегия имеет вид

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

$$U_1^0(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \hat{t}), \\ \text{произвольное число} \\ \text{из } [-1, 1], & t = \hat{t}, \\ -1, & t \in (\hat{t}, 1]. \end{cases}, \quad U_2^0(t) \equiv U_3^0(t) \equiv 1, \quad t \in [0, 1],$$

где $\hat{t} = 0.741061$.

Подставим ее в исходную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 + 2x_2 - 30x_3 + U_1^0(t), \\ \dot{x}_2 &= 10x_1 - x_2 - 35x_3 + U_2^0(t), \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 - x_2 + x_3 + U_3^0(t), \end{aligned} \quad (18)$$

В соответствии с теоремой 6 выпишем граничные условия на левом конце траектории. С учетом равенств

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{(-9)} + \frac{x_3}{6} + \frac{x_2}{3} - 1,$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1, \quad \varphi_3(x_1, x_2, x_3) = -x_2, \quad \varphi_4(x_1, x_2, x_3) = -x_3,$$

имеем

$$-\frac{1}{9}\mu_1 + \mu_2 = \psi_1(0), \quad \frac{1}{6}\mu_1 - \mu_3 = \psi_2(0), \quad \frac{1}{3}\mu_1 - \mu_4 = \psi_3(0),$$

$$\mu_1 \left[\frac{x_1}{(-9)} + \frac{x_3}{6} + \frac{x_2}{3} - 1 \right] = 0, \quad \mu_2 x_1 = 0, \quad \mu_3 x_2 = 0, \quad \mu_4 x_3 = 0,$$

$$\mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0, \quad \mu_3 \geq 0, \quad \mu_4 \geq 0. \quad (19)$$

Условия (19) однозначно определяют следующий набор параметров:

$$\mu_1 = 2050.13, \quad \mu_2 = 346.69, \quad \mu_3 = 468.885, \quad \mu_4 = 0, \quad x_{10}^0 = 0, \quad x_{20}^0 = 0, \quad x_{30}^0 = 3.0.$$

Проинтегрируем систему (18) с полученными начальными условиями

$$x(0) = \begin{pmatrix} x_{10}^0 \\ x_{20}^0 \\ x_{30}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

и вычислим значение функционала на оптимальном управлении. Имеем

$$I[U^0(\cdot)] = -2344.02.$$

В примере 3 значение функционала на оптимальном управлении было «хуже» и равнялось величине -366.188 . Такой результат является ожидаемым, так как

начальная точка $x_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ из **примера 3** принадлежит множеству S_0 данного

примера.

2.6. Минимизация расстояния до целевого множества в случае подвижного левого конца траектории. Рассмотрим частный случай задачи **2**, исследованной в **пункте 2.5**. Именно, будем предполагать, что функция Φ , определяющая критерий качества, имеет смысл евклидова расстояния от проекции фазового вектора на часть своих (k первых ($k \leq n$)) координат до некоторого выпуклого компактного множества $M \subset R^k$. Относительно множества $S_0 \in R^n$ дополнительно предположим, что оно выпукло.

Пусть

$$\Gamma(t_0, S_0, T) = \bigcup_{x_0 \in S_0} G(t_0, x_0, T).$$

Из непрерывной зависимости области достижимости от начального положения $x_0 \in S_0$ (см. формулу Коши) компактности и выпуклости множества S_0 следует, что множество $\Gamma(t_0, S_0, T) \subset R^n$ также является компактным и выпуклым.

Предположим, что выполняется $\{\Gamma(t_0, S_0, T)\}_k \cap M = \emptyset$. Полагаем

$$\varepsilon^0 = \min \left\{ \varepsilon > 0 \mid \{\Gamma(t_0, S_0, T)\}_k \cap M^\varepsilon \neq \emptyset \right\}.$$

Из компактности множества $\Gamma(t_0, S_0, T)$ следует существование минимума в правой части последнего равенства и справедливость соотношения

$$\varepsilon^0 = I[U^0(\cdot)] > 0.$$

Вычислим величину ε^0 . По **теореме 1.30** [22] условие $\{\Gamma(t_0, S_0, T)\}_k \cap M^\varepsilon \neq \emptyset$ будет иметь место тогда и только тогда, когда

$$\min_{q \in \{\Gamma(t_0, S_0, T)\}_k} \langle l, q \rangle \leq \chi(M^\varepsilon, l), \quad \forall l \in S(0, 1) = \{s \in R^k \mid \|s\| = 1\}.$$

Отсюда следует, что

$$\varepsilon^0 = \min \left\{ \varepsilon > 0 \mid \min_{q \in \{\Gamma(t_0, S_0, T)\}_k} \langle l, q \rangle \leq \chi(M^\varepsilon, l) \quad \forall l \in S(0, 1) \right\} =$$

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

$$= \max_{l \in S(0,1)} \left[-\max_{m \in M} \langle m, l \rangle + \min_{q \in \{\Gamma(t_0, S_0, T)\}_k} \langle q, l \rangle \right]. \quad (1)$$

По аналогии с **пунктом 2.4.** можно показать, что максимум в (1) достигается на единственном векторе $l^0 \in S(0,1)$ и получить другую форму записи равенства (1)

$$\varepsilon^0 = \max_{\|l\|=1} \left[-\max_{m \in M} \langle m, l \rangle + \min_{x_0 \in S_0} \langle x_0, X[T, t_0]^{Tp} l^* \rangle + \int_{t_0}^T \min_{u \in P} \langle B(\tau)u, X^{Tp}[T, \tau] l^* \rangle d\tau + \int_{t_0}^T \langle C(\tau), X^{Tp}[T, \tau] l^* \rangle d\tau \right]. \quad (2)$$

Здесь обозначено $l^* = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \in R^n$.

Теорема 7. Пусть $\varepsilon^0 > 0$ и пара $(x_0^0, U^0(\cdot))$, $x_0^0 \in S_0$, $U^0(\cdot) \in \Pi[t_0, T]$ является решением задачи оптимального управления. Тогда

$$\langle x_0^0, X^{Tp}[T, t_0] l^{0*} \rangle = \min_{x_0 \in S_0} \langle x_0, X^{Tp}[T, t_0] l^{0*} \rangle, \quad (3)$$

$$\langle B(t)U^0(t), X^{Tp}[T, t] l^{0*} \rangle = \min_{u \in P} \langle B(t)u, X^{Tp}[T, t] l^{0*} \rangle \quad (4)$$

при почти всех $t \in [t_0, T]$, где $l^{0*} = \begin{pmatrix} l^0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \in R^n$.

Доказательство. Из равенства (2) при $l^* = l^{0*}$ выводим

$$\varepsilon^0 = -\max_{m \in M} \langle m, l^0 \rangle + \min_{x_0 \in S_0} \langle x_0, X^{Tp}[T, t_0] l^{0*} \rangle + \int_{t_0}^T \min_{u \in P} \langle B(\tau)u(\tau), X^{Tp}[T, \tau] l^{0*} \rangle d\tau + \int_{t_0}^T \langle C(\tau), X^{Tp}[T, \tau] l^{0*} \rangle d\tau.$$

Пусть нарушается какое-либо из условий (3) - (4). Тогда одно из неравенств (или оба сразу)

$$\langle x_0^0, X^{Tp}[T, t_0] l^{0*} \rangle \geq \min_{x_0 \in S_0} \langle x_0, X^{Tp}[T, t_0] l^{0*} \rangle,$$

$$\int_{t_0}^T \langle B(\tau)U^0(\tau), X^{Tp}[T, \tau] l^{0*} \rangle d\tau \geq \int_{t_0}^T \min_{u \in P} \langle B(\tau)u(\tau), X^{Tp}[T, \tau] l^{0*} \rangle d\tau. \quad (5)$$

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

будет строгим. По аналогии с пунктом 2.4 с учетом условия (5) вычисляем

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^0 &= I[x_0^0, U^0(\cdot)] = \rho(\{x^0(T)\}_k, M) = \max_{\|l\|=1} \left[-\max_{m \in M} \langle m, l \rangle + \langle \{x^0(T)\}_k, l \rangle \right] = \\
 &= \max_{\|l\|=1} \left[-\max_{m \in M} \langle m, l \rangle + \left\langle \left\{ X[T, t_0]x_0^0 + \int_{t_0}^T X[T, \tau]B(\tau)U^0(\tau) d\tau + \int_{t_0}^T X[t, \tau]C(\tau) d\tau \right\}_k, l \right\rangle \right] \geq \\
 &\geq -\max_{m \in M} \langle m, l^0 \rangle + \langle x_0^0, X^{Tp}[T, t_0]l^{0*} \rangle + \int_{t_0}^T \langle B(\tau)U^0(\tau), X^{Tp}[T, \tau]l^{0*} \rangle d\tau + \\
 &+ \int_{t_0}^T \langle C(\tau), X^{Tp}[t, \tau]l^{0*} \rangle d\tau > -\max_{m \in M} \langle m, l^0 \rangle + \min_{x_0 \in S_0} \langle x_0, X^{Tp}[T, t_0]l^{0*} \rangle + \\
 &+ \int_{t_0}^T \min_{u \in P} \langle B(\tau)u, X^{Tp}[T, \tau]l^{0*} \rangle d\tau + \int_{t_0}^T \langle C(\tau), X^{Tp}[t, \tau]l^{0*} \rangle d\tau = \varepsilon^0.
 \end{aligned}$$

Получили противоречие. Теорема доказана.

Последовательность действий по решению задачи управления динамической системой на основе теоремы 7 в целом аналогична той, что была описана в пункте 2.4. Отличие состоит лишь в том, что задача математического программирования (4.7) здесь принимает вид

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(l) &= -\chi(M, l) + \min_{x_0 \in S_0} \left\langle X[T, t_0]x_0, \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle + \int_{t_0}^T \min_{u \in P} \left\langle X[T, \tau]B(\tau)\hat{U}(\tau, l), \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle d\tau + \\
 &+ \int_{t_0}^T \left\langle X[t, \tau]C(\tau), \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle d\tau \rightarrow \max, \|l\| = 1.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Эта задача всегда имеет решение, а в случае когда $\varepsilon^0 = \varepsilon(l^0) > 0$, это решение единственное. Другое отличие касается начальных условий для фазового вектора: их следует выбирать из соотношения (3). Также как и в пункте 2.4, достаточным условием оптимальности найденного управления будет являться совпадения величины ε^0 и значения функционала на этом управлении.

Пример 11*. Рассматривается следующая управляемая система:

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

$$\dot{x}_1 = x_3,$$

$$\dot{x}_2 = x_4,$$

$$\dot{x}_3 = (\cos t)x_3 + tx_4 + u_1,$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{t+1}x_3 + (\sin t)x_4 + u_2,$$

$$u \in P = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in R^2 \mid u_1^2 + u_2^2 \leq 1 \right\}, t \in [0, 1],$$

$$k = 2, M = \left\{ \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \in R^2 \mid (m_1 - 5)^2 + (m_2 - 4)^2 \leq 1 \right\},$$

$$x_0 \in S_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in R^4 \mid \frac{(x_1)^2}{0.2^2} + \frac{(x_2)^2}{(0.1)^2} + \frac{(x_3)^2}{0.1^2} + \frac{(x_4)^2}{(0.2)^2} \leq 1, \right\}.$$

Фундаментальная матрица Коши для однородной системы дифференциальных уравнений, опорная функция множества M и функция \hat{U} здесь совпадают с теми, что были построены в **примере 7**. Вычисляем

$$\begin{aligned} \min_{x_0 \in S_0} \langle x_0, \psi^{0*}(T) \rangle &= \min_{x_0 \in S_0} \left\langle X[1, 0] \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \\ x_{40} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= \min_{x_0 \in S_0} [l_1 (x_{11}[1, 0]x_{10} + x_{12}[1, 0]x_{20} + x_{13}[1, 0]x_{30} + x_{14}[1, 0]x_{40}) + \\ &\quad + l_2 (x_{21}[1, 0]x_{10} + x_{22}[1, 0]x_{20} + x_{23}[1, 0]x_{30} + x_{24}[1, 0]x_{40})] = \\ &= \min_{x_0 \in S_0} [x_{10} (l_1 x_{11}[1, 0] + l_2 x_{21}[1, 0]) + x_{20} (l_1 x_{12}[1, 0] + l_2 x_{22}[1, 0]) + \\ &\quad + x_{30} (l_1 x_{13}[1, 0] + l_2 x_{23}[1, 0]) + x_{40} (l_1 x_{14}[1, 0] + l_2 x_{24}[1, 0])] = \min_{x_0 \in S_0} \sum_{i=1}^4 \beta_i(l_1, l_2) x_{i0} = \\ &= -\sqrt{(0.2)^2 \beta_1^2(l_1, l_2) + (0.1)^2 \beta_2^2(l_1, l_2) + (0.1)^2 \beta_3^2(l_1, l_2) + (0.2)^2 \beta_4^2(l_1, l_2)} = -\Xi(l_1, l_2), \end{aligned}$$

где обозначено

$$\beta_i(l_1, l_2) = l_1 x_{i1}[1, 0] + l_2 x_{i2}[1, 0], \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

При этом

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

$$x_{10}(l_1, l_2) = -\frac{\beta_1(l_1, l_2) \cdot (0.2)^2}{\Xi(l_1, l_2)}, x_{20}(l_1, l_2) = -\frac{\beta_2(l_1, l_2) \cdot (0.1)^2}{\Xi(l_1, l_2)},$$

$$x_{30}(l_1, l_2) = -\frac{\beta_3(l_1, l_2) \cdot (0.2)^2}{\Xi(l_1, l_2)}, x_{40}(l_1, l_2) = -\frac{\beta_4(l_1, l_2) \cdot (0.1)^2}{\Xi(l_1, l_2)}. \quad (7)$$

Выпишем задачу математического программирования (6)

$$\varepsilon(l) = -1 - (5l_1 + 4l_2) - \Xi(l_1, l_2) - \int_{t_0}^T E(\tau, l_1^0, l_2^0) d\tau \rightarrow \max, \quad \|l\| = 1,$$

где

$$E(t, l_1^0, l_2^0) = \sqrt{(x_{13}(1, t)l_1^0 + x_{23}(1, t)l_2^0)^2 + (x_{14}(1, t)l_1^0 + x_{24}(1, t)l_2^0)^2}.$$

Решением этой задачи будет

$$l_1^0 = -0.781, l_2^0 = -0.625, \varepsilon(l^0) = 4.287.$$

Подставляя вектор l^0 в (7), находим оптимальное начальное положение фазового вектора

$$x_1^0 = 0.101, x_2^0 = 0.202, x_3^0 = 0.057, x_4^0 = 0.123. \quad (8)$$

Оптимальная программная стратегия задается формулой

$$U^0(t) = \begin{pmatrix} -\frac{x_{13}(1, t)l_1^0 + x_{23}(1, t)l_2^0}{E(t, l_1^0, l_2^0)} \\ -\frac{x_{14}(1, t)l_1^0 + x_{24}(1, t)l_2^0}{E(t, l_1^0, l_2^0)} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Оптимальный закон движения объекта определяется путем интегрирования основной системы дифференциальных уравнений с начальными условиями (8), в которую подставлено оптимальное программное управление (9). Ниже на **рис. 16** приводятся графики изменения первых двух координат фазового вектора от времени

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

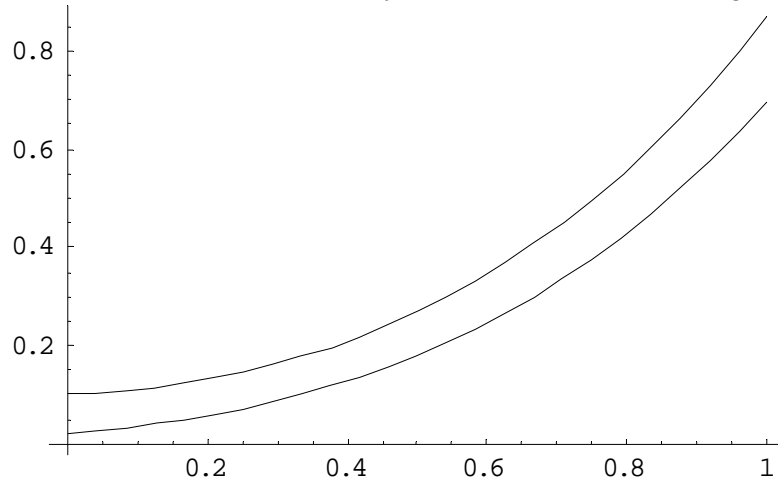


Рис. 16

Финальное значение проекции фазового вектора на первые две координаты и расстояние от нее до целевого множества задаются равенствами

$$\{x^0(1)\}_2 = \begin{pmatrix} x_1^0(1) \\ x_2^0(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.872 \\ 0.697 \end{pmatrix}, \quad \rho(x^0(1), M) = 4.287 = \varepsilon(l^0) = \varepsilon^0.$$

Последнее равенство означает оптимальность найденного программного управления.

В примере 7 значение функционала на оптимальном управлении было «хуже» и равнялось величине 4.596. Этот результат объясняется тем, что

начальная точка $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ из примера 7 принадлежит множеству S_0 данного

примера.

Пример 12*. В условиях предыдущего примера принимается, что

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in R^2 \mid |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1 \right\}.$$

Тогда вектор функция \hat{U} определяется формулой

$$\hat{U}(t, l_1, l_2) = \begin{pmatrix} -\text{sign}[x_{13}(1, \tau)l_1 + x_{23}(1, \tau)l_2] \\ -\text{sign}[x_{14}(1, \tau)l_1 + x_{24}(1, \tau)l_2] \end{pmatrix}, \quad (10)$$

а задача математического программирования (6) здесь принимает вид

$$\varepsilon(l) = -1 - (5l_1 + 4l_2) - \Xi(l_1, l_2) -$$

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

$$-\int_0^1 \left[|x_{13}(1, \tau)l_1 + x_{23}(1, \tau)l_2| + |x_{14}(1, \tau)l_1 + x_{24}(1, \tau)l_2| \right] d\tau \rightarrow \max, \quad \|l\| = 1.$$

Решением этой задачи будут числа

$$l_1^0 = -0.794, l_2^0 = -0.608, \varepsilon(l^0) = 3.973.$$

Подставляя вектор l^0 в (7), находим оптимальное начальное положение фазового вектора

$$x_1^0 = 0.103, \quad x_2^0 = 0.197, \quad x_3^0 = 0.057, \quad x_4^0 = 0.121. \quad (11)$$

Оптимальная программная стратегия задается формулой

$$U^0(t) = \begin{pmatrix} -\text{sign} [x_{13}(1, \tau)l_1^0 + x_{23}(1, \tau)l_2^0] \\ -\text{sign} [x_{14}(1, \tau)l_1^0 + x_{24}(1, \tau)l_2^0] \end{pmatrix}, t \in [0, 1]. \quad (12)$$

Из графиков компонент вектора оптимального управления, представленных на рис. 17,

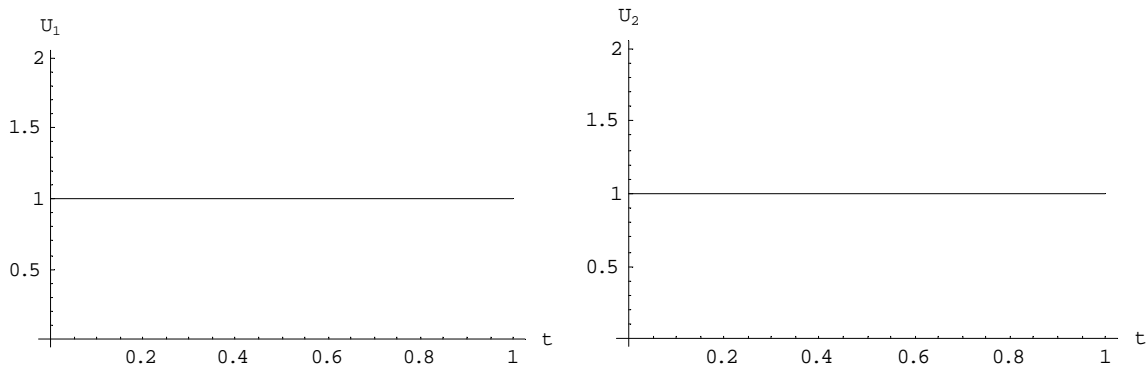


Рис. 17.

видно, что оптимальное управление постоянно на всем промежутке времени $[0, 1]$. Оптимальный закон движения объекта определяется путем интегрирования основной системы дифференциальных уравнений с начальными условиями (11), в которую подставлено оптимальное программное управление (12). Ниже приводятся графики изменения первых двух координат фазового вектора от времени.

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

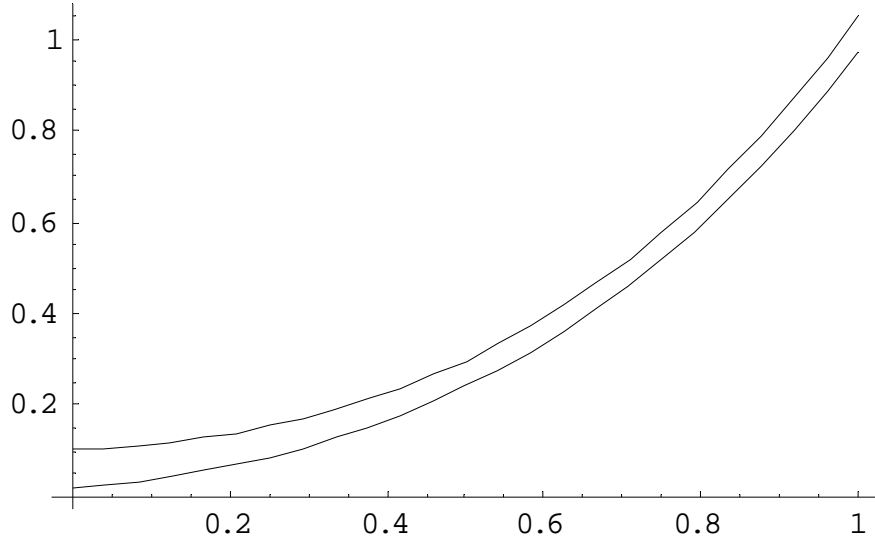


Рис. 18

Финальное значение проекции фазового вектора на первые две координаты и расстояние от нее до терминального множества задаются равенствами

$$\{x^0(1)\}_2 = \begin{pmatrix} x_1^0(1) \\ x_2^0(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.053 \\ 0.975 \end{pmatrix}, \quad \rho(x^0(1), M) = 3.973 = \varepsilon(l^0) = \varepsilon^0.$$

Последнее равенство означает оптимальность найденного программного управления.

Полученный результат лучше, чем в **примере 8** (4.282) и лучше, чем в **примере 11** (4.287). Это объясняется тем, что в первом случае точка x_0 из **примера 8** принадлежит множеству S_0 данного примера, а во втором случае тем, что множество P из **примера 11** вложено в множество P данного примера.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Найти ошибку в рассуждениях.

Рассмотрим управляемый динамический объект

$$\dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in P = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in R^2 \mid |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1 \right\},$$

$$\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t_0 = 0, \quad T = 1, \quad \Phi(x) = \sqrt{(x_1 - 0.25)^2 + (x_2 - 2)^2}.$$

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

Критерий качества Φ здесь имеет смысл расстояния от финального положения фазового вектора до точки M , положение которой задается вектором $\bar{r}_M = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 2 \end{pmatrix}$. Тогда оптимальное управление (одно из возможных) имеет вид

$$u^0(t) = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in [0, 1].$$

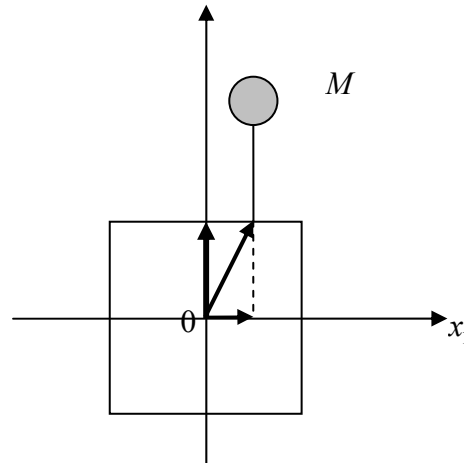


Рис. 19

Покажем, что управление $u^0(\cdot)$ не удовлетворяет условиям принципа максимума Л.С. Понтрягина. Действительно, выпишем функцию Л.С. Понтрягина

$$H(t, x, u, \psi) = \psi_1 u_1 + \psi_2 u_2.$$

Максимум этой функции достигается, когда

$$\hat{u}_1 = \text{sign}(\psi_1), \hat{u}_2 = \text{sign}(\psi_2).$$

Сопряженная система здесь записывается так:

$$\dot{\psi}_1 = 0, \dot{\psi}_2 = 0 \Rightarrow \psi_1^0(t) = c_1, \psi_2^0(t) = c_2.$$

Управления, подозрительные на оптимальность, удовлетворяют условию

$$\hat{u}_1 = \text{sign}(c_1) = \text{const}, \hat{u}_2 = \text{sign}(c_2) = \text{const}.$$

После подстановки управлений \hat{u}_1, \hat{u}_2 в основную систему дифференциальных уравнений получим

$$\dot{x}_1 = \text{sign}(c_1), \dot{x}_2 = \text{sign}(c_2).$$

Интегрируя основную систему, с учетом начальных условий находим

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

$$x_1^0(t) = \text{sign}(c_1)t, \quad x_2^0(t) = \text{sign}(c_2)t \Rightarrow x_1^0(1) = \text{sign}(c_1), \quad x_2^0(1) = \text{sign}(c_2).$$

Выпишем условия трансверсальности в конечный момент времени

$$\psi^0(1) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x^0(1)) \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \psi_1^0(1) \\ \psi_2^0(1) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{x_1^0(1) - 0.25}{\sqrt{(x_1^0(1) - 0.1)^2 + (x_2^0(1) - 2)^2}} \\ \frac{x_2^0(1) - 2}{\sqrt{(x_1^0(1) - 0.1)^2 + (x_2^0(1) - 2)^2}} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{\text{sign}(c_1) - 0.25}{\sqrt{(\text{sign}(c_1) - 0.1)^2 + (\text{sign}(c_2) - 2)^2}}, \\ c_2 = -\frac{\text{sign}(c_2) - 2}{\sqrt{(\text{sign}(c_1) - 0.1)^2 + (\text{sign}(c_2) - 2)^2}}. \end{cases}$$

Пусть c_1^0, c_2^0 - решение этой системы. Очевидно, что $c_1^0 \neq 0, c_2^0 \neq 0$. Тогда оптимальное управление должно привести управляемую точку в вершины квадрата. Управление $u^0(\cdot)$ этому условию не удовлетворяет.

2. Для линейных управляемых динамических систем, описанных в упражнениях **раздела 1** (дифференциальные уравнения движения, начальные условия, отрезок времени управления), решить задачу оптимального управления со следующими функционалами:

а) $\Phi(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{(x_1 + 8)^2 + (x_2 - 5)^2 + (x_3 - 9)^2}$,

б) $\Phi(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{(x_1 - 65)^2 + (x_2 - 65)^2 + (x_3 + 10)^2}$,

в) $\Phi(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{(x_1 - 40)^2 + (x_2 + 25)^2 + (x_3 + 12)^2}$,

г) $\Phi(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{(x_1 + 5)^2 + (x_2 + 4)^2 + (x_3 - 5)^2}$.

Рассмотреть два случая геометрических ограничений на вектор управляющих параметров

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

$$1) P = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \left| u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leq 1 \right. \right\}, \quad 2) P = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \left| |u_i| \leq 1, i = 1, 2, 3 \right. \right\}.$$

Убедиться, что результат управления во втором случае будет «лучше», чем в первом случае. Задачу оптимального управления следует решить двумя способами. Первый способ состоит в использовании необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Л.С. Понтрягина, второй способ – в форме прицеливания на опорный вектор к множеству области достижимости. Проверить выполнение достаточных условий оптимальности.

3. Решить приведенные выше задачи оптимального управления в предположении, что начальное положение фазового вектора не фиксировано. Считать, что

$$а) S_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix} \left| \sqrt{(x+8)^2 + (x-5)^2 + (x-9)^2} \leq 0.5 \right. \right\},$$

$$б) S_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix} \left| \sqrt{(x-65)^2 + (x-65)^2 + (x+10)^2} \leq 0.5 \right. \right\},$$

$$в) S_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix} \left| \sqrt{(x-40)^2 + (x+25)^2 + (x+12)^2} \leq 0.5 \right. \right\},$$

$$в) S_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix} \left| \sqrt{(x+5)^2 + (x+4)^2 + (x-5)^2} \leq 0.5 \right. \right\}.$$

3. ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРЕДЕЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

3.1. Постановка задачи линейного предельного быстрогодействия и существование ее решения. Линейную задачу теории оптимального управления назовем задачей линейного быстрогодействия, если:

- 1) минимизируемый функционал имеет форму Лагранжа с подынтегральной функцией $f_0 \equiv 1$;
- 2) начальный момент времени фиксирован $\theta_0 = \{t_0\}$;
- 3) конечный момент времени не фиксирован $\theta_1 \in \{T \mid T > t_0\}$;
- 4) левый и правый конец траектории закреплены $S_0 = \{x_0\}$, $S_1 = \{0\}$, $x_0 \neq 0$,
- 5) область изменения управляющих параметров $P \subset R^r$ выпукла.

Теорема 1 (Существование решения задачи линейного быстрогодействия.)

Пусть для некоторого момента времени $T^ > t_0$ выполнено включение*

$$0 \in G(t_0, x_0, T^*),$$

где $G(t_0, x_0, T)$, $T > t_0$ - область достижимости управляемого объекта. Тогда задача линейного быстрогодействия имеет решение.

Доказательство. По предположению теоремы

$$\Gamma = \{T > t_0 \mid 0 \in G(t_0, x_0, T)\} \neq \emptyset.$$

Обозначим $T^0 = \inf_{T \in \Gamma} T$. Достаточно показать, что

$$0 \in G(t_0, x_0, T^0). \quad (1)$$

Рассмотрим последовательность

$$\{T_k\} \rightarrow T^0, \quad T_k \in \Gamma, \quad k = 1, 2, \dots$$

Включение (1) следует из замкнутости области достижимости, непрерывной зависимости ее от T и включений

$$0 \in G(t_0, x_0, T_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Теорема доказана.

Момент времени T^0 будем называть оптимальным временем перехода.

3.2. Необходимые условия оптимальности программной стратегии.

Пусть выполнены условия **теоремы 1**. Полагаем

$$\varepsilon[T] = \max_{\|l\|=1} \left[\min_{q \in G(t_0, x_0, T)} \langle q, l \rangle \right] = \max_{\|l\|=1} F(l, T), \quad T \geq t_0, \quad (1)$$

$$L^0(T) = \left\{ l^0(T) \in S(0, 1) \mid F(l^0(T), T) = \max_{l \in S(0, 1)} F(l, T) \right\}, \quad T \geq t_0,$$

где

$$F(l, T) = \langle X[T, t_0]x_0, l \rangle + \int_{t_0}^T \min_{u \in P} \langle X[T, \tau]B(\tau)u, l \rangle d\tau + \int_{t_0}^T \langle X[t, \tau]C(\tau), l \rangle d\tau.$$

По **лемме 2.1** функция ε является непрерывной. Условие $\varepsilon[T] > 0$ будет необходимым и достаточным для того, чтобы $0 \notin G(t_0, x_0, T)$. Отсюда следует, что оптимальное время перехода T^0 совпадает с наименьшим из корней уравнения $\varepsilon[T] = 0$, лежащим правее начального момента времени t_0 .

Теорема 2 (необходимые условия оптимальности). Пусть T^0 - оптимальное время перехода и $U^0(\cdot)$ - программное управление, решающее задачу линейного быстрогодействия. Тогда

$$\langle B(t)U^0(t), X^{Tp}[T^0, t]l^0 \rangle = \min_{u \in P} \langle B(t)u, X^{Tp}[T^0, t]l^0 \rangle, \quad (2)$$

для всех $l^0 \in L^0(T^0)$ и при почти всех $t \in [t_0, T^0]$.

Доказательство. Допустим, что условие (2) нарушается. Тогда существует вектор $l^0 \in L^0(T)$ и множество $\tilde{T} \in [t_0, T^0]$ ненулевой меры, на котором выполняется неравенство

$$\langle B(t)U^0(t), X^{Tp}[T, t]l^0 \rangle > \min_{u \in P} \langle B(t)u, X^{Tp}[T, t]l^0 \rangle, \quad t \in \tilde{T}.$$

Следовательно,

$$\int_{t_0}^{T^0} \langle B(\tau)U^0(\tau), X^{Tp}[T^0, \tau]l^0 \rangle d\tau > \int_{t_0}^{T^0} \min_{u \in P} \langle B(\tau)u, X^{Tp}[T^0, \tau]l^0 \rangle d\tau. \quad (3)$$

Из равенства $x^0(T^0) = 0$ и условия (3) выводим

$$0 = \langle x^0(T^0), l^0 \rangle = \langle X[T^0, t_0]x_0, l^0 \rangle + \int_{t_0}^{T^0} \langle X[T^0, \tau]B(\tau)U^0(\tau), l^0 \rangle d\tau + \int_{t_0}^{T^0} \langle X[T^0, \tau]C(\tau), l^0 \rangle d\tau =$$

3. ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРЕДЕЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

$$\begin{aligned}
 &= \langle X[T^0, t_0]x_0, l^0 \rangle + \int_{t_0}^{T^0} \langle B(\tau)U^0(\tau), X^{Tp}[T^0, \tau]l^0 \rangle d\tau + \int_{t_0}^{T^0} \langle X[T^0, \tau]C(\tau), l^0 \rangle d\tau > \\
 &> \langle X[T^0, t_0]x_0, l^0 \rangle + \int_{t_0}^{T^0} \min_{u \in P} \langle B(\tau)u, X^{Tp}[T^0, \tau]l^0 \rangle d\tau + \int_{t_0}^{T^0} \langle X[T^0, \tau]C(\tau), l^0 \rangle d\tau >= \\
 &= \varepsilon(T^0) = 0.
 \end{aligned}$$

Получили противоречие, которое и доказывает справедливость теоремы.

Заметим, что условие (2) доказанной теоремы должно выполняться обязательно для всех векторов $l^0 \in L^0(T^0)$. Покажем это на примере.

Пример 1. Рассмотрим следующую задачу линейного быстрогодействия:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = u_2, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in P = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in R^2 \mid |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1 \right\}, \\
 \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_0 = 0, .
 \end{aligned}$$

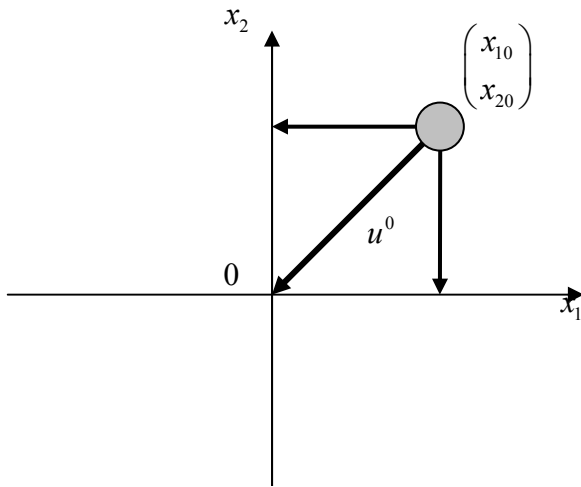


Рис. 1

Очевидно, что здесь оптимальное время перехода $T^0 = 1$, а оптимальное программное управление (см. рис. 1) имеет вид

$$U^0(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in [0, 1].$$

Проверим выполнение условий теоремы 2. Имеем

$$\begin{aligned}
 \varepsilon[T] &= \max_{\|l\|=1} \left[l_1 + l_2 + \int_0^T \min_{|u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1} (u_1 l_1 + u_2 l_2) d\tau \right] = \\
 &= \max_{\|l\|=1} [l_1 + l_2 - (|l_1| + |l_2|)T].
 \end{aligned}$$

Наименьшим корнем уравнения $\varepsilon[T] = 0$ является момент времени $T^0 = 1$. При этом

$$L^0(T^0) = \left\{ l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \mid \|l\| = 1, l_1 \geq 0, l_2 \geq 0 \right\}.$$

Условие (2) здесь принимает вид

3. ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРЕДЕЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

$$l_1^0 U_1^0(t) + l_2^0 U_2^0(t) = \min_{|u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1} (l_1^0 u_1 + l_2^0 u_2), t \in [0, 1], \quad (4)$$

Очевидно, что оптимальное управление U^0 удовлетворяет соотношению (4),

при всех векторах $\begin{pmatrix} l_1^0 \\ l_2^0 \end{pmatrix} \in L^0(T^0)$. Однако, для одного вектора $l^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in L^0(T^0)$

этому условию удовлетворяет, например, управление $U^*(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}, t \in [0, 1]$, которое заведомо не является оптимальным.

Приведем последовательность действий по решению задачи управления динамической системой на основе **теоремы 2**. По формуле (1) находим выражение для функции ε . Решаем уравнение $\varepsilon[T] = 0$. Наименьший корень $T^0 > t_0$, если таковой найдется, будет оптимальным временем перехода. Далее определяется множество $L^0(T^0)$, которое является не пустым в силу непрерывности функции F и компактности множества $S(0, 1)$. Для каждого вектора $l^0 \in L^0(T^0)$ по формуле (2) строится программное управление. По **теореме 2** среди построенных управлений обязательно содержится управление $U^0(\cdot)$, для которого выполняется равенство $x(t_0, x_0, U^0(\cdot), T^0) = 0$. Управление $U^0(\cdot)$ и будет оптимальным. Приведенный алгоритм будет эффективным, если множество $L^0(T^0)$ содержит ровно один элемент l^0 , а условие (2) определяет управление U^0 однозначно по существу.

Пример 2*. Рассмотрим следующую задачу линейного быстрогодействия

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u_2, \end{aligned}$$

$$u \in P = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in R^2 \mid u_1^2 + u_2^2 \leq 1 \right\},$$

$$t_0 = 0, x_{10} = 1, x_{20} = 1.$$

Фундаментальная матрица Коши здесь имеет вид

$$X[t, s] = \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix}.$$

Вычисляем

3. ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРЕДЕЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

$$\begin{aligned} \varepsilon[T] &= \\ &= \max_{\|l\|=1} \left[\left\langle \begin{pmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \right\rangle + \int_0^T \min_{u \in P} \left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(T-\tau) & -\sin(T-\tau) \\ \sin(T-\tau) & \cos(T-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \right\rangle d\tau \right] = \\ &= \max_{\|l\|=1} \left[l_1 (\cos T + \sin T) + l_2 (-\sin T + \cos T) - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^T \sqrt{(l_1 \cos(T-\tau) - l_2 \sin(T-\tau))^2 + (l_1 \sin(T-\tau) + l_2 \cos(T-\tau))^2} d\tau \right]. \end{aligned}$$

Минимум подынтегрального выражения достигается на векторе

$$\hat{U}(\tau, l, T) = - \begin{pmatrix} l_1 \cos(T-\tau) - l_2 \sin(T-\tau) \\ l_1 \sin(T-\tau) + l_2 \cos(T-\tau) \end{pmatrix} \in P, \tau \in [0, T].$$

Выражение для функции ε здесь принимает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon[T] &= \max_{\|l\|=1} \left[l_1 (\cos T + \sin T) + l_2 (-\sin T + \cos T) - T \right] = \\ &= \sqrt{(\cos T + \sin T)^2 + (-\sin T + \cos T)^2} - T = \sqrt{2} - T, \end{aligned}$$

где

$$L^0(T) = \{l^0(T)\}, \quad l^0(T) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos T + \sin T \\ -\sin T + \cos T \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\varepsilon^0[T] = 0 \Rightarrow T^0 = \sqrt{2}.$$

Вычисляем оптимальное управление

$$U^0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -(\cos \sqrt{2} + \sin \sqrt{2}) \cos(\sqrt{2} - t) + (-\sin \sqrt{2} + \cos \sqrt{2}) \sin(\sqrt{2} - t) \\ -(\cos \sqrt{2} + \sin \sqrt{2}) \sin(\sqrt{2} - t) - (-\sin \sqrt{2} + \cos \sqrt{2}) \cos(\sqrt{2} - t) \end{pmatrix}.$$

Подставляя его в дифференциальные уравнения движения и интегрируя последние с заданными начальными условиями, находим

$$x_1^0(t) = -\frac{1}{2}(-2 + \sqrt{2}t)(\cos t + \sin t), \quad x_2^0(t) = -\frac{1}{2}(-2 + \sqrt{2}t)(\cos t - \sin t).$$

Очевидно, что

$$x_1^0(\sqrt{2}) = x_2^0(\sqrt{2}) = 0.$$

Таким образом, построенное управление $U^0(t)$ является оптимальным.

Ниже на **рис. 2** приводится оптимальная траектория движения

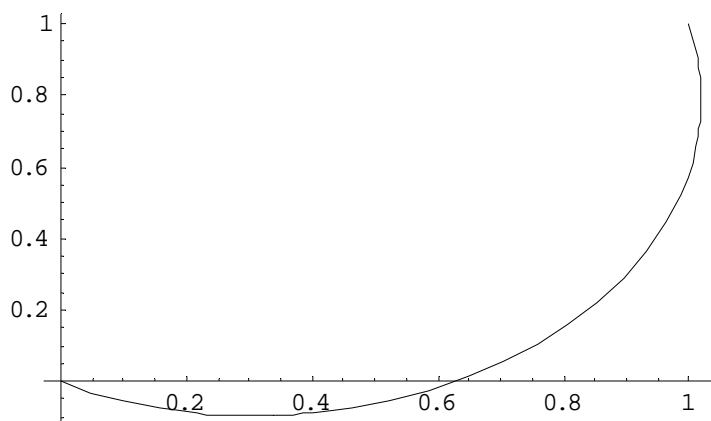


Рис. 2

Рассмотрим задачу линейного быстрогодействия для управляемого объекта, динамика которого описывается линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами.

Пример 3*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (\cos t)x_1 + tx_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{t+1}x_1 + (\sin t)x_2 + u_2, \end{aligned} \quad (5)$$

$$u \in P = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in R^2 \mid u_1^2 + u_2^2 \leq 3 \right\},$$

$$t_0 = 0, x_{10} = 1, x_{20} = 1.$$

Построим фундаментальную матрицу Коши для однородной системы дифференциальных уравнений и запишем выражение для функции ε . Имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon[T] &= \max_{\|l\|=1} \left[\left\langle \begin{pmatrix} x_{11}[T, 0] & x_{12}[T, 0] \\ x_{21}[T, 0] & x_{22}[T, 0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \right\rangle + \int_0^T \min_{u \in P} \left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{11}[T, \tau] & x_{12}[T, \tau] \\ x_{21}[T, \tau] & x_{22}[T, \tau] \end{pmatrix}^{Tp} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \right\rangle d\tau \right] = \\ &= \max_{\|l\|=1} \left[\left\langle \begin{pmatrix} x_{11}[T, 0] + x_{12}[T, 0] \\ x_{21}[T, 0] + x_{22}[T, 0] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \right\rangle + \int_0^T \min_{u \in P} \left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_1 x_{11}[T, \tau] + l_2 x_{21}[T, \tau] \\ l_1 x_{12}[T, \tau] + l_2 x_{22}[T, \tau] \end{pmatrix} \right\rangle d\tau \right] = \\ &= \max_{\|l\|=1} \left[(x_{11}[T, 0] + x_{12}[T, 0])l_1 + (x_{21}[T, 0] + x_{22}[T, 0])l_2 - \right. \\ &\quad \left. - 3 \cdot \int_0^T \sqrt{(l_1 x_{11}[T, \tau] + l_2 x_{21}[T, \tau])^2 + (l_1 x_{12}[T, \tau] + l_2 x_{22}[T, \tau])^2} d\tau \right]. \end{aligned}$$

Программная стратегия, удовлетворяющая необходимым условиям оптимальности, определяется по формуле

3. ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРЕДЕЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

$$U^0(t) = 3 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{x_{13}(T^0, t)l_1^0 + x_{23}(T^0, t)l_2^0}{E(t, l_1^0, l_2^0, T^0)} \\ -\frac{x_{14}(T^0, t)l_1^0 + x_{24}(T^0, t)l_2^0}{E(t, l_1^0, l_2^0, T^0)} \end{pmatrix}, \quad t \in [t_0, T^0], l^0 \in L^0(T^0), \quad (6)$$

где

$$E(t, l_1^0, l_2^0, T^0) = \sqrt{(x_{13}(T^0, t)l_1^0 + x_{23}(T^0, t)l_2^0)^2 + (x_{14}(T^0, t)l_1^0 + x_{24}(T^0, t)l_2^0)^2}.$$

В данном случае

$$T^0 = 0.662, \quad L^0(T^0) = \{l^0\}, \quad l^0 = \begin{pmatrix} 0.617752 \\ 0.786372 \end{pmatrix}.$$

Подставим управление (6) в дифференциальные уравнения (5) и проинтегрируем их с заданными начальными условиями. Непосредственно проверяется, что для полученного закона движения $x^0(t), t \in [0, T^0]$ выполняется

$$x^0(0.662) = \begin{pmatrix} -0.0000134271 \\ -0.0000148833 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, построенное управление $U^0(t)$ является оптимальным. Ниже на **рис. 3** приводится оптимальная траектория движения

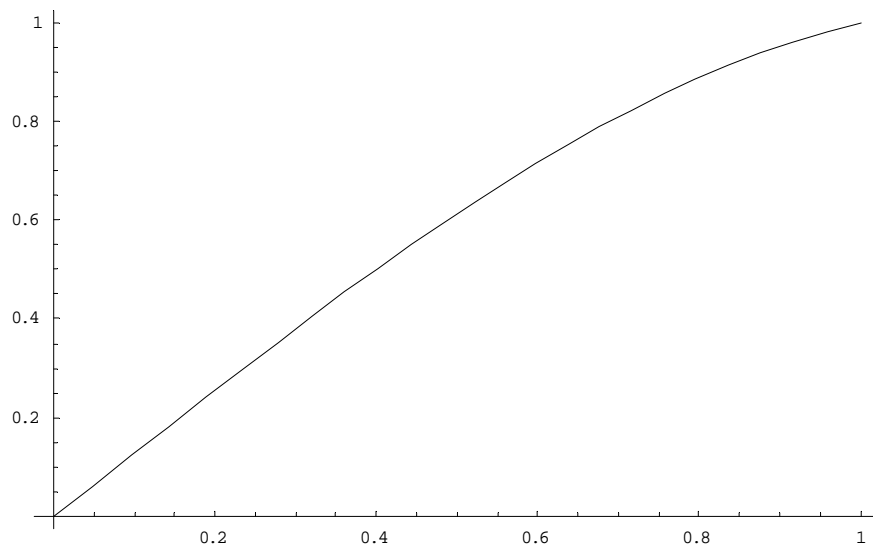


Рис. 3

Пример 4*.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + u_2 + u_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 3x_2 - x_3 + u_1 + u_3, \\ \dot{x}_3 &= -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + u_1 + u_2, \\ t_0 &= 0, x_{10} = 1, x_{20} = 1, x_{30} = 1.\end{aligned}$$

В данном примере матрицы A и B имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что собственными числами матрицы A являются действительные числа $-1, -2, -3$.

Построим фундаментальную матрицу Коши для однородной системы дифференциальных уравнений и запишем выражение для функции ε . Имеем

$$X[t, \tau] = \begin{pmatrix} e^{-3(T-\tau)}(2-4e^{T-\tau}+3e^{2(T-\tau)}) & -e^{-3(T-\tau)}(5-8e^{T-\tau}+3e^{2(T-\tau)}) & -e^{-3(T-\tau)}(1-4e^{T-\tau}+3e^{2(T-\tau)}) \\ e^{-2(T-\tau)}(-1+e^{T-\tau}) & -e^{-2(T-\tau)}(-2+e^{T-\tau}) & -e^{-2(T-\tau)}(-1+e^{T-\tau}) \\ e^{-3(T-\tau)}(2-3e^{T-\tau}+e^{2(T-\tau)}) & -e^{-3(T-\tau)}(5-6e^{T-\tau}+e^{2(T-\tau)}) & -e^{-3(T-\tau)}(1-3e^{T-\tau}+e^{2(T-\tau)}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon[T] &= \max_{\|l\|=1} \left[m(l_1, l_2, l_3, T) + \sum_{i=1}^3 \int_0^T \min_{|u_i| \leq 1} k_i(l_1, l_2, l_3, T, \tau) u_i d\tau \right] = \\ &= \max_{\|l\|=1} \left[m(l_1, l_2, l_3, T) + \sum_{i=1}^3 \int_0^T |k_i(l_1, l_2, l_3, T, \tau)| d\tau \right],\end{aligned}$$

где

$$m(l_1, l_2, l_3, T) = (-4e^{-3T} + 8e^{-2T} - 3e^{-T})l_1 + (2e^{-2T} - e^{-T})l_2 + (-4e^{-3T} + 6e^{-2T} - e^{-T})l_3,$$

$$k_1(l_1, l_2, l_3, T, \tau) = -6e^{-3(T-\tau)}(l_1 + l_3) - 2e^{-2(T-\tau)}(3l_1 + l_2 + l_3) + 3e^{-2(T-\tau)}(4l_1 + l_2 + 3l_3),$$

$$k_2(l_1, l_2, l_3, T, \tau) = e^{-3(T-\tau)}(l_1 + l_3),$$

$$k_3(l_1, l_2, l_3, T, \tau) = -3e^{-3(T-\tau)}(l_1 + l_3) + e^{-2(T-\tau)}(4l_1 + l_2 + 3l_3).$$

Программная стратегия, удовлетворяющая необходимым условиям оптимальности, определяется по формуле

$$U_i^0(t) = \text{sign}(k_i(l_1^0, l_2^0, l_3^0, T^0, t)), t \in [0, T^0], i = 1, 2, 3.$$

В данном случае

3. ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРЕДЕЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

$$T^0 = 0.44738, L^0(T^0) = \{l^0\}, l^0 = \begin{pmatrix} 0.332184 \\ -0.705538 \\ 0.625998 \end{pmatrix}.$$

По теореме 2.4 каждая из компонент оптимального программного управления должна иметь не более трех переключений. Убедимся в этом, приведя графики их изменения на промежутке времени $[0, T^0]$.

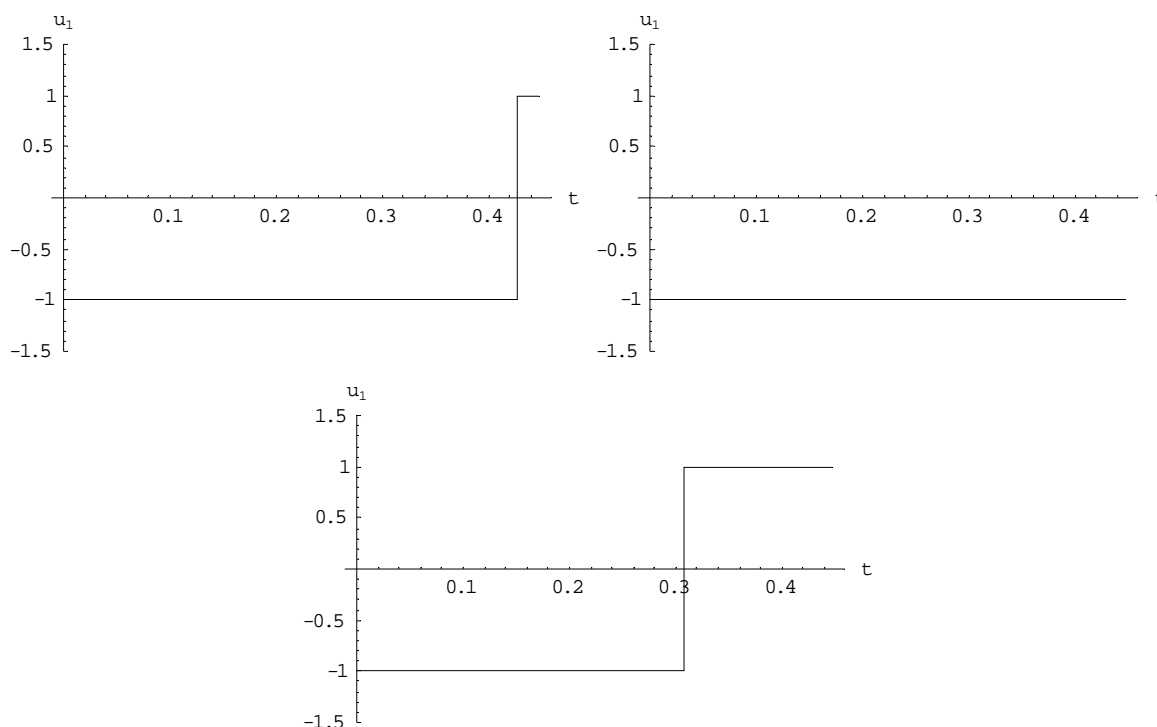


Рис. 4

На рис. 4 видно, что первая компонента оптимального программного управления переключается в момент времени $t_* = 0.426649$, третья компонента – в момент времени $t_{**} = 0.308253$, а вторая компонента остается все время постоянной.

Непосредственно проверяется, что для полученного закона движения $x^0(t), t \in [0, T^0]$ выполняется

$$x^0(0.44738) = \begin{pmatrix} -0.000568689 \\ -0.000411838 \\ -0.000184312 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРЕДЕЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Таким образом, построенное управление $U^0(t)$ является оптимальным.

Ниже на **рис. 5** приводится оптимальная траектория движения

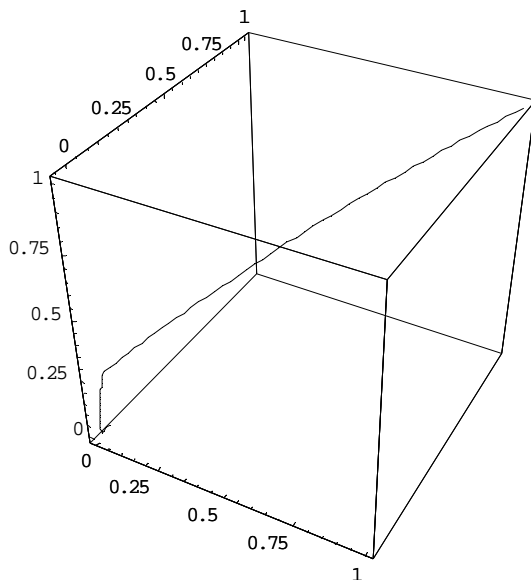


Рис. 5.

Упражнения для самостоятельной работы

Для линейных управляемых динамических систем

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + 4x_2 - 6x_3 + u_1,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + u_2,$$

а) $\dot{x}_3 = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + u_3,$

$$t_0 = 0, x_{10} = -1.43859,$$

$$x_{20} = 0.580455, x_{30} = 1.35472,$$

$$\dot{x}_1 = -2x_1 - 4x_2 - 60x_3 + u_1,$$

$$\dot{x}_2 = -4x_1 - x_2 - 51x_3 + u_2,$$

б) $\dot{x}_3 = 2x_1 - 2x_2 + x_3 + u_3,$

$$t_0 = 0, x_{10} = 3.84645,$$

$$x_{20} = 4.12477, x_{30} = -0.591971,$$

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + 4x_2 - 16x_3 + u_1,$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 + 21x_3 + u_2,$$

в) $\dot{x}_3 = -2x_1 - 2x_2 + x_3 + u_3,$

$$t_0 = 0, x_{10} = 15.3151,$$

$$x_{20} = -11.9799, x_{30} = 3.9094$$

$$\dot{x}_1 = -3x_1 - x_2 - 5x_3 + u_1,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 + u_2,$$

г) $\dot{x}_3 = x_1 + x_2 + 2x_3 + u_3,$

$$t_0 = 0, x_{10} = -1.56927,$$

$$x_{20} = -0.473713, x_{30} = 1.2287$$

решить задачу быстродействия. Рассмотреть два случая:

$$1) P = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in R^3 \mid u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \right\}, \quad 2) P = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in R^3 \mid |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1, |u_3| \leq 1 \right\}.$$

Показать, что оптимальное время перехода в первом случае больше, чем

во

втором.

Обосновать

этот

результат.

4. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КАК ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ

4.1. Сведение задачи теории оптимального управления к функциональной проблеме моментов. Рассмотрим задачу теории оптимального управления, в которой $\theta_0 = \{t_0\}$, $\theta_1 = \{T\}$, $S_0 = \{x_0\}$, $S_1 = \{x_T\}$, $P = R^r$, а минимизируемый функционал имеет вид

$$I[u(\cdot)] = \int_{t_0}^T f_0(u(\tau)) d\tau. \quad (1)$$

Класс программных стратегий отождествим с множеством $L_r^p[t_0, T]$ измеримых по Лебегу r -мерных вектор-функций $U: [t_0, T] \rightarrow R^r$, для которых функция $\|U(\cdot)\|^p$, $p \in [1, \infty)$ суммируема на $[t_0, T]$ в смысле Лебега.

Относительно минимизируемого функционала I дополнительно предположим:

1) для всех $U(\cdot) \in L_r^p[t_0, T]$ справедливо неравенство $I[U(\cdot)] \geq 0$, причем

$I[U(\cdot)] = 0$ тогда и только тогда, когда $U(t) = 0$ почти всюду на $[t_0, T]$;

2) для всех $U_1(\cdot), U_2(\cdot) \in L_r^p[t_0, T]$ справедливо неравенство

$$I[U_1(\cdot) + U_2(\cdot)] \leq I[U_1(\cdot)] + I[U_2(\cdot)];$$

3) для всех $U(\cdot) \in L_r^p[t_0, T]$, $\lambda \in R^1$ имеет место равенство

$$I[\lambda U(\cdot)] = |\lambda| I[U(\cdot)].$$

Условия 1)-3) позволяют истолковать функционал I как некоторую норму на функциональном пространстве $L_r^p[t_0, T]$.

Следуя [17], осуществим сведение задачи теории оптимального управления к функциональной проблеме моментов. Пусть $U(\cdot) \in L_r^p[t_0, T]$ – некоторое программное управление, переводящее фазовый вектор из положения x_0 в момент времени t_0 в положение x_T в момент времени T , и $x(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0, U(\cdot))$. Тогда с учетом $x(T) = x_T$ по формуле Коши получим

4. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
КАК ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ

$$x_T = X[T, t_0]x_0 + \int_{t_0}^T X[t, \tau]B(\tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_0}^T X[t, \tau]W(\tau)d\tau. \quad (2)$$

Введем обозначения

$$H[T, \tau] = X[T, \tau]B(\tau), \quad t, \tau \in [t_0, T],$$

$$c = x_T - X[T, t_0]x_0 - \int_{t_0}^T X[t, \tau]W(\tau)d\tau.$$

Определение 1. Матрицу $H[T, \tau], t, \tau \in [t_0, T]$ будем называть *переходной матрицей объекта*.

Условие (2) перепишем с учетом введенных обозначений

$$c = \int_{t_0}^T H[t, \tau]u(\tau)d\tau.$$

Пусть $h^{(i)}[t, \tau], t, \tau \in [t_0, T], i = 1, \dots, n$ – строки переходной матрицы. Тогда последнее равенство в координатной форме имеет вид

$$c_i = \int_{t_0}^T \left\langle \left(h^{(i)}[t, \tau] \right)^T, U(\tau) \right\rangle d\tau, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Вектор-функции $h^{[i]}(\cdot) = \left(h^{(i)}[T, \cdot] \right)^T, i = 1, \dots, n$ отождествим с элементами линейного функционального пространства $L_r^q[t_0, T]$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Такое предположение правомерно, так как функции $h^{[i]}(\cdot), i = 1, \dots, n$ непрерывны на $[t_0, T]$. В дальнейшем это пространство функций будем называть основным для рассматриваемой задачи оптимального управления. Обозначим его символом $\Omega[t_0, T]$.

На основании теоремы о представлении линейных функционалов на пространстве функций [16] можно установить взаимно однозначное соответствие между линейными функционалами φ , определенными на пространстве $\Omega[t_0, T]$ и программными управлениями $u(\cdot)$ формулой

$$\varphi_u[h(\cdot)] = \int_{t_0}^T \langle h(\tau), u(\tau) \rangle d\tau, \quad h(\cdot) \in \Omega[t_0, T]. \quad (4)$$

Формула (4) позволяет отождествить совокупность программных управлений с пространством $\Omega^*[t_0, T]$, сопряженным к основному пространству, т.е. с про-

пространством линейных функционалов, определенных на $\Omega[t_0, T]$. Превратим линейное пространство $\Omega[t_0, T]$ в нормированное, определив для каждого его элемента $h(\cdot) \in \Omega[t_0, T]$ норму

$$\|h(\cdot)\| = \sup_{u(\cdot) \in L^p[t_0, T]_{t_0}} \int_{t_0}^T \langle h(\tau), u(\tau) \rangle d\tau, \quad I[u(\cdot)] \leq 1. \quad (5)$$

В силу предположений 1)-3) формула (5) действительно определяет некоторую норму $\|\cdot\|$ на основном пространстве $\Omega[t_0, T]$ [16], при этом естественная норма $\|\cdot\|^*$ в сопряженном пространстве $\Omega^*[t_0, T]$ совпадает с функционалом $I[u(\cdot)]$. Таким образом, задача об оптимальном управлении свелась к следующей функциональной проблеме моментов.

Задача 1. Пусть $h^{[1]}, \dots, h^{[n]} \in H$, где H – линейное нормированное пространство и $c_1, \dots, c_n \in R^1$. Требуется найти линейный функционал $\varphi^0 \in H^*$, для которого

$$\varphi^0[h^{[i]}] = c_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

и такой, что среди всех других функционалов $\varphi \in H^*$, удовлетворяющих условию (6), он имел бы наименьшую норму $\|\cdot\|^*$.

Выведем необходимые и достаточные условия разрешимости задачи 1. Прежде всего, заметим, что если $c_1 = \dots = c_n = 0$, то решением проблемы моментов будет тривиальный функционал. Поэтому в дальнейшем этот случай рассматривать не будем. Полагаем

$$Q = \left\{ h = \sum_{i=1}^n l_i h^{[i]} \mid l_i \in R^1, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n l_i c_i = 1 \right\}.$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть $\varphi \in H^*$ линейный функционал, удовлетворяющий условию (6). Тогда

$$\varphi[h] = 1, \quad \forall h \in Q.$$

Доказательство. Для всех $h \in Q$ имеем

$$\varphi[h] = \varphi \left[\sum_{i=1}^n l_i h^{[i]} \right] = \sum_{i=1}^n l_i \varphi[h^{[i]}] = \sum_{i=1}^n l_i c_i = 1.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Существует элемент $h^0 \in Q$, удовлетворяющий условию

$$\|h^0\| = \min_{h \in Q} \|h\|. \quad (7)$$

Доказательство. Сначала предположим, что элементы $h^{[i]}, i=1, \dots, n$ линейного пространства H независимы, т. е., что для них равенство $\sum_{i=1}^n \alpha_i h^{[i]} = 0$ возможно лишь при нулевом наборе констант $\alpha_i \in R^1, i=1, \dots, n$.

В линейном пространстве H рассмотрим последовательность элементов

$$\{h_s\}, h_s = \sum_{i=1}^n l_{is} h^{[i]} \in H, \sum_{i=1}^n c_i l_{is} = 1, s=1, 2, \dots, \quad (8)$$

для которой $\lim_{s \rightarrow \infty} \|h_s\| = \inf_{h \in Q} \|h\|$. Заметим, что справедливо неравенство

$$0 \leq \inf_{h \in Q} \|h\| < +\infty. \quad (9)$$

Для каждого номера $s=1, 2, \dots$ обозначим

$$|l_s^{\max}| = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |l_{is}|.$$

Достаточно показать, что последовательность $\{|l_s^{\max}|\}$ ограничена. Допустим противное. Полагаем

$$l_{is}^* = \frac{l_{is}}{|l_s^{\max}|}, \quad i=1, \dots, n, \quad s=1, 2, \dots$$

Очевидно, что $|l_{is}^*| \leq 1, i=1, \dots, n$, и для всех номеров $s=1, 2, \dots$ среди чисел $l_{1s}^*, \dots, l_{ns}^*$

хотя бы одно является единицей. Тогда последовательность векторов $l_s^* = \begin{pmatrix} l_{1s}^* \\ \dots \\ l_{ns}^* \end{pmatrix}$

имеет предельную точку $l_0^* = \begin{pmatrix} l_{10}^* \\ \dots \\ l_{n0}^* \end{pmatrix} \neq 0$. В силу линейной независимости элемен-

тов $h^{[i]} \in H, i=1, \dots, n$, будет выполнено $\sum_{i=1}^n l_{i0}^* h^{[i]} \neq 0$. Каждый член последователь-

ности (8) можно представить в виде

$$h_s = |l_s^{\max}| \left(\sum_{i=1}^n l_{is}^* h^{[i]} \right), \quad s=1, 2, \dots.$$

Переходя к пределу в равенстве

$$\|h_s\| = |l_s^{\max}| \left\| \sum_{i=1}^n l_{is}^* h^{[i]} \right\|, \quad s = 1, 2, \dots$$

по подходящей подпоследовательности, получим противоречие с условием (9).

Случай, когда набор элементов $h^{[i]} \in H, i = 1, \dots, n$ не является независимым, сводится к предыдущему случаю путем замены в (8) зависимых элементов линейными комбинациями независимых элементов. Лемма доказана.

Определение 2. Элемент

$$h^0 = \sum_{i=1}^n l_i^0 h^{[i]},$$

удовлетворяющий условию (7), назовем «минимальным», а его норму обозначим символом ρ^0 .

Теорема 1 (необходимые условия разрешимости проблемы моментов). Пусть функционал $\varphi^0 \in H^*$ решает функциональную проблему моментов (задачу 1). Тогда

$$\rho^0 > 0 \text{ и } \|\varphi^0\| \geq \frac{1}{\rho^0}.$$

Доказательство. Предположим, что $\rho^0 = 0$. Тогда $h^0 = 0$. Последнее невозможно. Действительно, с одной стороны, из линейности функционала φ^0 вытекает, что $\varphi^0[h^0] = 0$, а, с другой стороны, в силу $h^0 \in Q$ и леммы 1 должно быть $\varphi^0[h^0] = 1$. Таким образом, $\rho^0 > 0$.

С учетом вложения $Q \subset H$ дадим оценку для величины $\|\varphi^0\|^*$. Имеем:

$$\|\varphi^0\|^* = \sup_{h \in H} \frac{|\varphi(h)|}{\|h\|} \geq \sup_{h \in Q} \frac{|\varphi(h)|}{\|h\|} = \sup_{h \in Q} \frac{1}{\|h\|} = \frac{1}{\inf_{h \in Q} \|h\|} = \frac{1}{\rho^0}.$$

Теорема доказана.

Обозначим через

$$\tilde{H} = \left\{ h = \sum_{i=1}^n l_i h^{[i]} \mid l_i \in R^1, i = 1, \dots, n, \right\}$$

подпространство пространства H . Заметим, что для произвольного $h \in \tilde{H}$ разложение

$$h = \sum_{i=1}^n l_i h^{[i]} \quad (10)$$

не всегда однозначно. Тем не менее, справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть $\rho^0 > 0$. Тогда для любого $h \in \tilde{H}$ величина $\sum_{i=1}^n l_i c_i$, где l_1, \dots, l_n – коэффициенты разложения (10), полностью определяется элементом $h \in H^*$ и не зависит от конкретного вида разложения (10).

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдется $h \in \tilde{H}$, для которого

$$h = \sum_{i=1}^n l_i' h^{[i]} = \sum_{i=1}^n l_i'' h^{[i]}, \quad \sum_{i=1}^n l_i' c_i \neq \sum_{i=1}^n l_i'' c_i. \quad (11)$$

Из условий (11) выводим, что

$$\sum_{i=1}^n (l_i' - l_i'') h^{[i]} = 0, \quad \sum_{i=1}^n (l_i' - l_i'') c_i \neq 0. \quad (12)$$

Первое равенство в (12) разделим на величину $\sum_{i=1}^n (l_i' - l_i'') c_i \neq 0$. Имеем

$$\sum_{i=1}^n \frac{(l_i' - l_i'')}{\sum_{j=1}^n (l_j' - l_j'') c_j} h^{[i]} = 0. \quad (13)$$

Обозначим

$$l_i = \frac{(l_i' - l_i'')}{\sum_{j=1}^n (l_j' - l_j'') c_j}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда $\sum_{i=1}^n l_i c_i = 1$ и равенство (13) запишется в виде

$$\sum_{i=1}^n l_i h^{[i]} = 0, \quad \sum_{i=1}^n l_i c_i = 1.$$

Последнее означает, что $0 \in Q$, а это противоречит условию $\rho^0 > 0$. Лемма доказана.

Теорема 2 (достаточные условия разрешимости проблемы моментов). Пусть $\rho^0 > 0$. Тогда проблема моментов имеет решение – функционал φ^0 . При этом

4. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
КАК ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ

$$\|\varphi^0\|^* = \frac{1}{\rho^0}.$$

Доказательство. Определим функционал $\tilde{\varphi} : \tilde{H} \rightarrow R^1$, положив

$$\tilde{\varphi}[h] = \sum_{i=1}^n l_i c_i, \quad h \in \tilde{H}. \quad (14)$$

Здесь $l_i, i=1, \dots, n$ – коэффициенты разложения (10). В силу леммы 3 функционал (14) определен однозначно. Кроме того, он линеен. Действительно, для всех $\alpha, \beta \in R^1$, $h, g \in \tilde{H}$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}[\alpha h + \beta g] &= \tilde{\varphi} \left[\alpha \sum_{i=1}^n l_i^{[h]} h^{[i]} + \beta \sum_{i=1}^n l_i^{[g]} h^{[i]} \right] = \tilde{\varphi} \left[\sum_{i=1}^n (\alpha l_i^{[h]} + \beta l_i^{[g]}) h^{[i]} \right] = \sum_{i=1}^n (\alpha l_i^{[h]} + \beta l_i^{[g]}) c_i = \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n l_i^{[h]} c_i + \beta \sum_{i=1}^n l_i^{[g]} c_i = \alpha \tilde{\varphi}[h] + \beta \tilde{\varphi}[g]. \end{aligned}$$

Выполнение равенств

$$\tilde{\varphi}[h^{[i]}] = \tilde{\varphi}[0 \cdot h^{[1]} + \dots + 1 \cdot h^{[i]} + \dots + 0 \cdot h^{[n]}] = c_i, \quad i=1, \dots, n.$$

для функционала $\tilde{\varphi}$ очевидно.

Обозначим

$$l = \begin{pmatrix} l_1 \\ \dots \\ l_n \end{pmatrix}, \quad L = \left\{ l \mid \sum_{i=1}^n l_i c_i = 1 \right\}$$

и вычислим норму функционала $\tilde{\varphi}$ как линейного функционала, определенного на линейном нормированном пространстве \tilde{H} . Имеем:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi}\|_{\tilde{H}}^* &= \sup_{l \in R^n} \frac{\tilde{\varphi}[h]}{\|h\|} = \sup_{l \in R^n} \frac{\left| \sum_{j=1}^n l_j c_j \right|}{\|h\|} = \sup_{l \in R^n} \frac{1}{\left\| \sum_{j=1}^n \frac{l_j}{\sum_{j=1}^n l_j c_j} h^{[j]} \right\|} = \frac{1}{\inf_{l \in R^n} \left\| \sum_{j=1}^n \frac{l_j}{\sum_{j=1}^n l_j c_j} h^{[j]} \right\|}} \\ &= \frac{1}{\inf_{l^* \in L} \left\| \sum_{i=1}^n l_i^* h^{[i]} \right\|}} = \frac{1}{\inf_{h \in Q} \|h\|}} = \frac{1}{\rho^0}. \end{aligned}$$

По следствию из теоремы Хана-Банаха [16] линейный функционал $\tilde{\varphi}$ может быть продолжен с подпространства \tilde{H} на все пространство H без увеличения его нормы. Обозначим это продолжение через φ^0 . Легко видеть, что для функционала φ^0 выполнены условия (б), а величина его нормы совпадает с нижней оценкой из теоремы 1 для нормы функционала, решающего задачу 1. Следовательно, функционал φ^0 является искомым. Теорема доказана.

Теорема 3 (принцип максимина). Пусть $\varphi^0 \in H^*$ – решение задачи 1, $h^0 \in Q$

– «минимальный» элемент и $G = \left\{ \varphi \in H^* \mid \|\varphi\|^* = \frac{1}{\rho^0} \right\}$. Тогда

$$\varphi^0(h^0) = \max_{\varphi \in G} \varphi[h^0].$$

Доказательство. Для всякого функционала $\varphi \in G$ справедливо

$$|\varphi(h^0)| \leq \|\varphi\|^* \|h^0\| = \frac{1}{\rho^0} \cdot \rho^0 = 1.$$

С другой стороны, в силу леммы 1 имеет место равенство $\varphi(h^0) = 1$. Теорема доказана.

Применим теоремы 1-3 к рассматриваемой линейной задаче теории оптимального управления. В результате получим следующее утверждение.

Теорема 4. Задача оптимального управления имеет решение тогда и только тогда, когда для r -мерной вектор-функции $h^0(\cdot)$, найденной из условия (7), где $\|\cdot\|$ определяется формулой (5), а

$$Q = \left\{ h(\cdot) = \sum_{i=1}^n l_i h^{[i]}(\cdot) \mid l \in L \right\},$$

справедливо неравенство $\|h^0\| = \rho^0 > 0$. При этом $I[u^0(\cdot)] = \frac{1}{\rho^0}$, и оптимальное

управление на минимальном элементе h^0 обладает свойством максимума

$$\int_{t_0}^T \langle h^0(\tau), u^0(\tau) \rangle d\tau = \max_{I[u(\cdot)] = \frac{1}{\rho^0}} \int_{t_0}^T \langle h^0(\tau), u(\tau) \rangle d\tau. \quad (15)$$

Опираясь на утверждение теоремы 4, сформулируем правило решения задачи об оптимальном управлении.

На первом этапе следует посредством формулы (5) ввести норму на линейном пространстве r -мерных функций $\Omega[t_0, T]$. На втором – строится «минимальный» элемент $h^0(\cdot)$ из условия (7), и на третьем – из условия (15) определяется оптимальное управление $u^0(\cdot)$.

4.2. Управляемость линейной динамической системы. Важной характеристикой динамической системы является ее управляемость.

Определение 3. *Линейная динамическая система*

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (1)$$

называется вполне управляемой на промежутке времени $[t_0, T]$, если для любых векторов $x_0, x_T \in R^n$ существует такое программное управление $u(\cdot)$, что для него выполняется равенство

$$x(\cdot, t_0, x_0, u(\cdot)) = x_T.$$

Относительно системы (1) дополнительно предположим, что элементы матриц $A(t)$ и $B(t)$ непрерывно дифференцируемы не менее чем $n-1$ раз по переменной t на промежутке времени $[t_0, T]$. Полагаем

$$L_1(t) = B(t), L_2(t) = A(t)L_1(t) - \frac{d}{dt}L_1(t), \dots, L_n(t) = A(t)L_{n-1}(t) - \frac{d}{dt}L_{n-1}(t).$$

Сконструируем матрицу

$$K(t) = (L_1(t), \dots, L_n(t))$$

размера $n \times (r \cdot n)$.

Теорема 5. Пусть существует момент времени $t_* \in [t_0, T]$ такой, что $\text{rang}[K(t_*)] = n$. Тогда система (1) вполне управляема на промежутке времени $[t_0, T]$.

Доказательство. Достаточно установить, что для всех $c \in R^n, c \neq 0$ справедливо неравенство

$$\rho^0(c) = \|h^0(c, \cdot)\| = \min_{\sum_{i=1}^n l_i c_i = 1} \left\| \sum_{i=1}^n l_i h^{[i]}(\cdot) \right\| = \min_{\sum_{i=1}^n l_i c_i = 1} \left\| (X[T, \cdot]B(\cdot))^T l \right\| =$$

независимых столбцов матрицы $K(t_*)$. Последнее невозможно. Следовательно, $\rho^0(c^*) \neq 0$. Теорема доказана.

Пример 1. Покажем, что динамическая система из примера 2.7.

$$\dot{x}_1 = x_3,$$

$$\dot{x}_2 = x_4,$$

$$\dot{x}_3 = (\cos t)x_3 + tx_4 + u_1,$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{t+1}x_3 + (\sin t)x_4 + u_2$$

является вполне управляемой. Действительно, достаточно установить линейную независимость первых четырех столбцов матрицы $K(t)$. Последовательно находим

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cos t & t \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+t} & \sin t \end{pmatrix}, \quad L_1(t) = B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2(t) = A(t)L_1(t) - \frac{d}{dt}L_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \cos t & t \\ \frac{1}{1+t} & \sin t \end{pmatrix},$$

$$K(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cos t & t \\ 0 & 1 & \frac{1}{1+t} & \sin t \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы $K(t)$. Имеем

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cos t & t \\ 0 & 1 & \frac{1}{1+t} & \sin t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & \sin t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Таким образом, ранг матрицы $K(t)$ равен четырем при всех $t \in [0,1]$ и рассматриваемая динамическая система является вполне управляемой.

В частности, пусть $A = \text{const}$, $B = \text{const}$. Тогда $K = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ и проверка полной управляемости системы (1) сводится к доказательству равенства $\text{rang}[K] = n$.

Пример 2. Покажем, что динамическая система из примера 2.3.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 + 2x_2 - 30x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= 10x_1 - x_2 - 35x_3 + u_2, \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 - x_2 + x_3 + u_3,\end{aligned}$$

является вполне управляемой. Действительно, достаточно установить линейную независимость первых трех столбцов матрицы K . В силу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

этот факт очевиден.

4.3. Управление по критерию «минимум энергии». Конкретизируем процедуру построения оптимального управления, описанную выше, для случая, когда минимизируемый функционал имеет вид

$$I[u(\cdot)] = \left[\int_{t_0}^T \langle u(\tau), u(\tau) \rangle d\tau \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Эта величина играет роль оценки количества энергии, затрачиваемой в процессе управления динамическим объектом. Нетрудно видеть, что функционал (1) удовлетворяет условиям 1)-3) предыдущего пункта.

Для реализации первого этапа процедуры построения оптимального управления необходимо решить следующую задачу:

$$\int_{t_0}^T \langle u(\tau), h(\tau) \rangle d\tau \rightarrow \max, \quad \int_{t_0}^T \langle u(\tau), u(\tau) \rangle d\tau = 1.$$

Эта задача является изопериметрической задачей вариационного исчисления. Ее решение записывается в виде

$$u_h(\cdot) = -\frac{1}{2\lambda} h(\cdot),$$

где постоянная $\lambda \in R^1$ вычисляется путем подстановки управления $u_h(\cdot)$ в уравнение связи. В результате вычислений получим

$$\lambda = -\frac{1}{2} \left[\int_{t_0}^T \langle h(\tau), h(\tau) \rangle d\tau \right]^{\frac{1}{2}}, \quad u_h(\cdot) = h(\cdot) \left[\int_{t_0}^T \langle h(\tau), h(\tau) \rangle d\tau \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

4. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
КАК ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ

Тогда норма на пространстве $\Omega[t_0, T]$ определяется формулой

$$\|h(\cdot)\| = \left[\int_{t_0}^T \langle u_h(\tau), u_h(\tau) \rangle d\tau \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{t_0}^T \langle h(\tau), h(\tau) \rangle d\tau \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Второй этап процедуры, состоящий в построении «минимального» элемента $h^0(\cdot)$, сводится к задаче математического программирования следующего вида:

$$\int_{t_0}^T \left\langle \sum_{i=1}^n l_i h^{[i]}(\tau), \sum_{i=1}^n l_i h^{[i]}(\tau) \right\rangle d\tau = \sum_{i,j=1}^n \left[\int_{t_0}^T \langle h^{[i]}(\tau), h^{[j]}(\tau) \rangle d\tau \right] l_i l_j \rightarrow \min, \quad l \in L.$$

Или по-другому:

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} l_i l_j \rightarrow \min, \quad \sum_{i=1}^n c_i l_i = 1,$$

где

$$\alpha_{ij} = \int_{t_0}^T \langle h^{[i]}(\tau), h^{[j]}(\tau) \rangle d\tau, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Пусть вектор $l^0 = \begin{pmatrix} l_1^0 \\ \dots \\ l_n^0 \end{pmatrix}$ – решение этой задачи. Тогда «минимальный» элемент

вычисляется по формуле

$$h^0(\cdot) = \sum_{i=1}^n l_i^0 h^{[i]}(\cdot).$$

Заключительный третий этап построения оптимального управления снова сводится к решению изопериметрической задачи вариационного исчисления

$$\int_{t_0}^T \langle u(\tau), h^0(\tau) \rangle d\tau \rightarrow \max, \quad \int_{t_0}^T \langle u(\tau), u(\tau) \rangle d\tau = \frac{1}{(\rho^0)^2}.$$

Ее решением является вектор-функция

$$U^0(\cdot) = -\frac{1}{2\mu} h^0(\cdot), \quad \mu \in R^1,$$

где

$$\mu = -\frac{1}{2} \left[\int_{t_0}^T \langle h^0(\tau), h^0(\tau) \rangle d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \rho^0 = -\frac{1}{2} (\rho^0)^2.$$

4. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
КАК ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ

Таким образом, оптимальное управление, решающее задачу теории оптимального управления, имеет вид

$$U^0(\cdot) = \frac{1}{(\rho^0)^2} h^0(\cdot) = \frac{1}{(\rho^0)^2} \sum_{i=1}^n l_i^0 h^{[i]}(\tau) = \sum_{i=1}^n v_i^0 h^{[i]}(\tau), \quad (3)$$

где $v_i^0 = \frac{l_i^0}{(\rho^0)^2}$, $i = 1, \dots, n$. Очевидно, что

$$I[U^0(\cdot)] = \left[\int_{t_0}^T \langle U^0(\tau), u^0(\tau) \rangle d\tau \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\rho_0}.$$

Воспользовавшись соотношениями (3), укажем другой способ формирования оптимального управления, который быстрее и проще приводит к цели. Подставив выражение (3) в равенство (1.3), получим

$$c_i = \int_{t_0}^T \left\langle h^{[i]}(\tau), \sum_{j=1}^n v_j^0 h^{[j]}(\tau) \right\rangle d\tau = \sum_{j=1}^n v_j^0 \int_{t_0}^T \langle h^{[i]}(\tau), h^{[j]}(\tau) \rangle d\tau = \sum_{j=1}^n v_j^0 \alpha_{ij}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Таким образом, решение задачи об оптимальном управлении можно начинать непосредственно с решения системы линейных алгебраических уравнений (4), а оптимальное программное управление вычислять по формуле (3).

Итак, оптимальное управление для случая минимизации «энергии» единственно, непрерывно в каждой точке интервала $[t_0, T]$, пропорционально «минимальному» элементу $h^0(\cdot)$ и зависит линейно от краевых условий.

Пример 3*. Рассмотрим линейный управляемый динамический объект

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + 2x_2 - 30x_3 + u_1,$$

$$\dot{x}_2 = 10x_1 - x_2 - 35x_3 + u_2,$$

$$\dot{x}_3 = 2x_1 - x_2 + x_3 + u_3,$$

$$t_0 = 0, T = 1;$$

$$x_{10} = -3, x_{20} = 2, x_{30} = 1; \quad x_{T1} = -80.7746, x_{T2} = -147.179, x_{T3} = -8.94415;$$

$$I[U(\cdot)] = \left[\int_0^1 (u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau) + u_3^2(\tau)) d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \rightarrow \min. \quad (5)$$

В рассматриваемом примере дифференциальные уравнения движения динамического объекта и начальное положение фазового вектора взяты из **примера 2.3**. Конечное положение фазового вектора совпадает с той точкой фа-

зового пространства, в которую переводит в конечный момент времени фазовый вектор оптимальное управление из **примера 2.3**.

Последовательно вычисляем

$$X[t, \tau] = \begin{pmatrix} x_{11}[t, \tau] & x_{12}[t, \tau] & x_{13}[t, \tau] \\ x_{21}[t, \tau] & x_{22}[t, \tau] & x_{23}[t, \tau] \\ x_{31}[t, \tau] & x_{32}[t, \tau] & x_{33}[t, \tau] \end{pmatrix}, H[t, \tau] = X[t, \tau]B = X[t, \tau],$$

$$h^{[1]}(\tau) = \begin{pmatrix} x_{11}[1, \tau] \\ x_{12}[1, \tau] \\ x_{13}[1, \tau] \end{pmatrix}, h^{[2]}(\tau) = \begin{pmatrix} x_{21}[1, \tau] \\ x_{22}[1, \tau] \\ x_{23}[1, \tau] \end{pmatrix}, h^{[3]}(\tau) = \begin{pmatrix} x_{31}[1, \tau] \\ x_{32}[1, \tau] \\ x_{33}[1, \tau] \end{pmatrix}, \tau \in [0, 1],$$

$$\alpha_{ij} = \int_0^1 \langle h^{[i]}(\tau), h^{[j]}(\tau) \rangle d\tau, i, j = 1, 2, 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4770.34 & 8405.45 & 469.812 \\ 8405.45 & 14824.4 & 832.786 \\ 469.812 & 832.786 & 48.3062 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{T1} \\ x_{T2} \\ x_{T3} \end{pmatrix} - X[1, 0] \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -67.4743 \\ -115.885 \\ -5.34546 \end{pmatrix}.$$

Запишем систему линейных алгебраических уравнений (4)

$$\begin{aligned} \alpha_{11}v_1 + \alpha_{12}v_2 + \alpha_{13}v_3 &= c_1, \\ \alpha_{21}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \alpha_{23}v_3 &= c_2, \\ \alpha_{31}v_1 + \alpha_{32}v_2 + \alpha_{33}v_3 &= c_3 \end{aligned}$$

Ее решением будут числа

$$v_1^0 = 0.0682083, v_2^0 = -0.0954224, v_3^0 = 0.871024.$$

Тогда оптимальное управление определяется по следующей формуле:

$$U^0(t) = v_1^0 h^{[1]}(\tau) + v_2^0 h^{[2]}(\tau) + v_3^0 h^{[3]}(\tau), t \in [0, 1].$$

Вычислим функционал (5) на оптимальном управлении

$$I[U^0(\cdot)] = \left[\int_0^1 \langle U^0(\tau), U^0(\tau) \rangle d\tau \right]^{\frac{1}{2}} = 1.34153.$$

Заметим, что для оптимального управления из **примера 2.3** функционал (5) принимает значение $\sqrt{3} = 1.73205 > 1.34153$. Такой результат является естественным, поскольку оптимальное управление в **примере 2.3** определялось из условия минимума другого критерия, а не функционала (5).

Проверим проведенные вычисления. Покажем, что полученное управление переводит фазовый вектор из положения x_0 в положение x_T за время $[0,1]$. Действительно проинтегрируем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 + 2x_2 - 30x_3 + U_1^0(t), \\ \dot{x}_2 &= 10x_1 - x_2 - 35x_3 + U_2^0(t), \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 - x_2 + x_3 + U_3^0(t)\end{aligned}$$

с начальными условиями $x_{10} = -3, x_{20} = 2, x_{30} = 1$. В результате получим

$$x^0(1) - x_T = \begin{pmatrix} 0.000303 \\ 0.000484 \\ 0.000011 \end{pmatrix} \approx 0.$$

Пример 4*. Дифференциальные уравнения движения динамического объекта имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= (\cos t)x_3 + tx_4 + u_1, \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{t+1}x_3 + (\sin t)x_4 + u_2, \\ t_0 &= 0, T = 1,\end{aligned}$$

$$x_{10} = x_{20} = x_{30} = x_{40} = 0, \quad x_{T1} = 0.640532, x_{T2} = 0.491302, x_{T3} = 1.61672, x_{T4} = 1.31002,$$

$$I[U(\cdot)] = \left[\int_0^1 (u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau)) \right]^{\frac{1}{2}} \rightarrow \min. \quad (6)$$

В рассматриваемом примере дифференциальные уравнения движения динамического объекта и начальное положение фазового вектора взяты из **примера 2.7**. Конечное же положение фазового вектора совпадает с той точкой фазового пространства, в которую переводит в конечный момент времени фазовый вектор оптимальное управление из **примера 2**.

Последовательно вычисляем

4. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
КАК ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ

$$X[t, \tau] = \begin{pmatrix} x_{11}[t, \tau] & x_{12}[t, \tau] & x_{13}[t, \tau] & x_{14}[t, \tau] \\ x_{21}[t, \tau] & x_{22}[t, \tau] & x_{23}[t, \tau] & x_{24}[t, \tau] \\ x_{31}[t, \tau] & x_{32}[t, \tau] & x_{33}[t, \tau] & x_{34}[t, \tau] \\ x_{41}[t, \tau] & x_{42}[t, \tau] & x_{43}[t, \tau] & x_{44}[t, \tau] \end{pmatrix}, \quad H[t, \tau] = X[t, \tau] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{13}[t, \tau] & x_{14}[t, \tau] \\ x_{23}[t, \tau] & x_{24}[t, \tau] \\ x_{33}[t, \tau] & x_{34}[t, \tau] \\ x_{43}[t, \tau] & x_{44}[t, \tau] \end{pmatrix}$$

$$h^{[1]}(\tau) = \begin{pmatrix} x_{13}[1, \tau] \\ x_{14}[1, \tau] \end{pmatrix}, \quad h^{[2]}(\tau) = \begin{pmatrix} x_{23}[1, \tau] \\ x_{24}[1, \tau] \end{pmatrix}, \quad h^{[3]}(\tau) = \begin{pmatrix} x_{33}[1, \tau] \\ x_{34}[1, \tau] \end{pmatrix}, \quad h^{[4]}(\tau) = \begin{pmatrix} x_{43}[1, \tau] \\ x_{44}[1, \tau] \end{pmatrix}, \quad \tau \in [0, 1],$$

$$\alpha_{ij} = \int_0^1 \langle h^{[i]}(\tau), h^{[j]}(\tau) \rangle d\tau, \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.766436 & 0.303602 & 1.51071 & 0.779061 \\ 0.303602 & 0.557218 & 0.764328 & 1.12012 \\ 1.51071 & 0.764328 & 3.3364 & 1.89574 \\ 0.779061 & 1.12012 & 1.89574 & 2.6037 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{T1} \\ x_{T2} \\ x_{T3} \\ x_{T4} \end{pmatrix} - X[1, 0] \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \\ x_{40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.640532 \\ 0.491302 \\ 1.61672 \\ 1.31002 \end{pmatrix}.$$

Запишем систему линейных алгебраических уравнений (4)

$$\begin{aligned} \alpha_{11}v_1 + \alpha_{12}v_2 + \alpha_{13}v_3 + \alpha_{14}v_4 &= c_1, \\ \alpha_{21}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \alpha_{23}v_3 + \alpha_{24}v_4 &= c_2, \\ \alpha_{31}v_1 + \alpha_{32}v_2 + \alpha_{33}v_3 + \alpha_{34}v_4 &= c_3, \\ \alpha_{41}v_1 + \alpha_{42}v_2 + \alpha_{43}v_3 + \alpha_{44}v_4 &= c_4. \end{aligned}$$

Ее решением будут числа

$$v_1^0 = -0.982227, \quad v_2^0 = -0.833006, \quad v_3^0 = 0.790821, \quad v_4^0 = 0.579604.$$

Тогда оптимальное управление определяется по следующей формуле:

$$U^0(t) = v_1^0 h^{[1]}(\tau) + v_2^0 h^{[2]}(\tau) + v_3^0 h^{[3]}(\tau) + v_4^0 h^{[4]}(\tau), \quad t \in [0, 1].$$

Вычислим функционал (5) на оптимальном управлении

$$I[U^0(\cdot)] = \left[\int_0^1 \langle U^0(\tau), U^0(\tau) \rangle d\tau \right]^{\frac{1}{2}} = 0.999712.$$

Заметим, что для оптимального управления из примера 2.7 функционал (6) принимает значение $1.0 > 0.999712$. Такой результат является естествен-

ным, поскольку оптимальное управление в **примере 2.7** определялось из условия минимума другого критерия, а не функционала (6).

Проверим проведенные вычисления. Покажем, что полученное управление $U^0(\cdot)$ переводит фазовый вектор из положения x_0 в положение x_T за время $[0,1]$. Действительно проинтегрируем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= (\cos t)x_3 + tx_4 + U_1^0(t), \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{t+1}x_3 + (\sin t)x_4 + U_2^0(t),\end{aligned}$$

с начальными условиями $x_{10} = x_{20} = x_{30} = x_{40} = 0$. В результате получим

$$x^0(1) - x_T = \begin{pmatrix} -1.68561 \\ -1.97809 \\ -1.6007 \\ -2.40392 \end{pmatrix} \times 10^{-6} \approx 0.$$

4.4. Управление по критерию «минимум силы». Конкретизируем процедуру построения оптимального управления, описанную выше, для случая, когда минимизируемый функционал имеет вид

$$I[u(\cdot)] = \operatorname{vrai\,max}_{\tau \in [t_0, T]} \|u(\tau)\| = \operatorname{vrai\,max}_{\tau \in [t_0, T]} \sqrt{\langle u(\tau), u(\tau) \rangle}. \quad (1)$$

В случае, когда вектор управляющих параметров представляет собой силу (обобщенную силу), функционал (1) оценивает наибольшее значение по модулю этой силы. Отсюда следует вынесенное в заголовок параграфа название рассматриваемого функционала. Нетрудно видеть, что функционал (1) удовлетворяет условиям 1)-3) пункта **4.2**.

Для реализации первого этапа процедуры построения оптимального управления необходимо решить следующую задачу:

$$\int_{t_0}^T \langle u(\tau), h(\tau) \rangle d\tau \rightarrow \max, \quad \operatorname{vrai\,max}_{\tau \in [t_0, T]} \sqrt{\langle u(\tau), u(\tau) \rangle} = 1. \quad (2)$$

Максимум интеграла в (2) достигается, когда подынтегральная функция принимает максимальное значение почти всюду на промежутке $[t_0, T]$. Макси-

4. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
КАК ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ

Максимальное значение этой функции можно получить, решив следующую задачу математического программирования:

$$\langle u, h \rangle \rightarrow \max, \quad \langle u, u \rangle = 1, \quad u, h \in R^s. \quad (3)$$

Максимальным значением целевой функции в (3) служит величина $\sqrt{\langle h, h \rangle}$. Тогда норма на пространстве $\Omega[t_0, T]$ определяется формулой

$$\|h(\cdot)\| = \int_{t_0}^T \sqrt{\langle h(\tau), h(\tau) \rangle} d\tau.$$

Второй этап процедуры – построение «минимального» элемента $h^0(\cdot)$ – сводится к задаче математического программирования следующего вида:

$$\int_{t_0}^T \sqrt{\left\langle \sum_{i=1}^n l_i h^{[i]}(\tau), \sum_{i=1}^n l_i h^{[i]}(\tau) \right\rangle} d\tau = \int_{t_0}^T \sum_{i,j=1}^n \sqrt{\langle h^{[i]}(\tau), h^{[j]}(\tau) \rangle} l_i l_j d\tau \rightarrow \min, \quad l \in L,$$

Пусть вектор $l^0 = \begin{pmatrix} l_1^0 \\ \dots \\ l_n^0 \end{pmatrix}$ – решение этой задачи. Тогда «минимальный» элемент и

его норма вычисляются по формулам

$$h^0(\cdot) = \sum_{i=1}^n l_i^0 h^{[i]}(\cdot), \quad \rho^0 = \int_{t_0}^T \sqrt{\langle h^0(\tau), h^0(\tau) \rangle} d\tau$$

соответственно.

Заключительный третий этап построения оптимального управления сводится к следующей задаче на максимум:

$$\int_{t_0}^T \langle u(\tau), h^0(\tau) \rangle d\tau \rightarrow \max, \quad \text{vrai max}_{\tau \in [t_0, T]} \sqrt{\langle u(\tau), u(\tau) \rangle} = \frac{1}{\rho^0}.$$

Ее решением является вектор-функция

$$u^0(\tau) = \frac{1}{\rho^0} \cdot \frac{h^0(\tau)}{\sqrt{\langle h^0(\tau), h^0(\tau) \rangle}}, \quad h^0(\tau) \neq 0, \quad \tau \in [t_0, T], \quad (4)$$

которая и будет оптимальным в смысле функционала (1) управлением. Очевидно, что

$$I[u^0(\cdot)] = \text{vrai max}_{\tau \in [t_0, T]} \sqrt{\langle u^0(\tau), u^0(\tau) \rangle} = \frac{1}{\rho^0}.$$

4. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
КАК ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ

Для сравнения заметим, что критерий качества (3.1) («минимум энергии»), вычисленный на программном управлении (4) принимает значение:

$$\int_{t_0}^T \sqrt{\left\langle \frac{1}{\rho^0} \cdot \frac{h^0(\tau)}{\sqrt{\langle h^0(\tau), h^0(\tau) \rangle}}, \frac{1}{\rho^0} \cdot \frac{h^0(\tau)}{\sqrt{\langle h^0(\tau), h^0(\tau) \rangle}} \right\rangle} d\tau = \frac{1}{\rho^0} \int_{t_0}^T \sqrt{\frac{\langle h^0(\tau), h^0(\tau) \rangle}{\langle h^0(\tau), h^0(\tau) \rangle}} d\tau = \frac{T-t_0}{\rho^0}. \quad (5)$$

Пример 5*. Рассмотрим линейный управляемый динамический объект из примера 4

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 + 2x_2 - 30x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= 10x_1 - x_2 - 35x_3 + u_2, \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 - x_2 + x_3 + u_3, \end{aligned}$$

$$t_0 = 0, T = 1;$$

$$x_{10} = -3, x_{20} = 2, x_{30} = 1; \quad x_{T1} = -80.7746, x_{T2} = -147.179, x_{T3} = -8.94415.$$

Поставим задачу управления этим объектом по критерию качества «минимум силы»

$$I[U(\cdot)] = \max_{\tau \in [0,1]} \sqrt{u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau) + u_3^2(\tau)} \rightarrow \min. \quad (6)$$

Для решения задачи управления последовательно вычисляем

$$X[t, \tau] = \begin{pmatrix} x_{11}[t, \tau] & x_{12}[t, \tau] & x_{13}[t, \tau] \\ x_{21}[t, \tau] & x_{22}[t, \tau] & x_{23}[t, \tau] \\ x_{31}[t, \tau] & x_{32}[t, \tau] & x_{33}[t, \tau] \end{pmatrix}, \quad H[t, \tau] = X[t, \tau]B = X[t, \tau],$$

$$h^{[1]}(\tau) = \begin{pmatrix} x_{11}[1, \tau] \\ x_{12}[1, \tau] \\ x_{13}[1, \tau] \end{pmatrix}, \quad h^{[2]}(\tau) = \begin{pmatrix} x_{21}[1, \tau] \\ x_{22}[1, \tau] \\ x_{23}[1, \tau] \end{pmatrix}, \quad h^{[3]}(\tau) = \begin{pmatrix} x_{31}[1, \tau] \\ x_{32}[1, \tau] \\ x_{33}[1, \tau] \end{pmatrix}, \quad \tau \in [0, 1],$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{T1} \\ x_{T2} \\ x_{T3} \end{pmatrix} - X[1, 0] \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -67.4743 \\ -115.885 \\ -5.34546 \end{pmatrix}.$$

Запишем задачу математического программирования по определению минимального элемента $h^0(\cdot) \in \Omega[0, 1]$. Имеем

$$\int_0^1 \sqrt{\langle l_1 h^{[1]}(\tau) + l_2 h^{[2]}(\tau) + l_3 h^{[3]}(\tau), l_1 h^{[1]}(\tau) + l_2 h^{[2]}(\tau) + l_3 h^{[3]}(\tau) \rangle} d\tau \rightarrow \min,$$

$$l_1 c_1 + l_2 c_2 + l_3 c_3 = 1 \Leftrightarrow l_1 = \frac{l_2 c_2 + l_3 c_3}{c_1}. \quad (7)$$

Эта задача эквивалентна следующей задаче на безусловный минимум

$$\int_0^1 \sqrt{\left\langle \frac{l_2 c_2 + l_3 c_3}{c_1} h^{[1]}(\tau) + l_2 h^{[2]}(\tau) + l_3 h^{[3]}(\tau), \frac{l_2 c_2 + l_3 c_3}{c_1} h^{[1]}(\tau) + l_2 h^{[2]}(\tau) + l_3 h^{[3]}(\tau) \right\rangle} d\tau \rightarrow \min$$

по переменным l_2 и l_3 . Ее решением будут числа

$$l_2^0 = -0.038468, l_3^0 = 0.28735.$$

Из равенства (б) находим

$$l_1^0 = -0.103653.$$

Тогда

$$h^0(t) = l_1^0 h^{[1]}[1, \tau] + l_2^0 h^{[2]}[1, \tau] + l_3^0 h^{[3]}[1, \tau], \quad t \in [0, 1],$$

$$\rho_0 = \int_0^1 \sqrt{\langle h^0(\tau), h^0(\tau) \rangle} d\tau = 0.731198.$$

Оптимальное управление определяется по формуле (4). При этом

$$I[U^0(\cdot)] = \frac{1}{\rho_0} = 1.36762.$$

На **рис. 1** приведен график изменения величины $\sqrt{u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau) + u_3^2(\tau)}$, $\tau \in [0, 1]$ для оптимального управления из **примера 3**

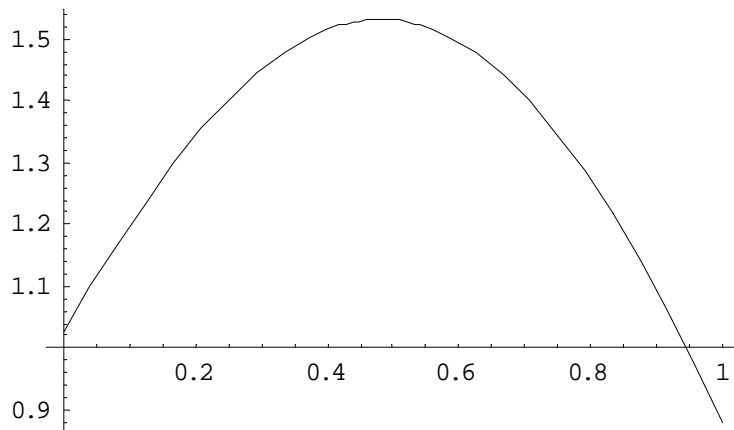


Рис. 1

Из него видно, что функционал (б) для этого управления принимает значение $1.53213 > 1.36762 = I[U^0(\cdot)]$. Такой результат является естественным, поскольку оптимальное управление в **примере 3** определялось для критерия «минимум энергии», а не «минимум силы». Обратно, из формулы (5) следует, что критерий «минимум энергии» на управлении $U^0(\cdot)$ принимает значение 1.36762. Этот

результат «хуже», чем величина 1.34153, которая была получена на оптимальном в смысле критерия «минимум энергии» управлении в примере 3.

Для проверки проведенных вычислений, покажем, что полученное управление $U^0(\cdot)$ переводит фазовый вектор из положения x_0 в положение x_T за время $[0,1]$. Действительно, проинтегрируем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 + 2x_2 - 30x_3 + U_1^0(t), \\ \dot{x}_2 &= 10x_1 - x_2 - 35x_3 + U_2^0(t), \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 - x_2 + x_3 + U_3^0(t)\end{aligned}$$

с начальными условиями $x_{10} = -3, x_{20} = 2, x_{30} = 1$. В результате получим

$$x^0(1) - x_T = \begin{pmatrix} 0.0000773993 \\ 0.000215504 \\ 0.0000639765 \end{pmatrix} \approx 0.$$

Пример 6*. Дифференциальные уравнения движения динамического объекта имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= (\cos t)x_3 + tx_4 + u_1, \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{t+1}x_3 + (\sin t)x_4 + u_2, \\ t_0 &= 0, T = 1,\end{aligned}$$

$$x_{10} = x_{20} = x_{30} = x_{40} = 0, \quad x_{T1} = 0.640532, x_{T2} = 0.491302, x_{T3} = 1.61672, x_{T4} = 1.31002.$$

Поставим задачу управления этим объектом по критерию качества «минимум силы»

$$I[U(\cdot)] = \max_{\tau \in [0,1]} \sqrt{u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau) + u_3^2(\tau) + u_4^2(\tau)} \rightarrow \min. \quad (8)$$

Для решения задачи управления последовательно вычисляем

$$X[t, \tau] = \begin{pmatrix} x_{11}[t, \tau] & x_{12}[t, \tau] & x_{13}[t, \tau] & x_{14}[t, \tau] \\ x_{21}[t, \tau] & x_{22}[t, \tau] & x_{23}[t, \tau] & x_{24}[t, \tau] \\ x_{31}[t, \tau] & x_{32}[t, \tau] & x_{33}[t, \tau] & x_{34}[t, \tau] \\ x_{41}[t, \tau] & x_{42}[t, \tau] & x_{43}[t, \tau] & x_{44}[t, \tau] \end{pmatrix}, \quad H[t, \tau] = X[t, \tau] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{13}[t, \tau] & x_{14}[t, \tau] \\ x_{23}[t, \tau] & x_{24}[t, \tau] \\ x_{33}[t, \tau] & x_{34}[t, \tau] \\ x_{43}[t, \tau] & x_{44}[t, \tau] \end{pmatrix}$$

4. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
КАК ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ

$$h^{[1]}(\tau) = \begin{pmatrix} x_{13}[1, \tau] \\ x_{14}[1, \tau] \end{pmatrix}, \quad h^{[2]}(\tau) = \begin{pmatrix} x_{23}[1, \tau] \\ x_{24}[1, \tau] \end{pmatrix}, \quad h^{[3]}(\tau) = \begin{pmatrix} x_{33}[1, \tau] \\ x_{34}[1, \tau] \end{pmatrix}, \quad h^{[4]}(\tau) = \begin{pmatrix} x_{43}[1, \tau] \\ x_{44}[1, \tau] \end{pmatrix}, \quad \tau \in [0, 1],$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{T1} \\ x_{T2} \\ x_{T3} \\ x_{T4} \end{pmatrix} - X[1, 0] \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \\ x_{40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.640532 \\ 0.491302 \\ 1.61672 \\ 1.31002 \end{pmatrix}.$$

Запишем задачу математического программирования по определению минимального элемента $h^0(\cdot) \in \Omega[0, 1]$. Имеем

$$\int_0^1 \sqrt{\langle l_1 h^{[1]}(\tau) + l_2 h^{[2]}(\tau) + l_3 h^{[3]}(\tau), l_1 h^{[1]}(\tau) + l_2 h^{[2]}(\tau) + l_3 h^{[3]}(\tau) + l_4 h^{[4]}(\tau) \rangle} d\tau \rightarrow \min,$$

$$l_1 c_1 + l_2 c_2 + l_3 c_3 + l_4 c_4 = 1 \Leftrightarrow l_1 = \frac{l_2 c_2 + l_3 c_3 + l_4 c_4}{c_1}. \quad (9)$$

Эта задача эквивалентна следующей задаче на безусловный минимум:

$$\int_0^1 \sqrt{\left\langle \frac{l_2 c_2 + l_3 c_3 + l_4 c_4}{c_1} h^{[1]}(\tau) + \sum_{i=2}^4 l_i h^{[i]}(\tau), \frac{l_2 c_2 + l_3 c_3 + l_4 c_4}{c_1} h^{[1]}(\tau) + \sum_{i=2}^4 l_i h^{[i]}(\tau) \right\rangle} d\tau \rightarrow \min$$

по переменным l_2, l_3 и l_4 . Ее решением будут числа

$$l_2^0 = 0.76217, \quad l_3^0 = 0.00721295, \quad l_4^0 = 0.947403.$$

Из равенства (9) находим

$$l_1^0 = 0.947403.$$

Тогда

$$h^0(t) = l_1^0 h^{[1]}[1, \tau] + l_2^0 h^{[2]}[1, \tau] + l_3^0 h^{[3]}[1, \tau] + l_4^0 h^{[4]}[1, \tau], \quad t \in [0, 1],$$

$$\rho_0 = \int_0^1 \sqrt{\langle h^0(\tau), h^0(\tau) \rangle} d\tau = 0.999996$$

Оптимальное управление определяется по формуле (4). При этом

$$I[U^0(\cdot)] = \frac{1}{\rho_0} = 1.00000$$

На рис. 2 приведен график изменения величины $\sqrt{u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau)}$, $\tau \in [0, 1]$ для оптимального управления из примера 4

4. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
КАК ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ

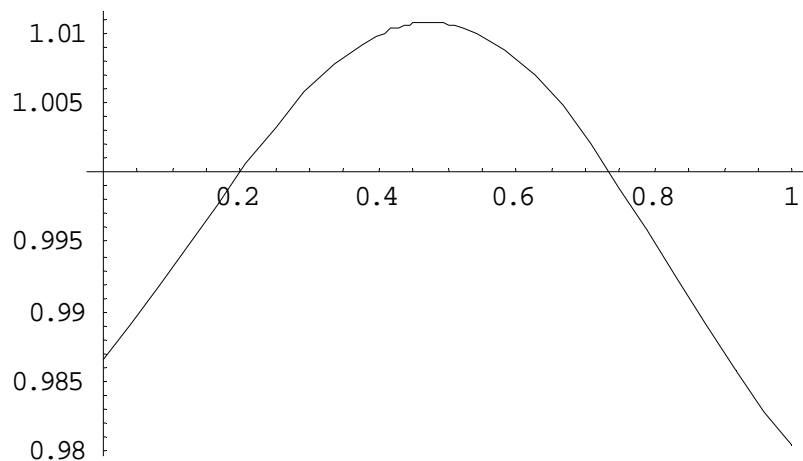


Рис. 2

Из него видно, что функционал (8) для этого управления принимает значение $1.01073 > 1.00000$. Такой результат является естественным, поскольку оптимальное управление в примере 4 определялось для критерия «минимум энергии», а не «минимум силы». Обратно, из формулы (5) следует, что критерий «минимум энергии» на управлении $U^0(\cdot)$ принимает значение 1.00000 . Этот результат «хуже», чем величина 0.999712 , которая была получена на оптимальном в смысле критерия «минимум энергии» управлении в примере 4.

Для проверки проведенных вычислений, покажем, что полученное управление $U^0(\cdot)$ переводит фазовый вектор из положения x_0 в положение x_T за время $[0,1]$. Действительно, проинтегрируем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= (\cos t)x_3 + tx_4 + U_1^0, \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{t+1}x_3 + (\sin t)x_4 + U_2^0\end{aligned}$$

с начальными условиями $x_{10} = x_{20} = x_{30} = x_{40} = 0$. В результате получим

$$x^0(1) - x_T = \begin{pmatrix} 0.0000221525 \\ -0.0000337122 \\ -0.000318149 \\ 0.000376441 \end{pmatrix} \approx 0.$$

Упражнения для самостоятельной работы

Для линейных управляемых динамических систем

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 + 4x_2 - 6x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 + 2x_3 + u_2, \\ \text{а) } \dot{x}_3 &= 2x_1 - x_2 + 3x_3 + u_3, \\ t_0 &= 0, T = 1, \\ x_{10} &= 0, x_{20} = 0, x_{30} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 - 4x_2 - 60x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= -4x_1 - x_2 - 51x_3 + u_2, \\ \text{б) } \dot{x}_3 &= 2x_1 - 2x_2 + x_3 + u_3, \\ t_0 &= 0, T = 1, \\ x_{10} &= 0, x_{20} = 0, x_{30} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 + 4x_2 - 16x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - x_2 + 21x_3 + u_2, \\ \text{в) } \dot{x}_3 &= -2x_1 - 2x_2 + x_3 + u_3, \\ t_0 &= 0, T = 1, \\ x_{10} &= 0, x_{20} = 0, x_{30} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 - x_2 - 5x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + u_2, \\ \text{г) } \dot{x}_3 &= x_1 + x_2 + 2x_3 + u_3, \\ t_0 &= 0, T = 1, \\ x_{10} &= 0, x_{20} = 0, x_{30} = 0. \end{aligned}$$

решить задачу оптимального управления по критерию «минимум энергии»

$$I[u(\cdot)] = \left[\int_0^1 \sum_{i=1}^3 u_i(\tau) d\tau \right]^{\frac{1}{2}}$$

и по критерию «минимум силы»

$$I[u(\cdot)] = \operatorname{vrai} \max_{\tau \in [t_0, T]} \int_0^1 \sqrt{\sum_{i=1}^3 u_i(\tau)} d\tau.$$

В каждом случае сравнить оптимальную величину функционала с его значением на управлении, найденном из условия оптимальности другого критерия.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пример 1.3.

Ввод правых частей дифференциальных уравнений

$$\{y_1, y_2, y_3, y_4\} =$$

$$\{y_3, y_4,$$

$$\frac{(2 * b * v_1 - 2 * b * c * y_4^2 * \sin[y_1 - y_2] - 2 * c * v_2 * \cos[y_1 - y_2] - c^2 * y_3^2 * \sin[2 * (y_1 - y_2)])}{(2 * (a * b - c^2 * \cos[y_1 - y_2]^2))},$$

$$\frac{(2 * a * v_2 + 2 * a * c * y_3^2 * \sin[y_1 - y_2] - 2 * c * v_1 * \cos[y_1 - y_2] + c^2 * y_4^2 * \sin[2 * (y_1 - y_2)])}{(2 * (a * b - c^2 * \cos[y_1 - y_2]^2))}\};$$

Вычисление матрицы A

$$A = \text{Transpose}[\{\partial_{y_1} \{y_1, y_2, y_3, y_4\},$$

$$\partial_{y_2} \{y_1, y_2, y_3, y_4\},$$

$$\partial_{y_3} \{y_1, y_2, y_3, y_4\},$$

$$\partial_{y_4} \{y_1, y_2, y_3, y_4\}\}];$$

$$\text{MatrixForm}[A] /.$$

$$\{y_1 \rightarrow 0, y_2 \rightarrow 0, y_3 \rightarrow 0, y_4 \rightarrow 0, v_1 \rightarrow 0,$$

$$v_2 \rightarrow 0\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычисление матрицы B

$$B = \text{Transpose}[\{\partial_{v_1} \{y_1, y_2, y_3, y_4\},$$

$$\partial_{v_2} \{y_1, y_2, y_3, y_4\}\}];$$

$$\text{MatrixForm}[B] /.$$

$$\{y_1 \rightarrow 0, y_2 \rightarrow 0, y_3 \rightarrow 0, y_4 \rightarrow 0, v_1 \rightarrow 0,$$

$$v_2 \rightarrow 0\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{b}{a b - c^2} & -\frac{c}{a b - c^2} \\ -\frac{c}{a b - c^2} & \frac{a}{a b - c^2} \end{pmatrix}$$

Пример 1.4.

Построение матрицы $X(t) = (x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), x^{(3)}(t))$ и ввод матрицы A

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{x}[t_]= \\
 & \left(\begin{array}{ccc} 2 * \text{Exp}[3 * t] & 7 * \text{Cos}[t] + \text{Sin}[t] & 3 * \text{Cos}[t] - \text{Sin}[t] \\ \text{Exp}[3 * t] & \text{Cos}[t] - 2 * \text{Sin}[t] & -\text{Sin}[t] \\ 0 & -10 * \text{Cos}[t] & -4 * \text{Cos}[t] + 2 * \text{Sin}[t] \end{array} \right); \\
 & \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix};
 \end{aligned}$$

Проверка того факта, что каждый столбец матрицы X является решением дифференциального уравнения

$$\text{simplify}[\mathbf{x}'[t] - \mathbf{A}.\mathbf{x}[t]]$$

$$\{\{0, 0, 0\}, \{0, 0, 0\}, \{0, 0, 0\}\}$$

Вычисление определителя матрицы $X(0)$

$$\text{Det}[\mathbf{x}[0]]$$

$$-10$$

Пример 1.5.

Построение Фундаментальной матрицы Коши

$$\mathbf{z}[t] = \left(\begin{array}{ccc} 2 * \text{Exp}[3 * t] & 7 * \text{Cos}[t] + \text{Sin}[t] & 3 * \text{Cos}[t] - \text{Sin}[t] \\ \text{Exp}[3 * t] & \text{Cos}[t] - 2 * \text{Sin}[t] & -\text{Sin}[t] \\ 0 & -10 * \text{Cos}[t] & -4 * \text{Cos}[t] + 2 * \text{Sin}[t] \end{array} \right);$$

$$\mathbf{x}[t_ , \tau_]= \text{simplify}[\mathbf{z}[t].(\text{Inverse}[\mathbf{z}[t]] /. t \rightarrow \tau)]$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left\{ \frac{1}{5} (4 e^{3t-3\tau} + \text{Cos}[t - \tau] - 7 \text{Sin}[t - \tau]), \right. \right. \\
 & \quad \frac{2}{5} (e^{3t-3\tau} - \text{Cos}[t - \tau] + 7 \text{Sin}[t - \tau]), \\
 & \quad \left. \frac{1}{5} (3 e^{3t-3\tau} - 3 \text{Cos}[t - \tau] - 4 \text{Sin}[t - \tau]) \right\}, \\
 & \left\{ \frac{1}{5} (2 e^{3t-3\tau} - 2 \text{Cos}[t - \tau] - \text{Sin}[t - \tau]), \right. \\
 & \quad \frac{1}{5} (e^{3t-3\tau} + 4 \text{Cos}[t - \tau] + 2 \text{Sin}[t - \tau]), \\
 & \quad \left. \frac{1}{10} (3 e^{3t-3\tau} - 3 \text{Cos}[t - \tau] + \text{Sin}[t - \tau]) \right\}, \\
 & \{2 \text{Sin}[t - \tau], -4 \text{Sin}[t - \tau], \text{Cos}[t - \tau] + \text{Sin}[t - \tau]\}.
 \end{aligned}$$

Проверка равенства (1)

`Simplify[MatrixForm[X[s, s]]]`

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверка равенства (2)

`Simplify[MatrixForm[Inverse[X[t, τ]] - X[τ, t]]]`

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Проверка равенства (3)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix};$ `Simplify[MatrixForm[∂t X[t, τ] - A.X[t, τ]]]`

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Проверка равенства (4)

`Simplify[MatrixForm[∂t X[t, τ] + X[t, τ].A]]`

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 1.7.

Определение движения на промежутке [0,1)

`u0[t_] = 1; Dv0 = DSolve[{x'[t] == u0[t], x[0] == 0}, x[t], t];`
`x0[t_] = x[t] /. Part[Dv0, 1, 1]`

t

Определение движения на промежутке [1,2)

`u1[t_] = t; Dv1 = DSolve[{x'[t] == u1[t], x[1] == x0[1]}, x[t], t];`
`x1[t_] = x[t] /. Part[Dv1, 1, 1]`

$$\frac{1}{2} (1 + t^2)$$

Определение движения на промежутке [2,3)


```
u2[t_] = -t; Dv2 = DSolve[{x'[t] == u2[t], x[2] == x1[2]}, x[t], t];
x2[t_] = x[t] /. Part[Dv2, 1, 1]
```

$$\frac{1}{2} (9 - t^2)$$

Определение движения на промежутке [3,4]

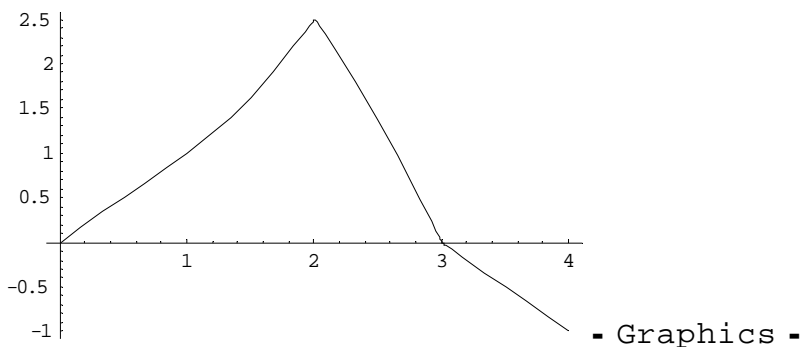
```
u3[t_] = -1; Dv3 = DSolve[{x'[t] == u3[t], x[3] == x2[3]}, x[t], t];
x3[t_] = x[t] /. Part[Dv3, 1, 1]
```

$$3 - t$$

Построение движения в целом на промежутке [0,4]

```
x[t_] := x0[t] /; t >= 0 & t < 1
x[t_] := x1[t] /; t >= 1 & t < 2
x[t_] := x2[t] /; t >= 2 & t < 3
x[t_] := x3[t] /; t >= 3
```

```
Plot[x[t], {t, 0, 4}]
```



Пример 1.8.

Ввод программного управления

```
{u1[t_], u2[t_]} = {t, 2 * t}
```

```
{t, 2 t}
```

Решение задачи Коши

```
DSolve[{x1'[t] == x2[t] + u1[t],
  x2'[t] == u2[t], x1[0] == 1, x2[0] == 1},
{x1[t], x2[t]}, t]
```

```
{ {x1[t] -> 1/6 (6 + 6 t + 3 t^2 + 2 t^3),
  x2[t] -> 1 + t^2} }
```

Ввод фундаментальной матрицы Коши и начального положения фазового вектора

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{x}[t, \tau_] = \begin{pmatrix} 1 & t - \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{u}[\tau] = \begin{pmatrix} u1[\tau] \\ u2[\tau] \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{x0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

{{1}, {1}}

Формула Коши

$$\mathbf{x}[t, 0] \cdot \mathbf{x0} + \int_0^t \mathbf{x}[t, \tau] \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}[\tau] \, d\tau$$

$$\left\{ \left\{ 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \right\}, \{1 + t^2\} \right\}$$

Пример 1.9.

Ввод программного управления

$$\mathbf{u}[t_] = \begin{pmatrix} \sin[t] \\ \cos[t] \\ t \end{pmatrix}$$

{{Sin[t]}, {Cos[t]}, {t}}

Ввод фундаментальной матрицы Коши и начального положения фазового вектора

$\mathbf{Z}[t] =$

$$\begin{pmatrix} 2 * \text{Exp}[3 * t] & 7 * \text{Cos}[t] + \text{Sin}[t] & 3 * \text{Cos}[t] - \text{Sin}[t] \\ \text{Exp}[3 * t] & \text{Cos}[t] - 2 * \text{Sin}[t] & -\text{Sin}[t] \\ 0 & -10 * \text{Cos}[t] & -4 * \text{Cos}[t] + 2 * \text{Sin}[t] \end{pmatrix};$$

$\mathbf{x}[t_, \tau_] = \text{Simplify}[\mathbf{Z}[t] \cdot (\text{Inverse}[\mathbf{Z}[t]] /. t \rightarrow \tau)];$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{x0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Формула Коши

$$\mathbf{x1}[t_] = \mathbf{x}[t, 0] \cdot \mathbf{x0} + \int_0^t \mathbf{x}[t, \tau] \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}[\tau] \, d\tau;$$

Проверка граничных условий на правом конце траектории

$$N[(\text{Part}[\text{Transpose}[x1[1]].x1[1], 1, 1])^{\frac{1}{2}}]$$

46.531

Вычисление функционала

49.7931

Пример 2.2.

Решение сопряженной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \text{Sopr} &= \text{DSolve}[\{\psi_1'[t] == \psi_2[t], \psi_2'[t] == -\psi_1[t]\}, \\ &\quad \{\psi_1[t], \psi_2[t]\}, t]; \\ \{\{\psi_1[t_]\}, \{\psi_2[t_]\}\} &= \{\psi_1[t] /. \text{Sopr}, \psi_2[t] /. \text{Sopr}\} \\ &\{\{C[1] \cos[t] + C[2] \sin[t]\}, \{C[2] \cos[t] - C[1] \sin[t]\}\} \end{aligned}$$

Решение основной системы дифференциальных уравнений с оптимальными управлениями

$$\begin{aligned} \text{Osn} &= \text{DSolve}\left[\left\{x_1'[t] == x_2[t] + \frac{\psi_1[t]}{\sqrt{\psi_1[t]^2 + \psi_2[t]^2}}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. x_2'[t] == -x_1[t] + \frac{\psi_2[t]}{\sqrt{\psi_1[t]^2 + \psi_2[t]^2}}\right\}, \right. \\ &\quad \left. \{x_1[t], x_2[t]\}, t\right]; \\ \{\{x_1[t_]\}, \{x_2[t_]\}\} &= \{x_1[t] /. \text{Osn}, x_2[t] /. \text{Osn}\} \\ &\left\{\left\{\frac{t C[1] \cos[t]}{\sqrt{C[1]^2 + C[2]^2}} + C[3] \cos[t] + \frac{t C[2] \sin[t]}{\sqrt{C[1]^2 + C[2]^2}} + C[4] \sin[t]\right\}, \right. \\ &\quad \left.\left\{\frac{t C[2] \cos[t]}{\sqrt{C[1]^2 + C[2]^2}} + C[4] \cos[t] - \frac{t C[1] \sin[t]}{\sqrt{C[1]^2 + C[2]^2}} - C[3] \sin[t]\right\}\right\} \end{aligned}$$

Решение нелинейной системы уравнений Относительно неизвестных

C_1, C_2

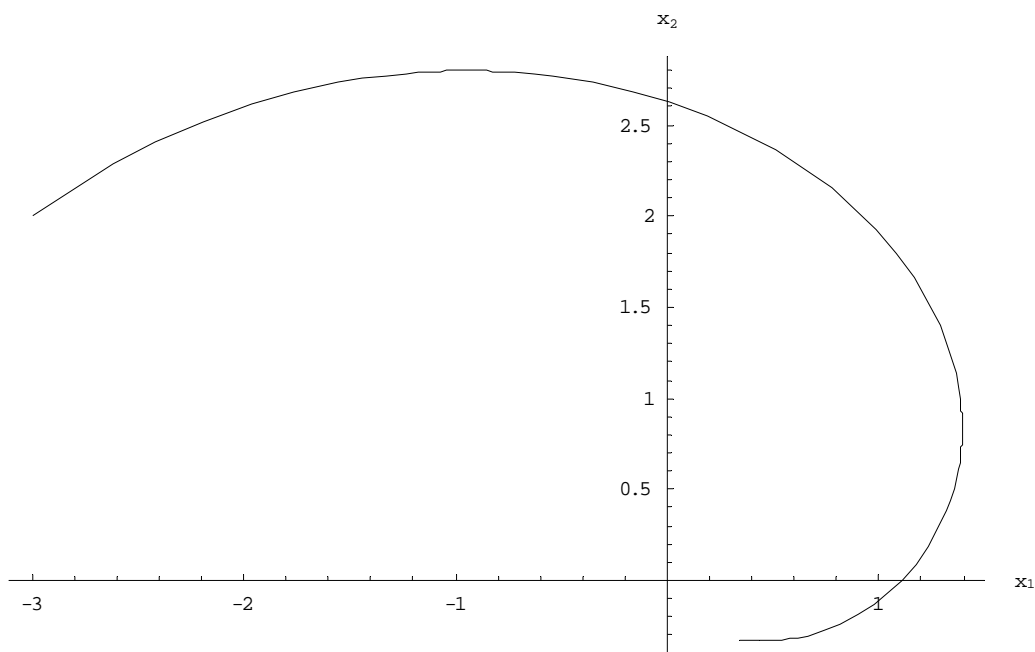
$$\begin{aligned} \{\text{Ax10}, \text{Ax20}, \text{Ax1}\pi, \text{Ax2}\pi, \text{A}\psi_1\pi, \text{A}\psi_2\pi\} &= \\ \{x_1[0], x_2[0], x_1[\pi], x_2[\pi], \psi_1[\pi], \psi_2[\pi]\} &/ \\ \{C[1] \rightarrow C_1, C[2] \rightarrow C_2, C[3] \rightarrow C_3, C[4] \rightarrow C_4\}; \\ \text{Fin} &= \text{NSolve}[\{\text{Ax10} == -3, \text{Ax20} == 2, \text{A}\psi_1\pi == -6 * \text{Ax1}\pi, \\ &\quad \text{A}\psi_2\pi == -4 * \text{Ax2}\pi\}, \{C_1, C_2, C_3, C_4\}]; \\ \{\{C_1\}, \{C_2\}, \{C_3\}, \{C_4\}\} &= \\ \{C_1 /. \text{Fin}, C_2 /. \text{Fin}, C_3 /. \text{Fin}, C_4 /. \text{Fin}\} \\ &\{\{2.0562\}, \{-1.29673\}, \{-3.\}, \{2.\}\} \end{aligned}$$

Подстановка найденных констант в общее решение объединенной системы дифференциальных уравнений

```
{x10[t_], x20[t_], ψ10[t_], ψ20[t_]} =
  {x1[t], x2[t], ψ1[t], ψ2[t]} /.
  {C[1] → C1, C[2] → C2, C[3] → C3, C[4] → C4}
```

```
{-3. Cos[t] + 0.845845 t Cos[t] + 2. Sin[t] - 0.533429 t Sin[t],
  2. Cos[t] - 0.533429 t Cos[t] + 3. Sin[t] - 0.845845 t Sin[t],
  2.0562 Cos[t] - 1.29673 Sin[t], -1.29673 Cos[t] - 2.0562 Sin[t]}
```

```
ParametricPlot[{x10[t], x20[t]}, {t, 0, π},
  AxesLabel → {"x1", "x2"}]
```

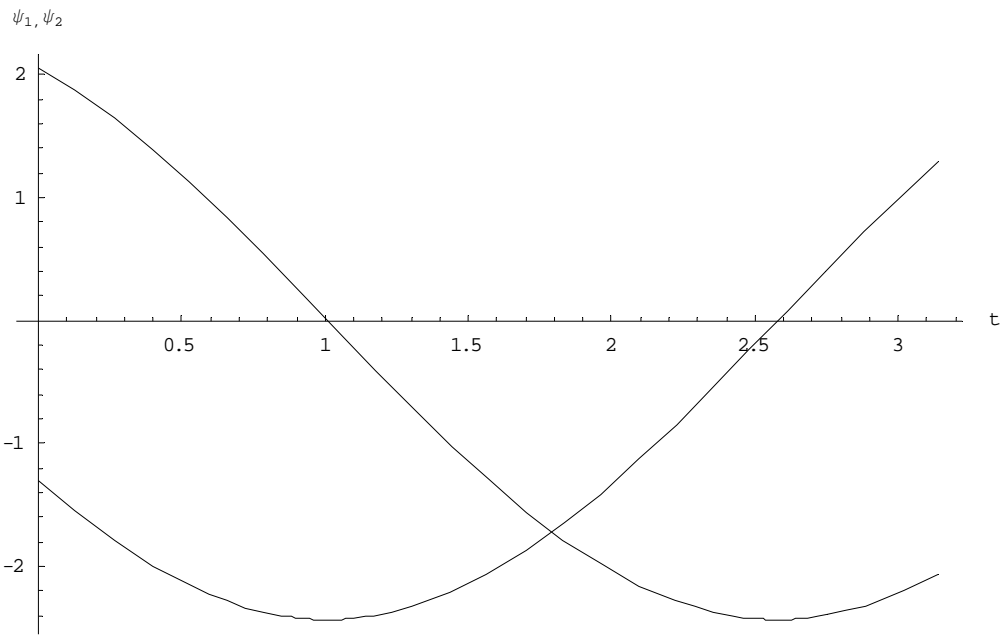


- Graphics -

Исследование поведения решения сопряженной системы

```
Plot[{ψ10[t], ψ20[t]}, {t, 0, π},
  AxesLabel → {"t", "ψ1,ψ2"}]
```

ПРИЛОЖЕНИЕ



- Graphics -

Вычисление оптимального значения функционала

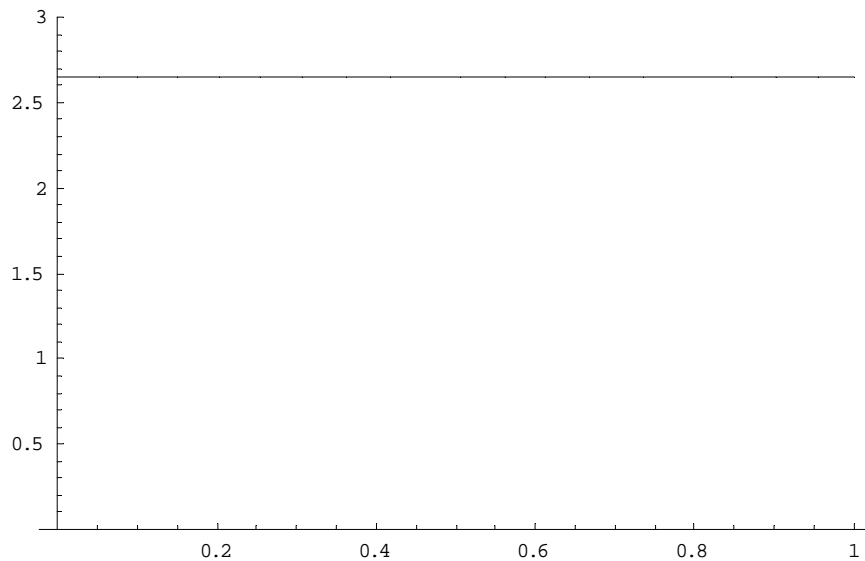
$$3 * x_{10} [\pi] ^ 2 + 2 * x_{20} [\pi] ^ 2$$

0.56252

Проверка постоянства функции Понтрягина

$$Q[t_] = \psi_{10}[t] * \left(x_{20}[t] + \frac{\psi_{10}[t]}{\sqrt{\psi_{10}[t]^2 + \psi_{20}[t]^2}} \right) + \psi_{20}[t] * \left(-x_{10}[t] + \frac{\psi_{20}[t]}{\sqrt{\psi_{10}[t]^2 + \psi_{20}[t]^2}} \right);$$

Plot[Q[t], {t, 0, 1}, PlotRange -> {0, 3}]



- Graphics -

Вычисление значения функционала на произвольном управлении

```

Srav =
NDSolve[
  {y1'[t] == y2[t] +  $\frac{\psi10[t] + 0.1}{\sqrt{(\psi10[t] + 0.1)^2 + (\psi20[t] - 0.1)^2}}$ ,
  y2'[t] ==
  -y1[t] +  $\frac{\psi20[t] - 0.1}{\sqrt{(\psi10[t] + 0.1)^2 + (\psi20[t] - 0.1)^2}}$ ,
  y1[0] == -3, y2[0] == 2}, {y1[t], y2[t]}, {t, 0,  $\pi$ ];
{{y1[t_]}, {y2[t_]}} = {y1[t] /. Srav, y2[t] /. Srav};
3 * y1[ $\pi$ ] ^ 2 + 2 * y2[ $\pi$ ] ^ 2

0.598124

```

Пример 2.3.

Интегрирование сопряженной системы с граничными условиями

```

Sopr =
DSolve[
  { $\psi1'[t] == -2 * \psi1[t] - 10 * \psi2[t] -$ 
   $2 * \psi3[t]$ ,
   $\psi2'[t] == -2 * \psi1[t] + \psi2[t] + \psi3[t]$ ,
   $\psi3'[t] == 30 * \psi1[t] + 35 * \psi2[t] - \psi3[t]$ ,
   $\psi1[1] == -1.0$ ,  $\psi2[1] == -2.$ ,
   $\psi3[1] == 1.$ }, { $\psi1[t]$ ,  $\psi2[t]$ ,  $\psi3[t]$ },
  t]; {{ $\psi1[t_]$ }, { $\psi2[t_]$ }, { $\psi3[t_]$ }} =
{Re[ $\psi1[t]$  /. Sopr], Re[ $\psi2[t]$  /. Sopr],
  Re[ $\psi3[t]$  /. Sopr]}

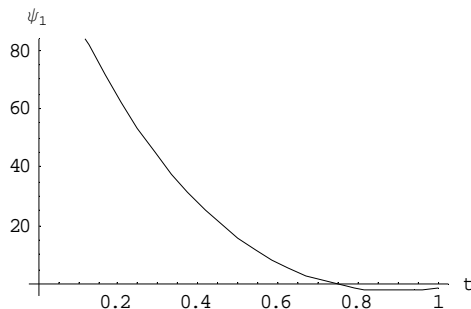
```

Анализ поведения решения сопряженной системы

```

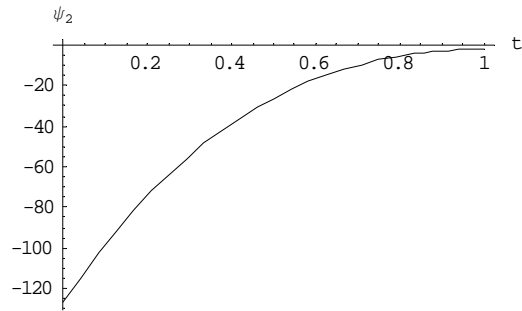
Plot[ $\psi1[t]$ , {t, 0, 1},
  AxesLabel -> {"t", " $\psi1$ "}]

```



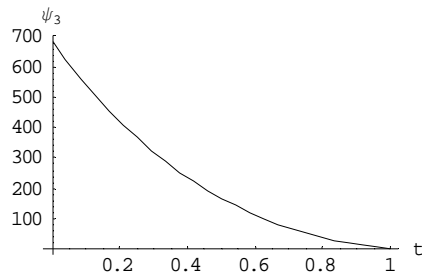
- Graphics -

```
Plot[ψ2[t], {t, 0, 1},
  AxesLabel → {"t", "ψ2"}]
```



- Graphics -

```
Plot[ψ3[t], {t, 0, 1},
  AxesLabel → {"t", "ψ3"}]
```



- Graphics -

Определение момента переключения управления

```
FindRoot[ψ1[t] == 0, {t, 0.6, 0.8}]
```

```
{t → 0.741061}
```

Интегрирование основной системой с полностью определенными оптимальными управлениями и с начальными условиями

```
Osn =
```

```
NDSolve[
  {x1'[t] == 2 * x1[t] + 2 * x2[t] -
    30 * x3[t] + Sign[ψ1[t]],
  x2'[t] == 10 * x1[t] - x2[t] - 35 * x3[t] -
    1,
  x3'[t] == 2 * x1[t] - x2[t] + x3[t] + 1,
  x1[0] == -3., x2[0] == 2, x3[0] == 1.},
  {x1[t], x2[t], x3[t]}, {t, 0, 1}];
{{x1[t_]}, {x2[t_]}, {x3[t_]}} =
{Re[x1[t] /. Osn], Re[x2[t] /. Osn],
  Re[x3[t] /. Osn]}
```

Вычисление оптимального значения функционала

$x1[1] + 2 * x2[1] - x3[1]$

-366.188

Сравнение с неоптимальным управлением

Srav =

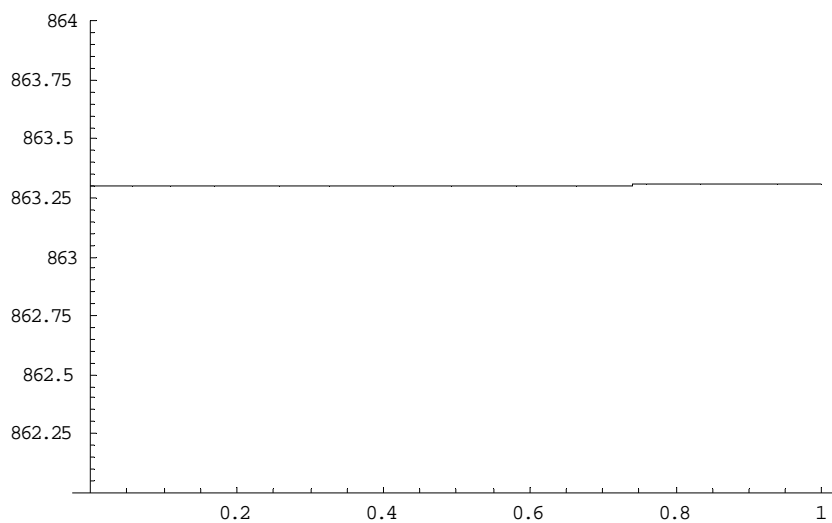
```
DSolve[
  {y1'[t] == 2 * y1[t] + 2 * y2[t] -
    30 * y3[t] + 1,
  y2'[t] == 10 * y1[t] - y2[t] - 35 * y3[t] -
    1,
  y3'[t] == 2 * y1[t] - y2[t] + y3[t] + 1,
  y1[0] == -3., y2[0] == 2, y3[0] == 1.},
  {y1[t], y2[t], y3[t]}, t];
{{y1[t_]}, {y2[t_]}, {y3[t_]}} =
{Re[y1[t] /. Srav], Re[y2[t] /. Srav],
  Re[y3[t] /. Srav]};
y1[1] + 2 * y2[1] - y3[1]
```

-365.348

Проверка постоянства функции Понтрягина

```
Q[t_] =
(2 * x1[t] + 2 * x2[t] - 30 * x3[t] + Sign[ψ1[t]]) * ψ1[t] +
(10 * x1[t] - x2[t] - 35 * x3[t] - 1) * ψ2[t] +
(2 * x1[t] - x2[t] + x3[t] + 1) * ψ3[t]
```

```
Plot[Q[t], {t, 0, 1},
  PlotRange → {862, 864}]
```



- Graphics -

Пример 2.5.

Построение фундаментальной матрицы Коши

Resh1 =

```
DSolve[{x11'[t] == 2 * x11[t] + 9 * x21[t],
        x21'[t] == x11[t] + 2 * x21[t], x11[0] == 1, x21[0] == 0},
        {x11[t], x21[t]}, t];
```

Resh2 =

```
DSolve[{x12'[t] == 2 * x12[t] + 9 * x22[t],
        x22'[t] == x12[t] + 2 * x22[t], x12[0] == 0, x22[0] == 1},
        {x12[t], x22[t]}, t];
```

```
{ {x11[t]}, {x12[t]}, {x21[t]}, {x22[t]} } =
{x11[t] /. Resh1, x12[t] /. Resh2, x21[t] /. Resh1,
 x22[t] /. Resh2};
```

$X = \begin{pmatrix} x11[t] & x12[t] \\ x21[t] & x22[t] \end{pmatrix} /. t \rightarrow 1 - \tau$

$\left\{ \left\{ \frac{1}{2} e^{-1+\tau} (1 + e^{6(1-\tau)}), \frac{3}{2} e^{-1+\tau} (-1 + e^{6(1-\tau)}) \right\}, \left\{ \frac{1}{6} e^{-1+\tau} (-1 + e^{6(1-\tau)}), \frac{1}{2} e^{-1+\tau} (1 + e^{6(1-\tau)}) \right\} \right\}$

Построение подынтегрального и внеинтегрального выражений функции

ИПСИЛОН

$XT = \text{Transpose}[X]; L = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \end{pmatrix};$

$\{ \{f1\}, \{f2\} \} = XT.L;$

$Dob = - \left(\sqrt{4 * 11^2 + 9 * 12^2} + 50 * 11 + 30 * 12 \right);$

$Pod = \left(\sqrt{f1^2 + f2^2} \right); Pod1[\tau_, 11_] = Pod /. \{12 \rightarrow \sqrt{1 - 11^2}\};$

$Pod2[\tau_, 11_] = Pod /. \{12 \rightarrow -\sqrt{1 - 11^2}\};$

$Dob1 = Dob /. \{12 \rightarrow \sqrt{1 - 11^2}\};$

$Dob2 = Dob /. \{12 \rightarrow -\sqrt{1 - 11^2}\};$

Построение двух ветвей функции ипсилон

$Eps1[11_] = Dob1 - NIntegrate[Pod1[\tau, 11], \{\tau, 0, 1\}];$

$Eps2[11_] = Dob2 - NIntegrate[Pod2[\tau, 11], \{\tau, 0, 1\}];$

Решение задачи математического программирования

```

u = -1; If[Eps1[-1] < Eps2[-1], S = Eps2[-1]; l10 = u;
  l20 = -√(1 - u^2), S = Eps1[-1]; l10 = u; l20 = √(1 - u^2)];
Do[u = -1 +  $\frac{i}{1000}$ ; If[Eps1[u] < Eps2[u], P = Eps2[u];
  m10 = u; m20 = -√(1 - u^2), P = Eps1[u]; m10 = u;
  m20 = √(1 - u^2)]; If[P > S, S = P; l10 = m10; l20 = m20],
{i, 600, 700}]; Print["l10=", l10, " ", "l20=", l20,
" ", "Eps0=", S]

```

$l_{10} = -0.316$ $l_{20} = -0.948759$ $Eps0 = 11.8738$

Построение оптимального управления

```

{U1, U2} = {  $\frac{-f1}{\sqrt{f1^2 + f2^2}}$ ,  $\frac{-f2}{\sqrt{f1^2 + f2^2}}$  };
{U10[t_], U20[t_]} = {U1, U2} /. {τ → t, l1 → l10, l2 → l20}

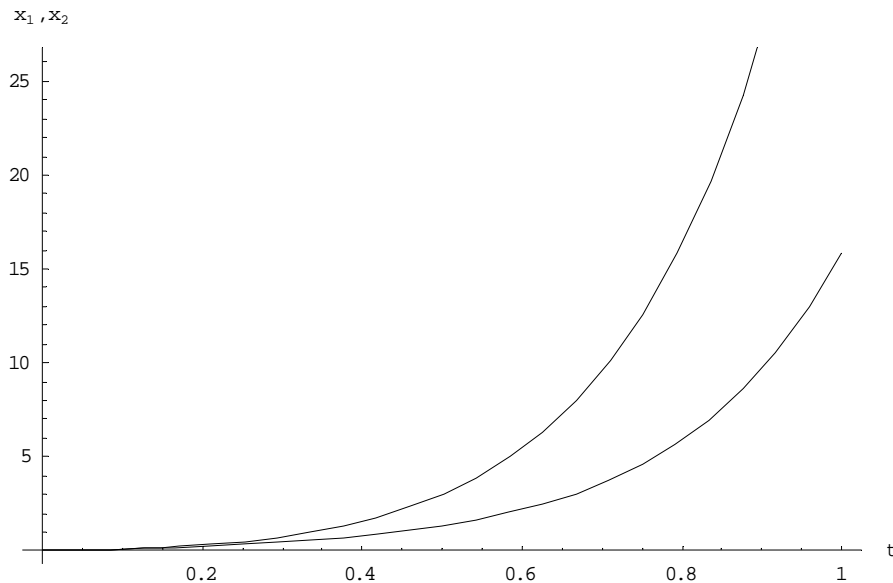
```

Интегрирование уравнений движения для оптимального управления

```

Resh = NDSolve[{x1'[t] == 2 * x1[t] + 9 * x2[t] + U10[t],
  x2'[t] == x1[t] + 2 * x2[t] + U20[t], x1[0] == 0, x2[0] == 0},
{x1[t], x2[t]}, {t, 0, 1}];
{{x1[t_]}, {x2[t_]}} = {x1[t] /. Resh, x2[t] /. Resh}
Plot[{x1[t], x2[t]}, {t, 0, 1}, AxesLabel → {"t", "x1, x2"}]

```



- Graphics -

Координаты фазового вектора в конечный момент времени

```
{x1[1], x2[1]}
```

{45.817, 15.8054}

Вычисление финального расстояния

F [φ] =

$$\left((x1[1] - 50 - 2 * \cos[\varphi])^2 + (x2[1] - 30 - 3 * \sin[\varphi])^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

FindMinimum[**F** [φ], { φ , 0, 2 * π }]

{11.8735, { $\varphi \rightarrow -1.78916$ }}

Ввод произвольного управления

$$\{v1, v2\} = \left\{ \frac{-f1 + 0.5}{\sqrt{(-f1 + 0.5)^2 + (-f2 - 0.5)^2}}, \frac{-f2 - 0.5}{\sqrt{(-f1 + 0.5)^2 + (-f2 - 0.5)^2}} \right\};$$

{**v10** [t], **v20** [t]} = {**v1**, **v2**} /. { $\tau \rightarrow t$, 11 \rightarrow 110, 12 \rightarrow 120}

Интегрирование системы уравнений с введенным управлением

ReshY =

NDSolve [{**y1**' [t] == 2 * **y1** [t] + 9 * **y2** [t] + **v10** [t],
y2' [t] == **y1** [t] + 2 * **y2** [t] + **v20** [t], **y1** [0] == 0, **y2** [0] == 0},
{**y1** [t], **y2** [t]}, { t , 0, 1}];

{**y1** [t], **y2** [t]} = {**y1** [t] /. **ReshY**, **y2** [t] /. **ReshY**}

Координаты фазового вектора в конечный момент времени

{**y1** [1], **y2** [1]}

{45.8779, 15.7332}

Вычисление финального расстояния

FY [φ] =

$$\left((y1[1] - 50 - 2 * \cos[\varphi])^2 + (y2[1] - 30 - 3 * \sin[\varphi])^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

FindMinimum[**FY** [φ], { φ , 0, 2 * π }]

{11.923, { $\varphi \rightarrow -1.78491$ }}

Пример 2.6.

Построение фундаментальной матрицы Коши

```

Resh1 =
  DSolve[{x11'[t] == 2 * x11[t] + 9 * x21[t],
    x21'[t] == x11[t] + 2 * x21[t], x11[0] == 1, x21[0] == 0},
    {x11[t], x21[t]}, t];
Resh2 =
  DSolve[{x12'[t] == 2 * x12[t] + 9 * x22[t],
    x22'[t] == x12[t] + 2 * x22[t], x12[0] == 0, x22[0] == 1},
    {x12[t], x22[t]}, t];
{{x11[t]}, {x12[t]}, {x21[t]}, {x22[t]}} =
  {x11[t] /. Resh1, x12[t] /. Resh2, x21[t] /. Resh1, x22[t] /. Resh2};
x = ( x11[t]  x12[t] ) /. t -> 1 - τ
     x21[t]  x22[t]

```

Построение подынтегрального и внеинтегрального выражений функции ИПСИЛОН

```

XT = Transpose[X]; L = ( 11 )
                       12 );
{{f1}, {f2}} = XT.L; Dob = - (√(4 * 11^2 + 9 * 12^2 + 50 * 11 + 30 * 12));
Pod = (Abs[f1] + Abs[f2]); Pod1[τ_, 11_] = Pod /. {12 -> √(1 - 11^2)};
Pod2[τ_, 11_] = Pod /. {12 -> -√(1 - 11^2)};
Dob1 = Dob /. {12 -> √(1 - 11^2)};
Dob2 = Dob /. {12 -> -√(1 - 11^2)};

```

Построение двух ветвей функции ипсилон

```

Eps1[11_] = Dob1 - NIntegrate[Pod1[τ, 11], {τ, 0, 1}];
Eps2[11_] = Dob2 - NIntegrate[Pod2[τ, 11], {τ, 0, 1}];

```

Решение задачи математического программирования

```

u = -1; If[Eps1[-1] < Eps2[-1], S = Eps2[-1]; l10 = u;
  l20 = -√(1 - u^2), S = Eps1[-1]; l10 = u; l20 = √(1 - u^2)];
Do[u = -1 + i/1000.; If[Eps1[u] < Eps2[u], P = Eps2[u]; m10 = u;
  m20 = -√(1 - u^2), P = Eps1[u]; m10 = u; m20 = √(1 - u^2)];
  If[P > S, S = P; l10 = m10; l20 = m20], {i, 1250, 1350}];
Print["l10=", l10, " ", "l20=", l20, " ", "Eps0=", S]
l10=0.304  l20=-0.952672  Eps0=9.03586

```

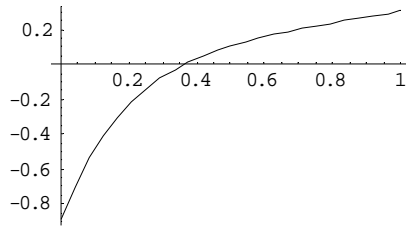
Анализ оптимального управления

```

{z1[τ_], z2[τ_]} = {f1, f2} /. {τ -> t, 11 -> l10, 12 -> l20}
Plot[z1[t], {t, 0, 1}]

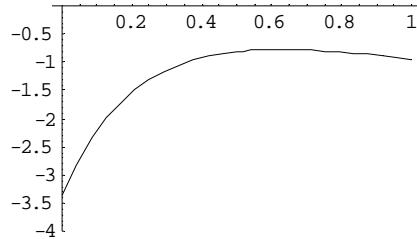
```

ПРИЛОЖЕНИЕ



- Graphics -

```
Plot[z2[t], {t, 0, 1}, PlotRange → {-4, 0}]
```



- Graphics -

Определение момента переключения

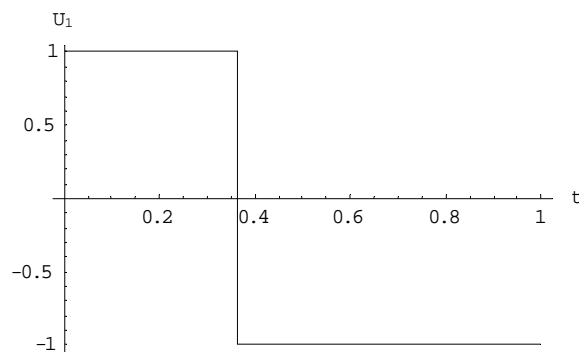
```
FindRoot[z1[t] == 0, {t, {0, 1}}]
```

```
{t → 0.36245}
```

Построение оптимального управления

```
{U10[t_], U20[t_]} = {-Sign[z1[t]], -Sign[z2[t]]}
```

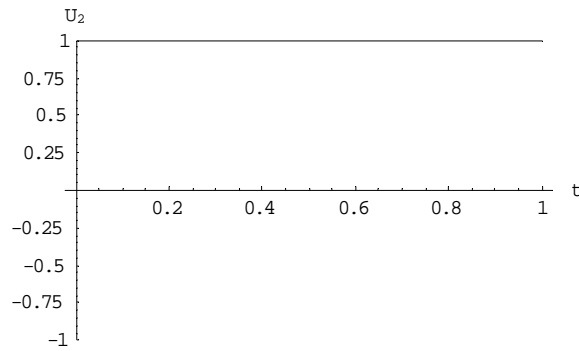
```
Plot[U10[t], {t, 0, 1}, AxesLabel → {"t", "U1"}]
```



- Graphics -

```
Plot[U20[t], {t, 0, 1}, AxesLabel → {"t", "U2"}, PlotRange → {-1, 1}]
```

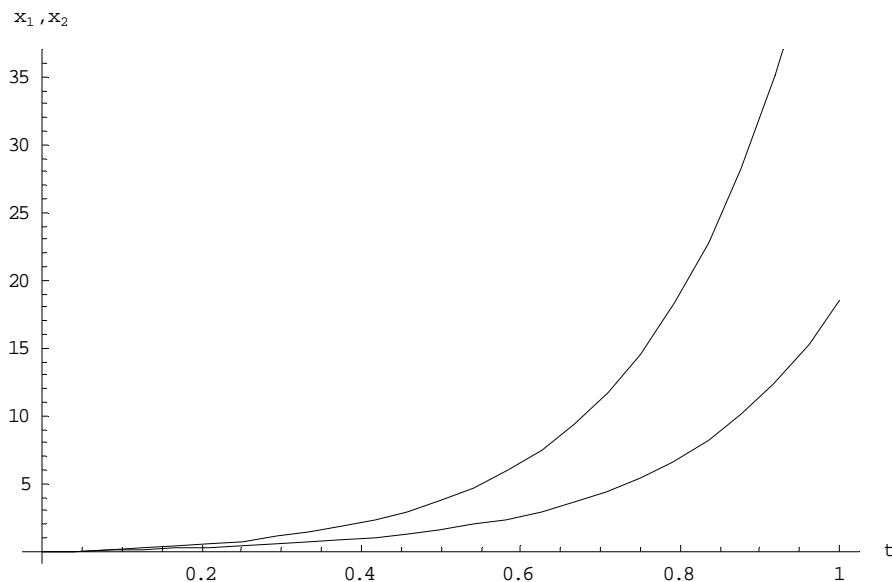
ПРИЛОЖЕНИЕ



- Graphics -

Интегрирование уравнений движения для оптимального управления

```
Resh = NDSolve[{x1'[t] == 2 * x1[t] + 9 * x2[t] + U10[t],
  x2'[t] == x1[t] + 2 * x2[t] + U20[t], x1[0] == 0, x2[0] == 0},
  {x1[t], x2[t]}, {t, 0, 1}];
{{x1[t_]}, {x2[t_]}} = {x1[t] /. Resh, x2[t] /. Resh}
Plot[{x1[t], x2[t]}, {t, 0, 1}, AxesLabel -> {"t", "x1, x2"}]
```



- Graphics -

Координаты фазового вектора в конечный момент времени

```
{x1[1], x2[1]}
{53.2155, 18.4742}
```

Вычисление финального расстояния

```
F[φ_] = ((x1[1] - 50 - 2 * Cos[φ]) ^ 2 + (x2[1] - 30 - 3 * Sin[φ]) ^ 2) ^ (1/2);
FindMinimum[F[φ], {φ, 0, 2 * π}]
{9.036, {φ -> -1.35749}}
```

Ввод произвольного управления

$\{v1, v2\} = \{1, 1\}$

Интегрирование системы уравнений с введенным управлением

ReshY =

```
NDSolve[{y1'[t] == 2 * y1[t] + 9 * y2[t] + v1,
  y2'[t] == y1[t] + 2 * y2[t] + v2, y1[0] == 0, y2[0] == 0},
  {y1[t], y2[t]}, {t, 0, 1}];
{{y1[t_]}, {y2[t_]}} = {y1[t] /. ReshY, y2[t] /. ReshY}
```

Координаты фазового вектора в конечный момент времени

$\{y1[1], y2[1]\}$

$\{58.3336, 19.866\}$

Вычисление финального расстояния

```
FY[φ_] = ((y1[1] - 50 - 2 * Cos[φ]) ^ 2 + (y2[1] - 30 - 3 * Sin[φ]) ^ 2) ^ 1/2;
FindMinimum[FY[φ], {φ, 0, 2 * π}]
{10.5125, {φ → -1.00394}}
```

Пример 2.7.

Построение фундаментальной матрицы Коши

Resh1 =

```
NDSolve[{x11'[t] == x31[t], x21'[t] == x41[t],
  x31'[t] == Cos[t] * x31[t] + t * x41[t],
  x41'[t] ==  $\frac{1}{t+1}$  * x31[t] + Sin[t] * x41[t], x11[0] == 1,
  x21[0] == 0, x31[0] == 0, x41[0] == 0},
  {x11[t], x21[t], x31[t], x41[t]}, {t, 0, 1}];
```

Resh2 =

```
NDSolve[{x12'[t] == x32[t], x22'[t] == x42[t],
  x32'[t] == Cos[t] * x32[t] + t * x42[t],
  x42'[t] ==  $\frac{1}{t+1}$  * x32[t] + Sin[t] * x42[t], x12[0] == 0,
  x22[0] == 1, x32[0] == 0, x42[0] == 0},
  {x12[t], x22[t], x32[t], x42[t]}, {t, 0, 1}];
```

Resh3 =

```
NDSolve[{x13'[t] == x33[t], x23'[t] == x43[t],
  x33'[t] == Cos[t] * x33[t] + t * x43[t],
  x43'[t] ==  $\frac{1}{t+1}$  * x33[t] + Sin[t] * x43[t], x13[0] == 0,
  x23[0] == 0, x33[0] == 1, x43[0] == 0},
  {x13[t], x23[t], x33[t], x43[t]}, {t, 0, 1}];
```

Resh4 =

```
NDSolve[{x14'[t] == x34[t], x24'[t] == x44[t],
  x34'[t] == Cos[t] * x34[t] + t * x44[t],
  x44'[t] ==  $\frac{1}{t+1}$  * x34[t] + Sin[t] * x44[t], x14[0] == 0,
  x24[0] == 0, x34[0] == 0, x44[0] == 1},
  {x14[t], x24[t], x34[t], x44[t]}, {t, 0, 1}];
```

```
{{x11[t]}, {x21[t]}, {x31[t]}, {x41[t]}} =
  {x11[t] /. Resh1, x21[t] /. Resh1, x31[t] /. Resh1,
  x41[t] /. Resh1};
{{x12[t]}, {x22[t]}, {x32[t]}, {x42[t]}} =
  {x12[t] /. Resh2, x22[t] /. Resh2, x32[t] /. Resh2,
  x42[t] /. Resh2};
{{x13[t]}, {x23[t]}, {x33[t]}, {x43[t]}} =
  {x13[t] /. Resh3, x23[t] /. Resh3, x33[t] /. Resh3,
  x43[t] /. Resh3};
{{x14[t]}, {x24[t]}, {x34[t]}, {x44[t]}} =
  {x14[t] /. Resh4, x24[t] /. Resh4, x34[t] /. Resh4,
  x44[t] /. Resh4};
```


ПРИЛОЖЕНИЕ

$$X[t_]= \begin{pmatrix} x11[t] & x12[t] & x13[t] & x14[t] \\ x21[t] & x22[t] & x23[t] & x24[t] \\ x31[t] & x32[t] & x33[t] & x34[t] \\ x41[t] & x42[t] & x43[t] & x44[t] \end{pmatrix}; Y[s] = \text{Inverse}[X[s]];$$

$$MK[s_] = X[1] \cdot Y[s];$$

Построение подынтегрального и внеинтегрального выражений функции
ИПСИЛОН

$$L = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\{\{f1\}, \{f2\}\} = \text{Transpose}[B] \cdot (\text{Transpose}[MK[\tau]] \cdot L);$$

$$Dob = -(5 * 11 + 4 * 12 + 1); Pod = (\sqrt{f1^2 + f2^2});$$

$$Pod1[\tau_, 11_] = Pod /. \{12 \rightarrow \sqrt{1 - 11^2}\};$$

$$Pod2[\tau_, 11_] = Pod /. \{12 \rightarrow -\sqrt{1 - 11^2}\};$$

$$Dob1 = Dob /. \{12 \rightarrow \sqrt{1 - 11^2}\};$$

$$Dob2 = Dob /. \{12 \rightarrow -\sqrt{1 - 11^2}\};$$

Построение двух ветвей функции ипсилон

$$Eps1[11_] = Dob1 - \text{NIntegrate}[Pod1[\tau, 11], \{\tau, 0, 1\}];$$

$$Eps2[11_] = Dob2 - \text{NIntegrate}[Pod2[\tau, 11], \{\tau, 0, 1\}];$$

Решение задачи математического программирования

$$u = -1; \text{If}[Eps1[-1] < Eps2[-1], S = Eps2[-1]; l10 = u;$$

$$l20 = -\sqrt{1 - u^2}, S = Eps1[-1]; l10 = u; l20 = \sqrt{1 - u^2}];$$

$$\text{Do}[u = -1 + \frac{i}{1000.}; \text{If}[Eps1[u] < Eps2[u], P = Eps2[u];$$

$$m10 = u; m20 = -\sqrt{1 - u^2}, P = Eps1[u]; m10 = u; m20 = \sqrt{1 - u^2}];$$

$$\text{If}[P > S, S = P; l10 = m10; l20 = m20], \{i, 210, 230\}];$$

$$\text{Print}["l_{10}=", l10, " ", "l_{20}=", l20, " ", "Eps0=", S]$$

$$l_{10} = -0.779 \quad l_{20} = -0.627024 \quad Eps0 = 4.59607$$

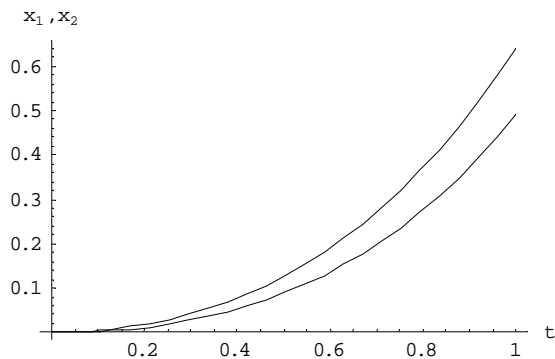
Построение оптимального управления

$$\{U1, U2\} = \left\{ \frac{-f1}{\sqrt{f1^2 + f2^2}}, \frac{-f2}{\sqrt{f1^2 + f2^2}} \right\};$$

$$\{U10[t_], U20[t_]\} = \{U1, U2\} /. \{\tau \rightarrow t, 11 \rightarrow l10, 12 \rightarrow l20\};$$

Интегрирование уравнений движения для оптимального управления

```
Resh =
NDSolve[{x1'[t] == x3[t], x2'[t] == x4[t],
x3'[t] == Cos[t] * x3[t] + t * x4[t] + U10[t],
x4'[t] ==  $\frac{1}{t+1}$  * x3[t] + Sin[t] * x4[t] + U20[t], x1[0] == 0,
x2[0] == 0, x3[0] == 0, x4[0] == 0},
{x1[t], x2[t], x3[t], x4[t]}, {t, 0, 1}];
{{x1[t_]}, {x2[t_]}, {x3[t_]}, {x4[t_]}} =
{x1[t] /. Resh, x2[t] /. Resh, x3[t] /. Resh, x4[t] /. Resh}
Plot[{x1[t], x2[t]}, {t, 0, 1}, AxesLabel -> {"t", "x1,x2"}]
```



- Graphics -

Координаты фазового вектора в конечный момент времени

```
{x1[1], x2[1]}
```

```
{0.640532, 0.491302}
```

Вычисление финального расстояния

```
((x1[1] - 5) ^ 2 + (x2[1] - 4) ^ 2) ^  $\frac{1}{2}$  - 1
```

```
4.59606
```

Ввод произвольного управления

```
{v1, v2} = {  $\frac{-f1 + 0.5}{\sqrt{(-f1 + 0.5)^2 + (-f2 - 0.5)^2}}$ ,  $\frac{-f2 - 0.5}{\sqrt{(-f1 + 0.5)^2 + (-f2 - 0.5)^2}}$  };
```

```
{v10[t_], v20[t_]} = {v1, v2} /. {τ -> t, 11 -> 110, 12 -> 120};
```

Интегрирование системы уравнений с введенным управлением

ReshY =

```
NDSolve[{y1'[t] == y3[t], y2'[t] == y4[t],
  y3'[t] == Cos[t] * y3[t] + t * y4[t] + V10[t],
  y4'[t] ==  $\frac{1}{t+1}$  * y3[t] + Sin[t] * y4[t] + V20[t], y1[0] == 0,
  y2[0] == 0, y3[0] == 0, y4[0] == 0},
  {y1[t], y2[t], y3[t], y4[t]}, {t, 0, 1}];
{{y1[t_]}, {y2[t_]}, {y3[t_]}, {y4[t_]}} =
{y1[t] /. ReshY, y2[t] /. ReshY, y3[t] /. ReshY, y4[t] /. ReshY}
```

Координаты фазового вектора в конечный момент времени

{y1[1], y2[1]}

{0.70276, 0.193406}

Вычисление финального расстояния

$((y1[1] - 5)^2 + (y2[1] - 4)^2)^{\frac{1}{2}} - 1$

4.74077

Пример 2.8.

Построение фундаментальной матрицы Коши

Resh1 =

```
NDSolve[{x11'[t] == x31[t], x21'[t] == x41[t],
  x31'[t] == Cos[t] * x31[t] + t * x41[t],
  x41'[t] ==  $\frac{1}{t+1}$  * x31[t] + Sin[t] * x41[t],
  x11[0] == 1, x21[0] == 0, x31[0] == 0, x41[0] == 0},
  {x11[t], x21[t], x31[t], x41[t]}, {t, 0, 1}];
```

Resh2 =

```
NDSolve[{x12'[t] == x32[t], x22'[t] == x42[t],
  x32'[t] == Cos[t] * x32[t] + t * x42[t],
  x42'[t] ==  $\frac{1}{t+1}$  * x32[t] + Sin[t] * x42[t],
  x12[0] == 0, x22[0] == 1, x32[0] == 0, x42[0] == 0},
  {x12[t], x22[t], x32[t], x42[t]}, {t, 0, 1}];
```

Resh3 =

```
NDSolve[{x13'[t] == x33[t], x23'[t] == x43[t],
  x33'[t] == Cos[t] * x33[t] + t * x43[t],
  x43'[t] ==  $\frac{1}{t+1}$  * x33[t] + Sin[t] * x43[t],
  x13[0] == 0, x23[0] == 0, x33[0] == 1, x43[0] == 0},
  {x13[t], x23[t], x33[t], x43[t]}, {t, 0, 1}];
```

Resh4 =

```
NDSolve[{x14'[t] == x34[t], x24'[t] == x44[t],
  x34'[t] == Cos[t] * x34[t] + t * x44[t],
  x44'[t] ==  $\frac{1}{t+1}$  * x34[t] + Sin[t] * x44[t],
  x14[0] == 0, x24[0] == 0, x34[0] == 0, x44[0] == 1},
  {x14[t], x24[t], x34[t], x44[t]}, {t, 0, 1}];
```

```
{{x11[t]}, {x21[t]}, {x31[t]}, {x41[t]}} =
{x11[t] /. Resh1, x21[t] /. Resh1, x31[t] /. Resh1,
  x41[t] /. Resh1};
{{x12[t]}, {x22[t]}, {x32[t]}, {x42[t]}} =
{x12[t] /. Resh2, x22[t] /. Resh2, x32[t] /. Resh2,
  x42[t] /. Resh2};
{{x13[t]}, {x23[t]}, {x33[t]}, {x43[t]}} =
{x13[t] /. Resh3, x23[t] /. Resh3, x33[t] /. Resh3,
  x43[t] /. Resh3};
{{x14[t]}, {x24[t]}, {x34[t]}, {x44[t]}} =
{x14[t] /. Resh4, x24[t] /. Resh4, x34[t] /. Resh4,
  x44[t] /. Resh4};
```

$$X[t_]= \begin{pmatrix} x11[t] & x12[t] & x13[t] & x14[t] \\ x21[t] & x22[t] & x23[t] & x24[t] \\ x31[t] & x32[t] & x33[t] & x34[t] \\ x41[t] & x42[t] & x43[t] & x44[t] \end{pmatrix};$$

$$Y[s] = \text{Inverse}[X[s]];$$

$$MK[s_] = X[1].Y[s];$$

Построение подынтегрального и внеинтегрального выражений функции

ИПСИЛОН

$$L = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\{\{f1\}, \{f2\}\} = \text{Transpose}[B].(\text{Transpose}[MK[\tau]].L);$$

$$\text{Dob} = -(5 * 11 + 4 * 12 + 1); \text{Pod} = (\text{Abs}[f1] + \text{Abs}[f2]);$$

$$\text{Pod1}[\tau_, 11_] = \text{Pod} /. \{12 \rightarrow \sqrt{1 - 11^2}\};$$

$$\text{Pod2}[\tau_, 11_] = \text{Pod} /. \{12 \rightarrow -\sqrt{1 - 11^2}\};$$

$$\text{Dob1} = \text{Dob} /. \{12 \rightarrow \sqrt{1 - 11^2}\};$$

$$\text{Dob2} = \text{Dob} /. \{12 \rightarrow -\sqrt{1 - 11^2}\};$$

Построение двух ветвей функции ипсилон

$$\text{Eps1}[11_] = \text{Dob1} - \text{NIntegrate}[\text{Pod1}[\tau, 11], \{\tau, 0, 1\}];$$

$$\text{Eps2}[11_] = \text{Dob2} - \text{NIntegrate}[\text{Pod2}[\tau, 11], \{\tau, 0, 1\}];$$

Решение задачи математического программирования

$$u = -1; \text{If}[\text{Eps1}[-1] < \text{Eps2}[-1], S = \text{Eps2}[-1]; l10 = u;$$

$$l20 = -\sqrt{1 - u^2}, S = \text{Eps1}[-1]; l10 = u; l20 = \sqrt{1 - u^2}];$$

$$\text{Do}[u = -1 + \frac{i}{1000.};$$

$$\text{If}[\text{Eps1}[u] < \text{Eps2}[u], P = \text{Eps2}[u]; m10 = u;$$

$$m20 = -\sqrt{1 - u^2}, P = \text{Eps1}[u]; m10 = u; m20 = \sqrt{1 - u^2}];$$

$$\text{If}[P > S, S = P; l10 = m10; l20 = m20], \{i, 200, 220\}];$$

$$\text{Print}["l_{10}=", l10, " ", "l_{20}=", l20, " ", "Eps0=", S]$$

$$l_{10} = -0.791 \quad l_{20} = -0.611816 \quad \text{Eps0} = 4.28152$$

Построение оптимального управления

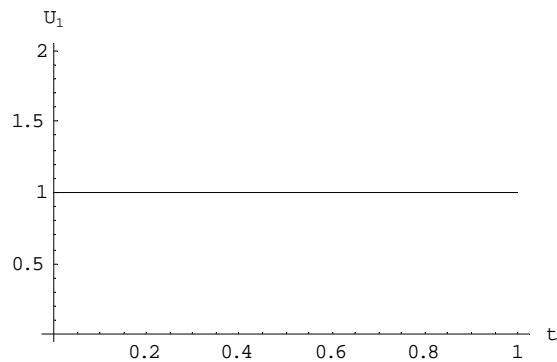
$$\{U1, U2\} = \{-\text{Sign}[f1], -\text{Sign}[f2]\};$$

$$\{U10[t_], U20[t_]\} =$$

$$\{U1, U2\} /. \{\tau \rightarrow t, 11 \rightarrow l10, 12 \rightarrow l20\};$$

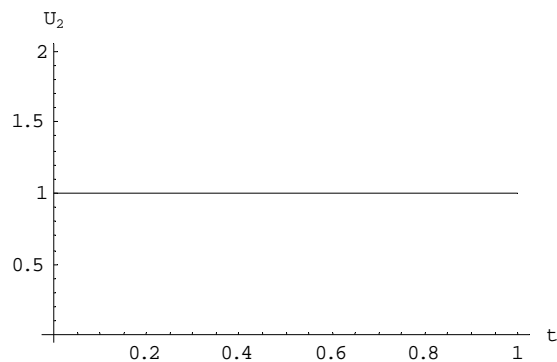
Анализ оптимального управления

```
Plot[U10[t], {t, 0, 1}, AxesLabel -> {"t", "U1"}]
```



- Graphics -

```
Plot[U20[t], {t, 0, 1}, AxesLabel -> {"t", "U2"}]
```



- Graphics -

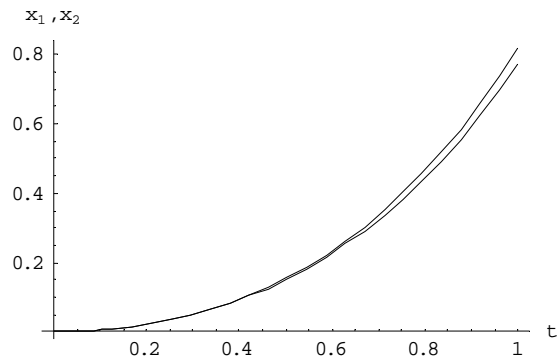
Интегрирование уравнений движения для оптимального управления

```
Resh =
```

```
NDSolve[{x1'[t] == x3[t], x2'[t] == x4[t],
  x3'[t] == Cos[t] * x3[t] + t * x4[t] + U10[t],
  x4'[t] ==  $\frac{1}{t+1}$  * x3[t] + Sin[t] * x4[t] + U20[t],
  x1[0] == 0, x2[0] == 0, x3[0] == 0, x4[0] == 0},
  {x1[t], x2[t], x3[t], x4[t]}, {t, 0, 1}];
{{x1[t_]}, {x2[t_]}, {x3[t_]}, {x4[t_]}} =
{x1[t] /. Resh, x2[t] /. Resh, x3[t] /. Resh,
  x4[t] /. Resh}
```

```
Plot[{x1[t], x2[t]}, {t, 0, 1},
  AxesLabel -> {"t", "x1, x2"}]
```

ПРИЛОЖЕНИЕ



- Graphics -

Координаты фазового вектора в конечный момент времени

`{x1[1], x2[1]}`

`{0.820538, 0.770994}`

Вычисление финального расстояния

$((x1[1] - 5)^2 + (x2[1] - 4)^2)^{\frac{1}{2}} - 1$

4.28151

Ввод произвольного управления

`{v10[t_], v20[t_]} =`

`{If[t < 0.1, -1, 1], If[t > 0.9, -1, 1]}`

Интегрирование системы уравнений с введенным управлением

`ReshY =`

`NDSolve[{y1'[t] == y3[t], y2'[t] == y4[t],
y3'[t] == Cos[t] * y3[t] + t * y4[t] + v10[t],
y4'[t] == $\frac{1}{t+1}$ * y3[t] + Sin[t] * y4[t] + v20[t],
y1[0] == 0, y2[0] == 0, y3[0] == 0, y4[0] == 0},
{y1[t], y2[t], y3[t], y4[t]}, {t, 0, 1}];`

`{{y1[t_]}, {y2[t_]}, {y3[t_]}, {y4[t_]}} =
{y1[t] /. ReshY, y2[t] /. ReshY, y3[t] /. ReshY,
y4[t] /. ReshY}`

Координаты фазового вектора в конечный момент времени

`{y1[1], y2[1]}`

`{0.499235, 0.651947}`

Вычисление финального расстояния

$((y1[1] - 5)^2 + (y2[1] - 4)^2)^{\frac{1}{2}} - 1$

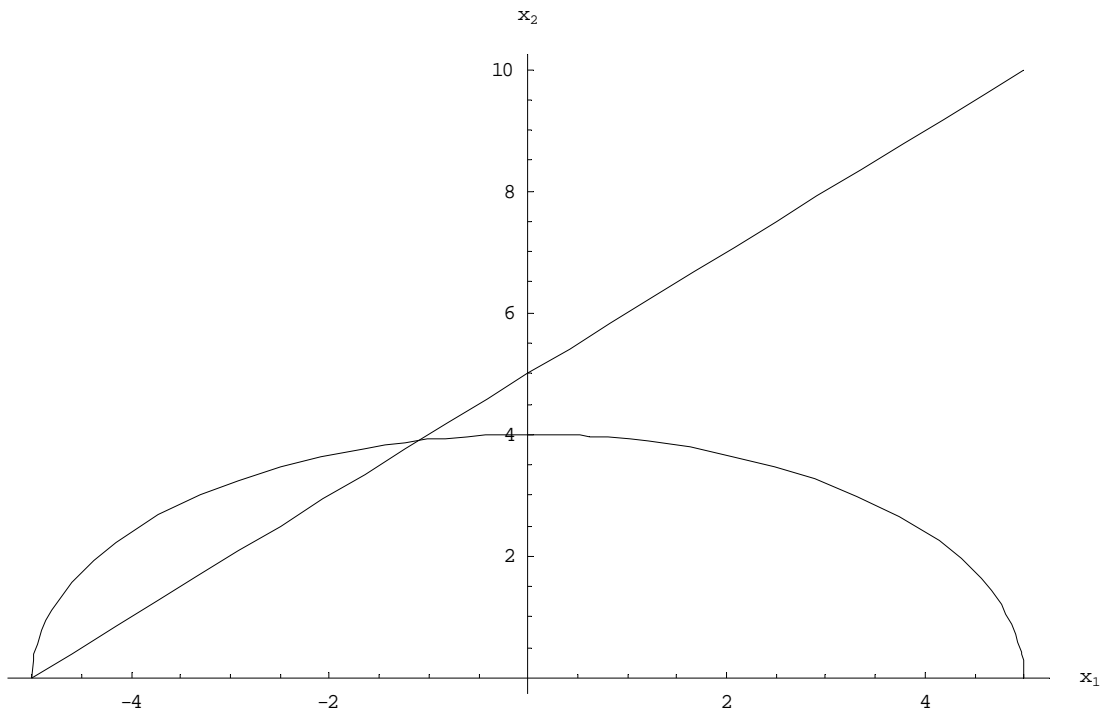
4.60949

Пример 2.9

Область начальных положений фазового вектора

$a = 5; b = 4; k = 1;$

```
Plot[{ {  $\frac{b}{a} * \sqrt{a^2 - x^2}, 2 + k * (x + 3)$  }, {x, -a, a},
  AxesLabel -> {"x1", "x2"}]
```



- Graphics -

Уравнения, описывающие границы области начальных положений фазового вектора

$$\varphi_1[x_1, x_2] = x_2 - \frac{4}{5} * \sqrt{25 - x_1^2};$$

$$\varphi_2[x_1, x_2] = x_1 - x_2 + 5;$$

Определение точек пересечения прямой и эллипса

```
Gran = NSolve[{ $\varphi_1[x_1, x_2] == 0, \varphi_2[x_1, x_2] == 0$ }, {x1, x2}]
```

```
{ {x1 -> -5., x2 -> 0.}, {x1 -> -1.09756, x2 -> 3.90244} }
```

Решение совместной системы дифференциальных уравнений для оптимальных управлений


```
Sopr = DSolve[{ψ1'[t] == ψ2[t], ψ2'[t] == -ψ1[t]},
  {ψ1[t], ψ2[t]}, t];
{{ψ1C[t_]}, {ψ2C[t_]}} = {ψ1[t] /. Sopr, ψ2[t] /. Sopr};
Osn = DSolve[{x1'[t] == x2[t] +  $\frac{\psi1C[t]}{\sqrt{\psi1C[t]^2 + \psi2C[t]^2}}$ ,
  x2'[t] == -x1[t] +  $\frac{\psi2C[t]}{\sqrt{\psi1C[t]^2 + \psi2C[t]^2}}$ },
  {x1[t], x2[t]}, t];
{{x1C[t]}, {x2C[t]}} = {x1[t] /. Osn, x2[t] /. Osn};
{x1[t_], x2[t_], ψ1[t_], ψ2[t_]} =
{x1C[t], x2C[t], ψ1C[t], ψ2C[t]} /.
{C[1] → c1, C[2] → c2, C[3] → c3, C[4] → c4}
```

Случай 1

Построение фундаментальной матрицы Коши

```
Resh1 =
DSolve[{x11'[t] == x21[t], x21'[t] == -x11[t],
  x11[0] == 1, x21[0] == 0}, {x11[t], x21[t]}, t];
Resh2 =
DSolve[{x12'[t] == x22[t], x22'[t] == -x12[t],
  x12[0] == 0, x22[0] == 1}, {x12[t], x22[t]}, t];
{{x11[t]}, {x12[t]}, {x21[t]}, {x22[t]}} =
{x11[t] /. Resh1, x12[t] /. Resh2, x21[t] /. Resh1,
  x22[t] /. Resh2};
X[t_, τ_] =  $\begin{pmatrix} x11[t] & x12[t] \\ x21[t] & x22[t] \end{pmatrix}$  /. t → t - τ
{{Cos[t - τ], Sin[t - τ]}, {-Sin[t - τ], Cos[t - τ]}}
```

Вычисление внеинтегрального слагаемого

```
x0 =  $\begin{pmatrix} x10 \\ x20 \end{pmatrix}$ ; L =  $\begin{pmatrix} 11 \\ 12 \end{pmatrix}$ ; U =  $\begin{pmatrix} u1 \\ u2 \end{pmatrix}$ ;
Transpose[X[π, 0].x0].L
{{-11 x10 - 12 x20}}
```

Вычисление подынтегрального слагаемого

```
Collect[Part[Transpose[X[π, τ].U].L, 1, 1], {u1, u2}]
u2 (-12 Cos[τ] + 11 Sin[τ]) + u1 (-11 Cos[τ] - 12 Sin[τ])
{a1, a2} = {(-12 Cos[τ] + 11 Sin[τ]),
  (-11 Cos[τ] - 12 Sin[τ])};
Simplify[ $\sqrt{a1^2 + a2^2}$ ]
```

$$\sqrt{11^2 + 12^2}$$

Вычисление максимина

```
Aw = Array[aw, 200]; Bw = Array[bw, 200];
F[x_, l1_] = -11 * x + Sqrt[1 - 11^2] * (4/5) * Sqrt[25 - x^2];
F1[x_, l1_] = -11 * x - Sqrt[1 - 11^2] * (4/5) * Sqrt[25 - x^2];
δ = (-1.09756 - (-5)) / 100;
Do[l1 = -1 + (j/100); x = -5; S = F[x, l1];
  Do[If[F[x, l1] > F[x + δ * i, l1], S = F[x + δ * i, l1]],
    {i, 0, 100}]; aw[j] = S, {j, 0, 200}];
Do[l1 = -1 + (j/100); x = -5; S = F1[x, l1];
  Do[If[F1[x, l1] > F1[x + δ * i, l1], S = F1[x + δ * i, l1]],
    {i, 0, 100}]; bw[j] = S, {j, 0, 200}];
Max[Max[Aw], Max[Bw]]
```

3.52737

Случай 3

```
Prim =
NSolve[{C1 == μ2, C2 == -μ2, x10 - x20 + 5 == 0, C3 == x10,
  C4 == x20, -C1 == 6 * ( (π * C1) / (Sqrt[C1^2 + C2^2]) + C3),
  -C2 == 4 * ( (π * C2) / (Sqrt[C1^2 + C2^2]) + C4)},
{C1, C2, C3, C4, μ2, x10, x20}];
{{C1}, {C2}, {C3}, {C4}, {μ2}, {x10}, {x20}} =
{C1 /. Prim, C2 /. Prim, C3 /. Prim, C4 /. Prim,
μ2 /. Prim, x10 /. Prim, x20 /. Prim}
```

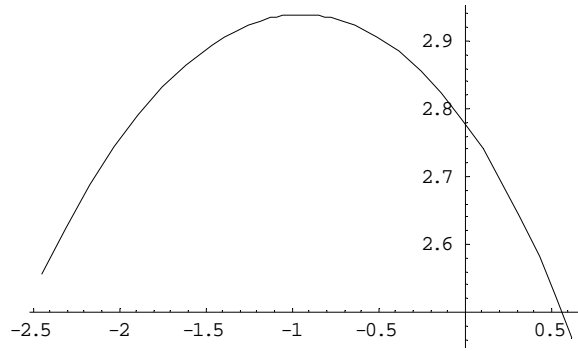
Вычисление оптимального значения функционала

$$3 * x1[\pi]^2 + 2 * x2[\pi]^2$$

0.372455

Оптимальная траектория

```
ParametricPlot[{x1[t], x2[t]}, {t, 0, 1}]
```



- Graphics -

Случай 4

```
Clear[C1, C2, C3, C4, μ2, x10, x20]
```

Первое решение

```
{x1, x2} = {x1 /. Part[Gran, 1, 1], x2 /. Part[Gran, 1, 2]}
```

```
NSolve[{C1 == μ1 *  $\frac{4 * x1}{5 * \sqrt{25 - x1^2}}$  + μ2, C2 == μ1 - μ2,
C3 == x1, C4 == x2, -C1 == 6 *  $\left(\frac{\pi * C1}{\sqrt{C1^2 + C2^2}} + C3\right)$ ,
-C2 == 4 *  $\left(\frac{\pi * C2}{\sqrt{C1^2 + C2^2}} + C4\right)$ }, {C1, C2, C3, C4, μ1, μ2}]
```

```
{{C1 → 11.1504, C2 → 0., C3 → -5., C4 → 0.,
μ1 → -8.79207 × 10-7, μ2 → -8.79207 × 10-7}}
```

Второе решение

```
{x1, x2} = {x1 /. Part[Gran, 2, 1], x2 /. Part[Gran, 2, 2]}
```

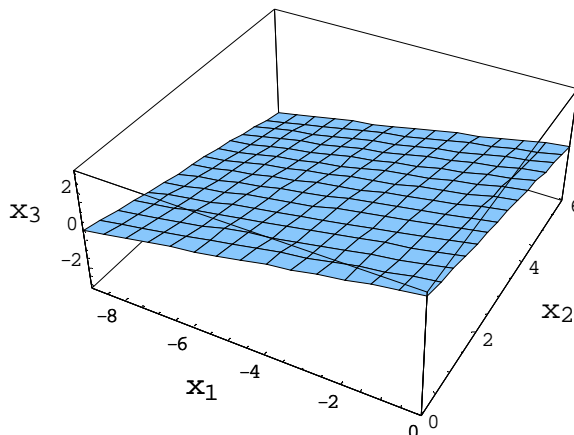
```
NSolve[{C1 == μ1 *  $\frac{4 * x1}{5 * \sqrt{25 - x1^2}}$  + μ2, C2 == μ1 - μ2,
C3 == x1, C4 == x2, -C1 == 6 *  $\left(\frac{\pi * C1}{\sqrt{C1^2 + C2^2}} + C3\right)$ ,
-C2 == 4 *  $\left(\frac{\pi * C2}{\sqrt{C1^2 + C2^2}} + C4\right)$ }, {C1, C2, C3, C4, μ1, μ2}]
```

```
{{C1 → 1.09307, C2 → -3.58865, C3 → -1.09756,
C4 → 3.90244, μ1 → -3.04339, μ2 → 0.545264}}
```

Пример 2.10

Множество S_0

```
Plot3D[3 * (1 +  $\frac{1}{9}$  * x1 -  $\frac{1}{6}$  x2), {x1, -9, 0},
{x2, 0, 6}, AxesLabel -> {"x1", "x2", "x3"}]
```



- SurfaceGraphics -

Интегрирование сопряженной системы

Sopr =

```
NDSolve[
{ψ1'[t] == -2 * ψ1[t] - 10 * ψ2[t] - 2 * ψ3[t],
ψ2'[t] == -2 * ψ1[t] + ψ2[t] + ψ3[t],
ψ3'[t] == 30 * ψ1[t] + 35 * ψ2[t] - ψ3[t],
ψ1[1] == -1.0, ψ2[1] == -2., ψ3[1] == 1.},
{ψ1[t], ψ2[t], ψ3[t]}, {t, 0, 1}];
{{ψ1[t_]}, {ψ2[t_]}, {ψ3[t_]}} =
{ψ1[t] /. Sopr, ψ2[t] /. Sopr, ψ3[t] /. Sopr}
{{InterpolatingFunction[{{0., 1.}}, <>][t]},
{InterpolatingFunction[{{0., 1.}}, <>][t]},
{InterpolatingFunction[{{0., 1.}}, <>][t]}}
```

Определение начальных условий

Nach =

```
NSolve[{- $\frac{1}{9}$  * μ1 + μ2 == ψ1[0],  $\frac{1}{6}$  * μ1 - μ3 == ψ2[0],
 $\frac{1}{3}$  * μ1 - μ4 == ψ3[0],
μ1 * (- $\frac{1}{9}$  * x10 +  $\frac{1}{6}$  * x20 +  $\frac{1}{3}$  * x30 - 1) == 0,
μ2 * x10 == 0, μ3 * x20 == 0, μ4 * x30 == 0},
{μ1, μ2, μ3, μ4, x10, x20, x30}]
```

ПРИЛОЖЕНИЕ

```
{ {μ1 → -1070.08, μ2 → 0., μ3 → -51.1497,
  μ4 → -1040.07, x10 → -9., x20 → 0., x30 → 0.},
  {μ1 → 2050.13, μ2 → 346.69, μ3 → 468.885,
  μ4 → 0., x10 → 0., x20 → 0., x30 → 3.},
  {μ1 → -763.182, μ2 → 34.0998, μ3 → 0.,
  μ4 → -937.77, x10 → 0., x20 → 6., x30 → 0.},
  {μ1 → 0., μ2 → 118.898, μ3 → 127.197,
  μ4 → -683.376, x10 → 0., x20 → 0., x30 → 0.}}

{x10, x20, x30} = {x10, x20, x30} /. Part[Nach, 2]

{0., 0., 3.}
```

Интегрирование основной системы дифференциальных уравнений с оптимальными управлениями и оптимальными начальными условиями

```
Osn =
NDSolve[
  {x1'[t] == 2 * x1[t] + 2 * x2[t] - 30 * x3[t] +
    Sign[ψ1[t]],
  x2'[t] == 10 * x1[t] - x2[t] - 35 * x3[t] +
    Sign[ψ2[t]],
  x3'[t] == 2 * x1[t] - x2[t] + x3[t] + Sign[ψ3[t]],
  x1[0] == x10, x2[0] == x20, x3[0] == x30},
  {x1[t], x2[t], x3[t]}, {t, 0, 1}];
{{x1[t_]}, {x2[t_]}, {x3[t_]}} =
{x1[t] /. Osn, x2[t] /. Osn, x3[t] /. Osn}

{{InterpolatingFunction[{{0., 1.}}, <>][t]},
  InterpolatingFunction[{{0., 1.}}, <>][t]},
  InterpolatingFunction[{{0., 1.}}, <>][t]}}
```

Вычисление оптимального значения функционала

```
x1[1] + 2 * x2[1] - x3[1]
-2344.02
```

Пример 2.11

Построение столбцов матрицы Коши

Resh1 =

```
NDSolve[{x11'[t] == x31[t], x21'[t] == x41[t],
  x31'[t] == Cos[t] * x31[t] + t * x41[t],
  x41'[t] ==  $\frac{1}{t+1}$  * x31[t] + Sin[t] * x41[t], x11[0] == 1,
  x21[0] == 0, x31[0] == 0, x41[0] == 0},
  {x11[t], x21[t], x31[t], x41[t]}, {t, 0, 1}];
```

Resh2 =

```
NDSolve[{x12'[t] == x32[t], x22'[t] == x42[t],
  x32'[t] == Cos[t] * x32[t] + t * x42[t],
  x42'[t] ==  $\frac{1}{t+1}$  * x32[t] + Sin[t] * x42[t], x12[0] == 0,
  x22[0] == 1, x32[0] == 0, x42[0] == 0},
  {x12[t], x22[t], x32[t], x42[t]}, {t, 0, 1}];
```

Resh3 =

```
NDSolve[{x13'[t] == x33[t], x23'[t] == x43[t],
  x33'[t] == Cos[t] * x33[t] + t * x43[t],
  x43'[t] ==  $\frac{1}{t+1}$  * x33[t] + Sin[t] * x43[t], x13[0] == 0,
  x23[0] == 0, x33[0] == 1, x43[0] == 0},
  {x13[t], x23[t], x33[t], x43[t]}, {t, 0, 1}];
```

Resh4 =

```
NDSolve[{x14'[t] == x34[t], x24'[t] == x44[t],
  x34'[t] == Cos[t] * x34[t] + t * x44[t],
  x44'[t] ==  $\frac{1}{t+1}$  * x34[t] + Sin[t] * x44[t], x14[0] == 0,
  x24[0] == 0, x34[0] == 0, x44[0] == 1},
  {x14[t], x24[t], x34[t], x44[t]}, {t, 0, 1}];
```

```
{{x11[t]}, {x21[t]}, {x31[t]}, {x41[t]}} =
{x11[t] /. Resh1, x21[t] /. Resh1, x31[t] /. Resh1,
  x41[t] /. Resh1};
{{x12[t]}, {x22[t]}, {x32[t]}, {x42[t]}} =
{x12[t] /. Resh2, x22[t] /. Resh2, x32[t] /. Resh2,
  x42[t] /. Resh2};
{{x13[t]}, {x23[t]}, {x33[t]}, {x43[t]}} =
{x13[t] /. Resh3, x23[t] /. Resh3, x33[t] /. Resh3,
  x43[t] /. Resh3};
{{x14[t]}, {x24[t]}, {x34[t]}, {x44[t]}} =
{x14[t] /. Resh4, x24[t] /. Resh4, x34[t] /. Resh4,
  x44[t] /. Resh4};
```

Построение фундаментальной матрицы Коши X[1,s]

$$X[t_] = \begin{pmatrix} x11[t] & x12[t] & x13[t] & x14[t] \\ x21[t] & x22[t] & x23[t] & x24[t] \\ x31[t] & x32[t] & x33[t] & x34[t] \\ x41[t] & x42[t] & x43[t] & x44[t] \end{pmatrix}; Y[s] = \text{Inverse}[X[s]];$$

$$MK[s_] = X[1] \cdot Y[s];$$

Построение слагаемого для начальных условий

$$x0 = \begin{pmatrix} x10 \\ x20 \\ x30 \\ x40 \end{pmatrix}; l = \begin{pmatrix} l1 \\ l2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$Z = \text{Part}[\text{Transpose}[MK[0] \cdot x0] \cdot l, 1, 1, 1]$$

$$l1 (1 \cdot x10 + 0 \cdot x20 + 1.7491 x30 + 0.243323 x40) + \\ l2 (0 \cdot x10 + 1 \cdot x20 + 0.629938 x30 + 1.22311 x40)$$

Решение задачи минимизации Z по переменным x0

$$\text{Array}[\alpha, 4]; \text{Array}[\beta, 4];$$

$$\{\alpha[1], \alpha[2], \alpha[3], \alpha[4]\} = \{0.2, 0.1, 0.1, 0.2\};$$

$$\{\beta[1], \beta[2], \beta[3], \beta[4]\} =$$

$$\{\text{Coefficient}[Z, x10], \text{Coefficient}[Z, x20], \\ \text{Coefficient}[Z, x30], \text{Coefficient}[Z, x40]\};$$

$$K = \left(\sum_{i=1}^4 \alpha[i]^2 * \beta[i]^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\{x10, x20, x30, x40\} = \\ \left\{ \frac{-\beta[1] * \alpha[1]^2}{K}, \frac{-\beta[2] * \alpha[2]^2}{K}, \frac{-\beta[3] * \alpha[3]^2}{K}, \right. \\ \left. \frac{-\beta[4] * \alpha[4]^2}{K} \right\};$$

Построение подынтегрального выражения и оптимальной стратегии

$$\{\{f1[t_]\}, \{f2[t_]\}, \{f3[t_]\}, \{f4[t_]\}\} = \text{Transpose}[MK[t]] \cdot l;$$

$$f[s_] = \sqrt{f3[s]^2 + f4[s]^2}; U1[s_, l1_, l2_] = -\frac{f3[s]}{f[s]};$$

$$U2[s_, l1_, l2_] = -\frac{f4[s]}{f[s]};$$

Решение задачи математического программирования

```

l1 = -1; l2 = 0;
S = -1 - 5 * l1 + 4 *  $\sqrt{1 - l1^2}$  - K - NIntegrate[f[s], {s, 0, 1}];
j = 0; l10 = l1; l20 = l2;
Do[l1 = -1 +  $\frac{i}{1000}$ ; l2 = - $\sqrt{1 - l1^2}$ ;
  W = -1 - 5 * l1 - 4 * l2 - K - NIntegrate[f[s], {s, 0, 1}];
  If[W > S, S = W; l10 = l1; l20 = l2; j = i], {i, 215, 220}];
Print[j, " ", l10, " ", l20, " ", "S=", S]
219 -0.781 -0.624531 S=4.28676

```

Построение оптимальной траектории и оптимального начального положения

```

{l1, l2} = {l10, l20}; {x10, x20, x30, x40}
{0.101009, 0.0201932, 0.0568892, 0.123372}
Osn = NDSolve[{y1'[t] == y3[t], y2'[t] == y4[t],
  y3'[t] == Cos[t] * y3[t] + t * y4[t] + U1[t, l10, l20],
  y4'[t] ==  $\frac{1}{t+1}$  * y3[t] + Sin[t] * y4[t] + U2[t, l10, l20],
  y1[0] == x10, y2[0] == x20, y3[0] == x30, y4[0] == x40},
  {y1[t], y2[t], y3[t], y4[t]}, {t, 0, 1}];
{{y1[t_]}, {y2[t_]}, {y3[t_]}, {y4[t_]}} =
{y1[t] /. Osn, y2[t] /. Osn, y3[t] /. Osn, y4[t] /. Osn};

```

Вычисление расстояния до терминального множества

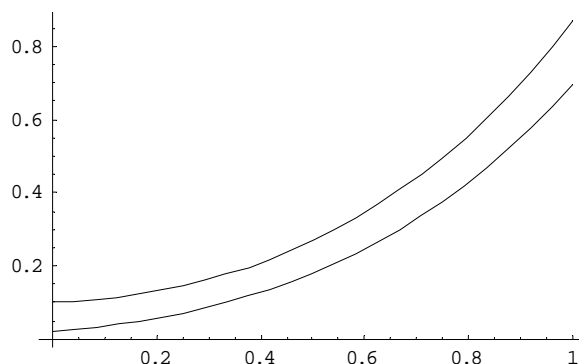
```

 $\sqrt{(y1[1] - 5)^2 + (y2[1] - 4)^2} - 1$ 
4.28675

```

Оптимальный закон движения

```
Plot[{y1[t], y2[t]}, {t, 0, 1}]
```



- Graphics -

Пример 2.12

Построение столбцов матрицы Коши

Resh1 =

```
NDSolve[{x11'[t] == x31[t], x21'[t] == x41[t],
  x31'[t] == Cos[t] * x31[t] + t * x41[t],
  x41'[t] ==  $\frac{1}{t+1}$  * x31[t] + Sin[t] * x41[t], x11[0] == 1,
  x21[0] == 0, x31[0] == 0, x41[0] == 0},
  {x11[t], x21[t], x31[t], x41[t]}, {t, 0, 1}];
```

Resh2 =

```
NDSolve[{x12'[t] == x32[t], x22'[t] == x42[t],
  x32'[t] == Cos[t] * x32[t] + t * x42[t],
  x42'[t] ==  $\frac{1}{t+1}$  * x32[t] + Sin[t] * x42[t], x12[0] == 0,
  x22[0] == 1, x32[0] == 0, x42[0] == 0},
  {x12[t], x22[t], x32[t], x42[t]}, {t, 0, 1}];
```

Resh3 =

```
NDSolve[{x13'[t] == x33[t], x23'[t] == x43[t],
  x33'[t] == Cos[t] * x33[t] + t * x43[t],
  x43'[t] ==  $\frac{1}{t+1}$  * x33[t] + Sin[t] * x43[t], x13[0] == 0,
  x23[0] == 0, x33[0] == 1, x43[0] == 0},
  {x13[t], x23[t], x33[t], x43[t]}, {t, 0, 1}];
```

Resh4 =

```
NDSolve[{x14'[t] == x34[t], x24'[t] == x44[t],
  x34'[t] == Cos[t] * x34[t] + t * x44[t],
  x44'[t] ==  $\frac{1}{t+1}$  * x34[t] + Sin[t] * x44[t], x14[0] == 0,
  x24[0] == 0, x34[0] == 0, x44[0] == 1},
  {x14[t], x24[t], x34[t], x44[t]}, {t, 0, 1}];
```

```
{{x11[t]}, {x21[t]}, {x31[t]}, {x41[t]}} =
{x11[t] /. Resh1, x21[t] /. Resh1, x31[t] /. Resh1,
  x41[t] /. Resh1};
{{x12[t]}, {x22[t]}, {x32[t]}, {x42[t]}} =
{x12[t] /. Resh2, x22[t] /. Resh2, x32[t] /. Resh2,
  x42[t] /. Resh2};
{{x13[t]}, {x23[t]}, {x33[t]}, {x43[t]}} =
{x13[t] /. Resh3, x23[t] /. Resh3, x33[t] /. Resh3,
  x43[t] /. Resh3};
{{x14[t]}, {x24[t]}, {x34[t]}, {x44[t]}} =
{x14[t] /. Resh4, x24[t] /. Resh4, x34[t] /. Resh4,
  x44[t] /. Resh4}
```

Построение фундаментальной матрицы Коши X[1,s]

$$X[t_] = \begin{pmatrix} x11[t] & x12[t] & x13[t] & x14[t] \\ x21[t] & x22[t] & x23[t] & x24[t] \\ x31[t] & x32[t] & x33[t] & x34[t] \\ x41[t] & x42[t] & x43[t] & x44[t] \end{pmatrix};$$

Y[s] = Inverse[X[s]];

МК[s_] = X[1].Y[s];

Построение слагаемого для начальных условий

$$x0 = \begin{pmatrix} x10 \\ x20 \\ x30 \\ x40 \end{pmatrix}; l = \begin{pmatrix} l1 \\ l2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Z = Part[Transpose[МК[0].x0].l, 1, 1];

Решение задачи минимизации Z по переменным x0

Array[α, 4]; Array[β, 4];

{α[1], α[2], α[3], α[4]} = {0.2, 0.1, 0.1, 0.2};

{β[1], β[2], β[3], β[4]} =

{Coefficient[Z, x10], Coefficient[Z, x20],
Coefficient[Z, x30], Coefficient[Z, x40]};

Минимальное значение Z без учета знака "-" и оптимальное начальное положение (в зависимости от l)

$$K = \left(\sum_{i=1}^4 \alpha[i]^2 * \beta[i]^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

{x10, x20, x30, x40} =

$$\left\{ \frac{-\beta[1] * \alpha[1]^2}{K}, \frac{-\beta[2] * \alpha[2]^2}{K}, \frac{-\beta[3] * \alpha[3]^2}{K}, \frac{-\beta[4] * \alpha[4]^2}{K} \right\};$$

Построение подынтегрального выражения и оптимальной стратегии

{{f1[t_]}, {f2[t_]}, {f3[t_]}, {f4[t_]}} =

Transpose[МК[t]].l; f[s_] = Abs[f3[s] + f4[s]];

U1[s_, l1_, l2_] = -Sign[f3[s]];

U2[s_, l1_, l2_] = -Sign[f4[s]];

Решение задачи математического программирования

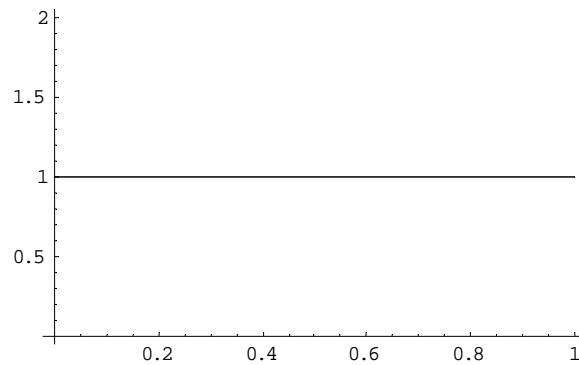
```

l1 = -1; l2 = 0;
S = -1 - 5 * l1 + 4 *  $\sqrt{1 - l1^2}$  - K -
  NIntegrate[f[s], {s, 0, 1}]; j = 0; l10 = l1; l20 = l2;
Do[l1 = -1 +  $\frac{i}{1000.}$ ; l2 = - $\sqrt{1 - l1^2}$ ;
  W = -1 - 5 * l1 - 4 * l2 - K - NIntegrate[f[s], {s, 0, 1}];
  If[W > S, S = W; l10 = l1; l20 = l2; j = i], {i, 205, 215}];
Print[j, " ", l10, " ", l20, " ", "S=", S]
206    -0.794    -0.607918    S=3.97259

```

Анализ оптимального управления

```
Plot[{U1[t, l10, l20], U2[t, l10, l20]}, {t, 0, 1}]
```



- Graphics -

Построение оптимального начального положения

```

{l1, l2} = {l10, l20}; {x10, x20, x30, x40}
{0.102825, 0.0196817, 0.057361, 0.121311}

```

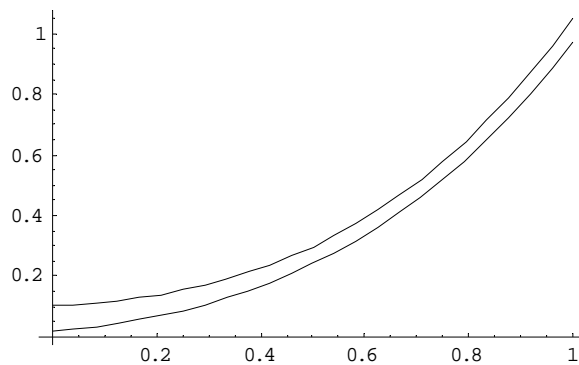
Построение оптимального закона движения

```

Osn = NDSolve[{y1'[t] == y3[t], y2'[t] == y4[t],
  y3'[t] == Cos[t] * y3[t] + t * y4[t] + U1[t, l10, l20],
  y4'[t] ==  $\frac{1}{t+1}$  * y3[t] + Sin[t] * y4[t] + U2[t, l10, l20],
  y1[0] == x10, y2[0] == x20, y3[0] == x30, y4[0] == x40},
  {y1[t], y2[t], y3[t], y4[t]}, {t, 0, 1}];
{{y1[t_]}, {y2[t_]}, {y3[t_]}, {y4[t_]}} =
  {y1[t] /. Osn, y2[t] /. Osn, y3[t] /. Osn, y4[t] /. Osn};
Plot[{y1[t], y2[t]}, {t, 0, 1}]

```

ПРИЛОЖЕНИЕ



- Graphics -

Вычисление оптимального расстояния до терминального множества

$$\sqrt{(y1[1] - 5)^2 + (y2[1] - 4)^2} - 1$$

3.97259

Пример 3.1.

Построение фундаментальной матрицы Коши

```
Resh1 =
DSolve[{x11'[t] == x21[t], x21'[t] == -x11[t], x11[0] == 1,
x21[0] == 0}, {x11[t], x21[t]}, t];
Resh2 =
DSolve[{x12'[t] == x22[t], x22'[t] == -x12[t], x12[0] == 0,
x22[0] == 1}, {x12[t], x22[t]}, t];
{{x11[t]}, {x21[t]}} = {x11[t] /. Resh1, x21[t] /. Resh1};
{{x12[t]}, {x22[t]}} = {x12[t] /. Resh2, x22[t] /. Resh2};
X[t, s] = ( x11[t]  x12[t]
            x21[t]  x22[t] ) /. t -> t - s;
MatrixForm[X[t, s]]
( Cos[s-t]  -Sin[s-t]
  Sin[s-t]   Cos[s-t] )
```

Ввод оптимального управления

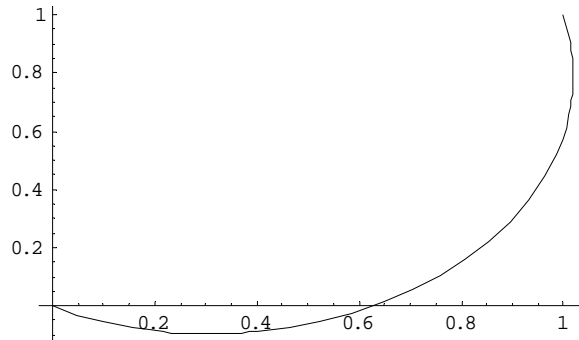
```
{u10[t_], u20[t_]} =
{ 1/sqrt(2) (- (Cos[sqrt(2)] + Sin[sqrt(2)]) * Cos[sqrt(2) - t] +
(-Sin[sqrt(2)] + Cos[sqrt(2)]) * Sin[sqrt(2) - t]),
  1/sqrt(2) (- (Cos[sqrt(2)] + Sin[sqrt(2)]) * Sin[sqrt(2) - t] -
(-Sin[sqrt(2)] + Cos[sqrt(2)]) * Cos[sqrt(2) - t])};
```

Интегрирование уравнений движения для оптимального управления

```
Fin = DSolve[{x1'[t] == x2[t] + u10[t], x2'[t] == -x1[t] + u20[t],
  x1[0] == 1, x2[0] == 1}, {x1[t], x2[t]}, t];
{x1[t_]} = x1[t] /. Fin;
{x2[t_]} = x2[t] /. Fin;
```

Оптимальная траектория

```
ParametricPlot[{x1[t], x2[t]}, {t, 0,  $\sqrt{2}$ }]
```



- Graphics -

Пример 3.2.

Ввод начальных условий

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
{{1}, {1}}
```

Построение фундаментальной матрицы Коши

```
Resh1 =
```

```
NDSolve[{x11'[t] == Cos[t] * x11[t] + t * x21[t],
  x21'[t] ==  $\frac{1}{t+1}$  * x11[t] + Sin[t] * x21[t], x11[0] == 1,
  x21[0] == 0}, {x11[t], x21[t]}, {t, 0, 1}];
```

```
Resh2 =
```

```
NDSolve[{x12'[t] == Cos[t] * x12[t] + t * x22[t],
  x22'[t] ==  $\frac{1}{t+1}$  * x12[t] + Sin[t] * x22[t], x12[0] == 0,
  x22[0] == 1}, {x12[t], x22[t]}, {t, 0, 1}];
```

```
{{x11[t]}, {x21[t]}} = {x11[t] /. Resh1, x21[t] /. Resh1};
```

```
{{x12[t]}, {x22[t]}} = {x12[t] /. Resh2, x22[t] /. Resh2};
```

```
X[t_] =  $\begin{pmatrix} x11[t] & x12[t] \\ x21[t] & x22[t] \end{pmatrix}$ ; Y[s] = Inverse[X[s]];
```

```
MK[T_, s_] = X[T].Y[s];
```

Построение функции ипсилон

ПРИЛОЖЕНИЕ

```
l =  $\begin{pmatrix} l1 \\ l2 \end{pmatrix}$ ; Vne = Part[Transpose[(MK[T, 0].x0)].1, 1, 1]; Vsp = Transpose[MK[T, s]].1;
Pod[T_, s_, l1_, l2_] = (Part[Vsp, 1, 1]^2 + Part[Vsp, 2, 1]^2)^(1/2);
Eps[T_, l1_, l2_] = Vne - 3 * NIntegrate[Pod[T, s, l1, l2], {s, 0, T}]
2.27631 l1 + 2.08901 l2 - 3 NIntegrate[Pod[T, s, l1, l2], {s, 0, T}]
```

Ввод оптимального времени перехода

```
T = 0.662;
```

Определение опорного вектора

```
A = FindMinimum[-Eps[T, l1, l2] + 100 * (l1^2 + l2^2 - 1)^2, {l1, 0.1, 0.2}, {l2, 0.1, 0.2}];
{l10, l20} = {l1 /. Part[A, 2, 1], l2 /. Part[A, 2, 2]};
l0 = {l10, l20}
```

```
{0.617752, 0.786373}
```

```
Eps[T, l10, l20]
```

```
-0.0000122584
```

Построение оптимального управления

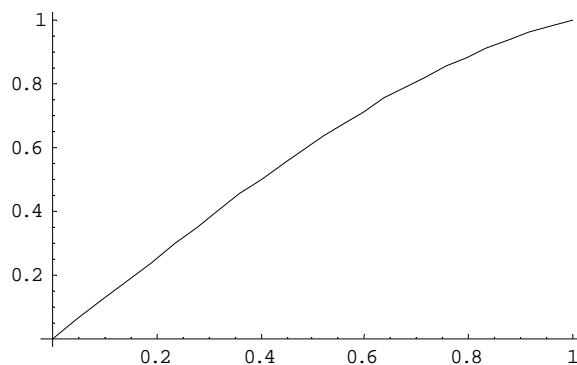
```
Upr = Transpose[MK[T, t]].l0; u10[t_] = -3 *  $\frac{\text{Part}[Upr, 1]}{(\text{Part}[Upr, 1]^2 + \text{Part}[Upr, 2]^2)^{1/2}}$ ;
u20[t_] = -3 *  $\frac{\text{Part}[Upr, 2]}{(\text{Part}[Upr, 1]^2 + \text{Part}[Upr, 2]^2)^{1/2}}$ ;
```

Интегрирование уравнений движения для оптимального управления

```
Fin = NDSolve[{x1'[t] == Cos[t] * x1[t] + t * x2[t] + u10[t],
x2'[t] ==  $\frac{1}{t + 1}$  * x1[t] + Sin[t] * x2[t] + u20[t], x1[0] == 1,
x2[0] == 1}, {x1[t], x2[t]}, {t, 0, T}];
{x1[t_]} = x1[t] /. Fin;
{x2[t_]} = x2[t] /. Fin;
```

Оптимальная траектория

```
ParametricPlot[{x1[t], x2[t]}, {t, 0, T}]
```



- Graphics -

Проверка попадания в начало координат

$\{x1[T], x2[T]\}$

$\{-0.0000134271, -0.0000148833\}$

Пример 4.3

Ввод начального и конечного положений фазового вектора

$x0 = \{-3, 2, 1\};$

$xT = \{-80.7746, -147.179, -8.94415\}$

$\{-80.7746, -147.179, -8.94415\}$

Построение фундаментальной матрицы Коши

Resh1 =

```
DSolve[{x11'[t] == 2 * x11[t] + 2 * x21[t] - 30 * x31[t],
        x21'[t] == 10 * x11[t] - x21[t] - 35 * x31[t],
        x31'[t] == 2 * x11[t] - x21[t] + x31[t], x11[0] == 1,
        x21[0] == 0, x31[0] == 0}, {x11[t], x21[t], x31[t]},
        t];
```

Resh2 =

```
DSolve[{x12'[t] == 2 * x12[t] + 2 * x22[t] - 30 * x32[t],
        x22'[t] == 10 * x12[t] - x22[t] - 35 * x32[t],
        x32'[t] == 2 * x12[t] - x22[t] + x32[t], x12[0] == 0,
        x22[0] == 1, x32[0] == 0}, {x12[t], x22[t], x32[t]},
        t];
```

Resh3 =

```
DSolve[{x13'[t] == 2 * x13[t] + 2 * x23[t] - 30 * x33[t],
        x23'[t] == 10 * x13[t] - x23[t] - 35 * x33[t],
        x33'[t] == 2 * x13[t] - x23[t] + x33[t], x13[0] == 0,
        x23[0] == 0, x33[0] == 1}, {x13[t], x23[t], x33[t]},
        t]; {{x11[t, τ]}, {x21[t, τ]}, {x31[t, τ]}} =
```

```
{Re[x11[t]] /. Resh1, Re[x21[t]] /. Resh1,
 Re[x31[t]] /. Resh1} /. {t → t - τ};
```

```
{{x12[t, τ]}, {x22[t, τ]}, {x32[t, τ]}} =
```

```
{Re[x12[t]] /. Resh2, Re[x22[t]] /. Resh2,
 Re[x32[t]] /. Resh2} /. {t → t - τ};
```

```
{{x13[t, τ]}, {x23[t, τ]}, {x33[t, τ]}} =
```

```
{Re[x13[t]] /. Resh3, Re[x23[t]] /. Resh3,
 Re[x33[t]] /. Resh3} /. {t → t - τ};
```

$$x[t, \tau] = \begin{pmatrix} x11[t, \tau] & x12[t, \tau] & x13[t, \tau] \\ x21[t, \tau] & x22[t, \tau] & x23[t, \tau] \\ x31[t, \tau] & x32[t, \tau] & x33[t, \tau] \end{pmatrix};$$

Построение матрицы перехода

$МК[\tau] = X[\tau, \tau] /. \tau \rightarrow 1;$
 $\{h1[\tau_], h2[\tau_], h3[\tau_]\} = МК[\tau];$

Вычисление коэффициентов в системе линейных алгебраических уравнений

$\{a11, a12, a13\} = \{NIntegrate[h1[\tau].h1[\tau], \{\tau, 0, 1\}],$
 $NIntegrate[h1[\tau].h2[\tau], \{\tau, 0, 1\}], NIntegrate[h1[\tau].h3[\tau], \{\tau, 0, 1\}]\}$

{4770.34, 8405.45, 469.812}

$\{a21, a22, a23\} = \{NIntegrate[h2[\tau].h1[\tau], \{\tau, 0, 1\}],$
 $NIntegrate[h2[\tau].h2[\tau], \{\tau, 0, 1\}], NIntegrate[h2[\tau].h3[\tau], \{\tau, 0, 1\}]\}$

{8405.45, 14824.4, 832.786}

$\{a31, a32, a33\} =$
 $\{NIntegrate[h3[\tau].h1[\tau], \{\tau, 0, 1\}],$
 $NIntegrate[h3[\tau].h2[\tau], \{\tau, 0, 1\}],$
 $NIntegrate[h3[\tau].h3[\tau], \{\tau, 0, 1\}]\}$

{469.812, 832.786, 48.3062}

Решение системы линейных алгебраических уравнений

$\{c1, c2, c3\} = XT - (МК[\tau] /. \tau \rightarrow 0).X0;$
 $V = Solve[\{c1 == a11 * v1 + a12 * v2 + a13 * v3,$
 $c2 == a21 * v1 + a22 * v2 + a23 * v3,$
 $c3 == a31 * v1 + a32 * v2 + a33 * v3\}, \{v1, v2, v3\}];$
 $\{\{v1\}, \{v2\}, \{v3\}\} = \{v1 /. V, v2 /. V, v3 /. V\}$

{{0.0682083}, {-0.0954224}, {0.871024}}

Построение оптимального управления

$\{u10[t_], u20[t_], u30[t_]\} =$
 $v1 * h1[t] + v2 * h2[t] + v3 * h3[t];$

Вычисление оптимального значения функционала

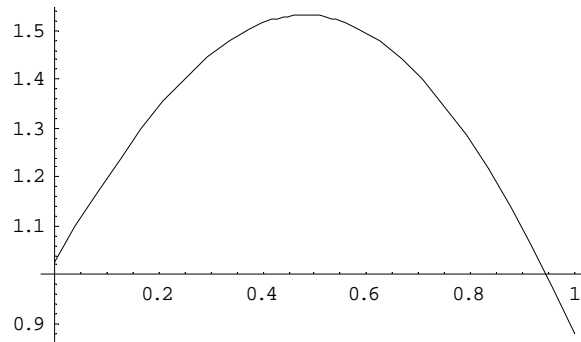
$(NIntegrate[\{u10[t], u20[t], u30[t]\}.$
 $\{u10[t], u20[t], u30[t]\}, \{t, 0, 1\}]) ^ \frac{1}{2}$

1.34153

Вычисление критерия "минимум силы" на построенном управлении для примера 2

$Plot[(u10[t]^2 + u20[t]^2 + u30[t]^2) ^ \frac{1}{2}, \{t, 0, 1\}]$

ПРИЛОЖЕНИЕ



- Graphics -

```
FindMinimum[-(u10[t]^2 + u20[t]^2 + u30[t]^2)^(1/2), {t, 0, 1}]
```

```
{-1.53213, {t -> 0.480315}}
```

Построение оптимального закона движения

Resh0 =

```
NDSolve[
  {x10'[t] == 2 * x10[t] + 2 * x20[t] - 30 * x30[t] + u10[t],
   x20'[t] == 10 * x10[t] - x20[t] - 35 * x30[t] + u20[t],
   x30'[t] == 2 * x10[t] - x20[t] + x30[t] + u30[t],
   x10[0] == -3, x20[0] == 2, x30[0] == 1},
  {x10[t], x20[t], x30[t]}, {t, 0, 1}];
{{x10[t_]}, {x20[t_]}, {x30[t_]}} =
{Re[x10[t] /. Resh0], Re[x20[t] /. Resh0],
 Re[x30[t] /. Resh0]}
```

Проверка правильности вычислений

```
XT - {x10[1], x20[1], x30[1]}
```

Пример 4.4

Ввод матрицы В и конечного положения фазового вектора

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad XT = \{0.640532, 0.491302, 1.61672, 1.31002\};$$

Построение матрицы Коши и матрицы перехода

Resh1 =

```
NDSolve[{x11'[t] == x31[t], x21'[t] == x41[t],
  x31'[t] == Cos[t] * x31[t] + t * x41[t],
  x41'[t] ==  $\frac{1}{t+1}$  * x31[t] + Sin[t] * x41[t], x11[0] == 1,
  x21[0] == 0, x31[0] == 0, x41[0] == 0},
  {x11[t], x21[t], x31[t], x41[t]}, {t, 0, 1}];
```

Resh2 =

```
NDSolve[{x12'[t] == x32[t], x22'[t] == x42[t],
  x32'[t] == Cos[t] * x32[t] + t * x42[t],
  x42'[t] ==  $\frac{1}{t+1}$  * x32[t] + Sin[t] * x42[t], x12[0] == 0,
  x22[0] == 1, x32[0] == 0, x42[0] == 0},
  {x12[t], x22[t], x32[t], x42[t]}, {t, 0, 1}];
```

Resh3 =

```
NDSolve[{x13'[t] == x33[t], x23'[t] == x43[t],
  x33'[t] == Cos[t] * x33[t] + t * x43[t],
  x43'[t] ==  $\frac{1}{t+1}$  * x33[t] + Sin[t] * x43[t], x13[0] == 0,
  x23[0] == 0, x33[0] == 1, x43[0] == 0},
  {x13[t], x23[t], x33[t], x43[t]}, {t, 0, 1}];
```

Resh4 =

```
NDSolve[{x14'[t] == x34[t], x24'[t] == x44[t],
  x34'[t] == Cos[t] * x34[t] + t * x44[t],
  x44'[t] ==  $\frac{1}{t+1}$  * x34[t] + Sin[t] * x44[t], x14[0] == 0,
  x24[0] == 0, x34[0] == 0, x44[0] == 1},
  {x14[t], x24[t], x34[t], x44[t]}, {t, 0, 1}];
```

```
{{x11[t]}, {x21[t]}, {x31[t]}, {x41[t]}} =
{x11[t] /. Resh1, x21[t] /. Resh1, x31[t] /. Resh1,
  x41[t] /. Resh1};
{{x12[t]}, {x22[t]}, {x32[t]}, {x42[t]}} =
{x12[t] /. Resh2, x22[t] /. Resh2, x32[t] /. Resh2,
  x42[t] /. Resh2};
{{x13[t]}, {x23[t]}, {x33[t]}, {x43[t]}} =
{x13[t] /. Resh3, x23[t] /. Resh3, x33[t] /. Resh3,
  x43[t] /. Resh3};
{{x14[t]}, {x24[t]}, {x34[t]}, {x44[t]}} =
{x14[t] /. Resh4, x24[t] /. Resh4, x34[t] /. Resh4,
  x44[t] /. Resh4};
```

$$X[t] = \begin{pmatrix} x11[t] & x12[t] & x13[t] & x14[t] \\ x21[t] & x22[t] & x23[t] & x24[t] \\ x31[t] & x32[t] & x33[t] & x34[t] \\ x41[t] & x42[t] & x43[t] & x44[t] \end{pmatrix};$$

$$Y[s] = \text{Inverse}[X[t] /. \{t \rightarrow s\}]; \text{MK}[s] = (X[t] /. \{t \rightarrow 1\}) \cdot Y[s];$$

$$\{h1[s_], h2[s_], h3[s_], h4[s_]\} = \text{MK}[s] \cdot B;$$

Построение и решение системы линейных алгебраических уравнений

```
{a11, a12, a13, a14} =
  {NIntegrate[h1[τ].h1[τ], {τ, 0, 1}],
   NIntegrate[h1[τ].h2[τ], {τ, 0, 1}],
   NIntegrate[h1[τ].h3[τ], {τ, 0, 1}],
   NIntegrate[h1[τ].h4[τ], {τ, 0, 1}]}
{0.766436, 0.303602, 1.51071, 0.779061}
{a21, a22, a23, a24} =
  {NIntegrate[h2[τ].h1[τ], {τ, 0, 1}],
   NIntegrate[h2[τ].h2[τ], {τ, 0, 1}],
   NIntegrate[h2[τ].h3[τ], {τ, 0, 1}],
   NIntegrate[h2[τ].h4[τ], {τ, 0, 1}]}
{0.303602, 0.557218, 0.764328, 1.12012}
{a31, a32, a33, a34} =
  {NIntegrate[h3[τ].h1[τ], {τ, 0, 1}],
   NIntegrate[h3[τ].h2[τ], {τ, 0, 1}],
   NIntegrate[h3[τ].h3[τ], {τ, 0, 1}],
   NIntegrate[h3[τ].h4[τ], {τ, 0, 1}]}
{1.51071, 0.764328, 3.3364, 1.89574}
{a41, a42, a43, a44} =
  {NIntegrate[h4[τ].h1[τ], {τ, 0, 1}],
   NIntegrate[h4[τ].h2[τ], {τ, 0, 1}],
   NIntegrate[h4[τ].h3[τ], {τ, 0, 1}],
   NIntegrate[h4[τ].h4[τ], {τ, 0, 1}]}
{0.779061, 1.12012, 1.89574, 2.6037}
{c1, c2, c3, c4} = XT;
V = Solve[{c1 == a11 * v1 + a12 * v2 + a13 * v3 + a14 * v4,
  c2 == a21 * v1 + a22 * v2 + a23 * v3 + a24 * v4,
  c3 == a31 * v1 + a32 * v2 + a33 * v3 + a34 * v4,
  c4 == a41 * v1 + a42 * v2 + a43 * v3 + a44 * v4}, {v1, v2, v3, v4}];
{{v1}, {v2}, {v3}, {v4}} = {v1 /. V, v2 /. V, v3 /. V, v4 /. V}
{{-0.982227}, {-0.833006}, {0.790821}, {0.579604}}
```

Построение оптимального управления

$$\{u_{10}[t_], u_{20}[t_]\} = v_1 * h_1[t] + v_2 * h_2[t] + v_3 * h_3[t] + v_4 * h_4[t];$$

Вычисление оптимального значения функционала

$$(NIntegrate[\{u_{10}[t], u_{20}[t]\}.\{u_{10}[t], u_{20}[t]\}, \{t, 0, 1\}])^{\frac{1}{2}}$$

0.999712

Построение оптимального закона движения

Resh0 =

$$\begin{aligned} & \text{NDSolve}[\{x_{10}'[t] == x_{30}[t], x_{20}'[t] == x_{40}[t], \\ & \quad x_{30}'[t] == \text{Cos}[t] * x_{30}[t] + t * x_{40}[t] + u_{10}[t], \\ & \quad x_{40}'[t] == \frac{1}{t+1} * x_{30}[t] + \text{Sin}[t] * x_{40}[t] + u_{20}[t], \\ & \quad x_{10}[0] == 0, x_{20}[0] == 0, x_{30}[0] == 0, x_{40}[0] == 0\}, \\ & \quad \{x_{10}[t], x_{20}[t], x_{30}[t], x_{40}[t]\}, \{t, 0, 1\}]; \\ & \{\{x_{10}[t_]\}, \{x_{20}[t_]\}, \{x_{30}[t_]\}, \{x_{40}[t_]\}\} = \\ & \quad \{x_{10}[t] /. \text{Resh0}, x_{20}[t] /. \text{Resh0}, x_{30}[t] /. \text{Resh0}, \\ & \quad x_{40}[t] /. \text{Resh0}\}; \end{aligned}$$

Проверка правильности вычислений

$$\begin{aligned} & \text{XT} - \{x_{10}[1], x_{20}[1], x_{30}[1], x_{40}[1]\} \\ & \{-1.68561 \times 10^{-6}, -1.97809 \times 10^{-6}, -1.60071 \times 10^{-6}, -2.40392 \times 10^{-6}\} \end{aligned}$$

Пример 4.5

Ввод начального и конечного положений фазового вектора

$$\begin{aligned} & \text{x0} = \{-3, 2, 1\}; \\ & \text{xT} = \{-80.7746, -147.179, -8.94415\} \end{aligned}$$

$$\{-80.7746, -147.179, -8.94415\}$$

Построение фундаментальной матрицы Коши

```
Resh1 =
DSolve[{x11'[t] == 2 * x11[t] + 2 * x21[t] - 30 * x31[t],
x21'[t] == 10 * x11[t] - x21[t] - 35 * x31[t],
x31'[t] == 2 * x11[t] - x21[t] + x31[t], x11[0] == 1,
x21[0] == 0, x31[0] == 0}, {x11[t], x21[t], x31[t]},
t];
```

```
Resh2 =
DSolve[{x12'[t] == 2 * x12[t] + 2 * x22[t] - 30 * x32[t],
x22'[t] == 10 * x12[t] - x22[t] - 35 * x32[t],
x32'[t] == 2 * x12[t] - x22[t] + x32[t], x12[0] == 0,
x22[0] == 1, x32[0] == 0}, {x12[t], x22[t], x32[t]},
t];
```

```
Resh3 =
DSolve[{x13'[t] == 2 * x13[t] + 2 * x23[t] - 30 * x33[t],
x23'[t] == 10 * x13[t] - x23[t] - 35 * x33[t],
x33'[t] == 2 * x13[t] - x23[t] + x33[t], x13[0] == 0,
x23[0] == 0, x33[0] == 1}, {x13[t], x23[t], x33[t]},
t]; {{x11[t, τ]}, {x21[t, τ]}, {x31[t, τ]}} =
{Re[x11[t]] /. Resh1, Re[x21[t]] /. Resh1,
Re[x31[t]] /. Resh1} /. {t → t - τ};
{{x12[t, τ]}, {x22[t, τ]}, {x32[t, τ]}} =
{Re[x12[t]] /. Resh2, Re[x22[t]] /. Resh2,
Re[x32[t]] /. Resh2} /. {t → t - τ};
{{x13[t, τ]}, {x23[t, τ]}, {x33[t, τ]}} =
{Re[x13[t]] /. Resh3, Re[x23[t]] /. Resh3,
Re[x33[t]] /. Resh3} /. {t → t - τ};
```

$$X[t, \tau] = \begin{pmatrix} x11[t, \tau] & x12[t, \tau] & x13[t, \tau] \\ x21[t, \tau] & x22[t, \tau] & x23[t, \tau] \\ x31[t, \tau] & x32[t, \tau] & x33[t, \tau] \end{pmatrix};$$

Построение матрицы перехода

```
MK[τ] = X[t, τ] /. t → 1;
{h1[τ_], h2[τ_], h3[τ_]} = MK[τ]
```

```
{c1, c2, c3} = XT - (MK[τ] /. τ → 0) . X0
```

```
{-67.4743, -115.885, -5.34546}
```

```
Pod[τ_, l2_, l3_] =
(( (1 - (l2 * c2 + l3 * c3) / c1) * h1[τ] + l2 * h2[τ] + l3 * h3[τ] ) .
( (1 - (l2 * c2 + l3 * c3) / c1) * h1[τ] + l2 * h2[τ] + l3 * h3[τ] )) ^ 1/2
```

```
Ro[12_, 13_] = NIntegrate[Pod[τ, 12, 13], {τ, 0, 1}]
```

```
NIntegrate[Pod[τ, 12, 13], {τ, 0, 1}]
```

```
Minel = FindMinimum[Ro[12, 13], {12, 1, 2}, {13, -1, 1}]
```

```
{0.731198, {12 → 0.038468, 13 → 0.28735}}
```

```
Ronol = Part[Minel, 1]
```

```
0.731198
```

```
{120, 130} = {12 /. Part[Minel, 2, 1], 13 /. Part[Minel, 2, 2]};
```

$$l10 = \frac{1 - (120 * c2 + 130 * c3)}{c1}$$

```
-0.103653
```

```
{110, 120, 130}
```

```
{-0.103653, 0.038468, 0.28735}
```

```
h0[τ] = 110 * h1[τ] + 120 * h2[τ] + 130 * h3[τ];
```

Построение оптимального управления

$$u0[τ] = \frac{1}{Ronol} * \frac{h0[τ]}{\sqrt{h0[τ].h0[τ]}};$$

```
{u10[τ_], u20[τ_], u30[τ_]} = u0[τ];
```

Вычисление оптимального значения функционала

```
Ronol = Part[Minel, 1]
```

```
0.731198
```

Построение оптимального закона движения

```
Resh0 =
```

```
NDSolve[
```

```
{x10'[t] == 2 * x10[t] + 2 * x20[t] - 30 * x30[t] + u10[t],
```

```
x20'[t] == 10 * x10[t] - x20[t] - 35 * x30[t] + u20[t],
```

```
x30'[t] == 2 * x10[t] - x20[t] + x30[t] + u30[t],
```

```
x10[0] == -3, x20[0] == 2, x30[0] == 1},
```

```
{x10[t], x20[t], x30[t]}, {t, 0, 1}];
```

```
{{x10[t_]}, {x20[t_]}, {x30[t_]}} =
```

```
{Re[x10[t] /. Resh0], Re[x20[t] /. Resh0],
```

```
Re[x30[t] /. Resh0]}
```

Проверка правильности вычислений

```
XT - {x10[1], x20[1], x30[1]}
```

```
{0.0000773993, 0.000215504, 0.0000639765}
```

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.
2. Афонасьев А.П., Дикуссар В.В., Милютин А.А., Чуканов С.В. Необходимые условия в оптимальном управлении. М.: Наука. 1990. 318 с.
3. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. М.: Наука, 1964. – 360 с.
4. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. М.: Высшая школа, 2001, 239 с.
5. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1969. 408 с.
6. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
7. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 549 с.
8. Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Оптимизация линейных систем. Минск: Изд.-во БГУ, 1973. 246 с.
9. Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск: Наука и техника, 1974. 272 с.
10. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1977. 254 с.
11. Дикуссар В.В. Милютин А.А. Качественные и численные методы в принципе максимума М.: Наука, 1989. 144 с.
12. Дьяконов В.П. Математика 4.: Учебный курс. СПб.; М., Харьков, Минск, 2001. 654 с.
13. Зеликин М.И. Оптимальное управление и вариационное исчисление. М.: Изд.-во МГУ, 1985
14. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 741 с
15. Карманов В. Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1986. 288 с.

16. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
17. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
18. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений М.: Наука, 1970. 420 с.
19. Красовский Н. Н., Субботин А. И., Позиционные дифференциальные игры М.: Наука, 1974. 456 с.
20. Кротов В. Ф. Основы теории оптимального управления. М.: Высшая школа, 1990. 429 с.
21. Лутманов С. В. Программное оптимальное управление динамическими объектами. Пермь: Изд.-во ПГУ, 1994. 120 с.
22. Лутманов С.В. Курс лекций по методам оптимизации. Ижевск: РХД 2001. 363 с.
23. Матвеев А.С., Якубович В.А. Оптимальные системы управления: обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи.- СПб.: Изд.-во СПбГУ, 2003. 537 с.
24. Милютин А.А., Илютович А.Е., Осмоловский Н.П., Чуканов С.В. Оптимальное управление в линейных системах. М.: Наука, 1974. 268 с.
25. Понтрягин Л. С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука. 1993. 392 с.
26. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1983. – 332 с.
27. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.
28. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.
29. Рокафеллер Р. Выпуклый анализ. М.: Мир. 1973. 470 с.
30. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986. 328 с.
31. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: Мир, 1978. 318 с.

32. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и оптимальному управлению.
М.: Мир, 1974. 448 с.

Учебное издание

Сергей Викторович Лутманов

ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

ЧАСТЬ 2

Оптимальное управление линейными динамическими объектами

Редактор Л.Л. Савенкова

Корректор А.Ю. Морскова

Компьютерная верстка С.В. Лутманов

Подписано в печать 14.09. 2005. Усл. печ. л. 11.39. Уч.-изд. л. 10.5 Размер 1 МБ

Редакционно-издательский отдел Пермского государственного университета
614990 Пермь, ул. Букирева, 15

Электронный адрес в Интернете: info @ psu. ru