**ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ**

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

**Означення**: Функція *F(x)* називається первісною для функції *f(x)* на проміжку *І*, якщо на цьому проміжку *F'(x) = f(x)* або *dF(x) = f(x)dx* .

Із означення виходить, що первісна *F(x)* — диференційовна, а значить неперервна функція на проміжку *І*, і її вигляд суттєво залежить від проміжка, на якому вона розглядається.

**Приклад**: Первісні для функції  мають вигляд:

Рис. 7.1



причому, *F1(x), F2(x)* — неперервні R, a *F3(x)* у точці *х* = 0 має розрив (рис. 7.1). У цьому прикладі первісні *Fi(x) і* = 1,2,3, знайдені методом добору із на­ступною перевіркою, використовуючи таблицю похідних функцій.

*Теорема (про множину первісних).* Якщо *F(x)* — первісна для функції *f(х)* на проміжку *I*, то

1) *F(x) + C* — також первісна для *f(x)* на проміжку *I*;

2) будь-яка первісна *Ф(х)* для *f(x)* може бути представлена у вигляді *Ф(х) = F(x) + С* на проміжку *I*. (Тут *С = const* називається довільною сталою).

**Наслідок**. Дві будь-які первісні для однієї й тієї самої функції на проміжку *I* відрізняються між собою на сталу величину (рис. 7.1).

**Означення**: Операція знаходження первісних для функції *f(x)* називає­ться *інтегруванням* *f(x)*.

Задача інтегрування функції на проміжку полягає у тому, щоб знайти всі первісні функції на цьому проміжку, або довести, що функція немає первісних на цьому проміжку.

Для розв'язання задачі інтегрування функції достатньо знайти одну будь-яку первісну на розглядуваному проміжку, наприклад *F(x)*, тоді (за теоремою про множину первісних) *F(x) + С* — загальний вигляд всієї мно­жини первісних на цьому проміжку.

**Означення**: Функція *F(x) + С*, що являє собою загальний вигляд всієї множини первісних для функції *f(х)* на проміжку *I*, називається *невизначеним інтегралом* від функції *f(x)* на проміжку *I* і позначається

 (7.1)

де — знак невизначеного інтеграла;

*f(x)* — підінтегральна функція;

Рис. 7.2

*f(x)dx* — підінтегральний вираз;

*dx* — диференціал змінної інтегрування.

Геометричний зміст невизначеного інтеграла полягає у тому, що функція *у= F(X) + С* є рівняння однопараметричної сім'ї кривих, які одержуються одна з другої шляхом паралельного переносу вздовж осі ординат (рис. 7.2).

**Теорема (Коші).** Для існування невизначеного інтеграла для функції *f(x)* на певному проміжку достатньо, рис. 7.2 щоб *f(x)* була неперервною на цьому проміжку.

**Зауваження**. Виявляється є такі невизначені інтеграли від елементарних функцій, які через елементарні функції не виражаються, наприклад:



існують у кожному із проміжків області визначення, але записати їх через основні елементарні функції не можна; в такому розумінні ці інтеграли називають «неінтегровними».

a) *Властивості, що випливають із означення (7.1):*

# І. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції

II. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу.

ІІІ. 

*б) Властивості, що відображають основні правила інтегрування.*

IV. Сталий множник, що не дорівнює нулю, можна виносити з-під знака інтеграла, тобто

 (7.2)

V. Невизначений інтеграл від суми функцій дорівнює сумі невизначених інтегралів від цих функцій, якщо вони існують, тобто

 (7.3)

1.  2.  3. 

4.  5.  6. 

7.  8. 

9. 

11. 

13. 

15. 

16. 

17. 

18. 

19. 

20. 

21. 

Цей метод базується на властивості невизначеного інтеграла (7.3). Мета методу — розкласти підінтегральну функцію на такі доданки, інтеграли від яких відомі або їх простіше інтегрувати, ніж початкову підінтегральну функцію.

**Приклад**. 

**Теорема**. Якщо функції *и(х*) та *v(х)* мають неперервні похідні, то:

 (7.4)

На практиці функції *u(x)* та *v(x)* рекомендується вибирати за таким правилом:

— при інтегруванні частинами підінтегральний вираз *f(x)dx* розбивають на два множники типу *и • dv*, тобто *f(x)dx = u-dv*; при цьому функція *и(х)* вибирається такою, щоб при диференціюванні вона спрощувалась, а за *dv* приймають залишок підінтегрального виразу, який містить *dx*, інтеграл від якого відомий, або може бути просто знайдений.

**Приклад**.



Інколи доводиться інтегрування частинами застосовувати кілька разів, що ілюструє наступний приклад.



Нижче наведені деякі типи інтегралів, при інтегруванні яких застосо­вують метод інтегрування частинами та показано вибір функцій *и(х)* та



де *Р(х)* — многочлен, *Q(x)* — алгебраїчна функція, *а R*.

Звичайно, не слід думати, що метод інтегрування частинами обмежує­ться застосуванням тільки до інтегралів типу (7.5).

В деяких випадках, після інтегрування частинами інтеграла одержуєть­ся рівняння, із якого знаходять шуканий інтеграл.

**Приклад**.



Отже, одержали рівняння *G = eх(cosx + sinx)-G*, із якого знаходимо 

Мета методу підстановки — перетворити даний інтеграл до такого вигляду, який простіше інтегрувати.

*Теорема*. *Якщоf(x)* — неперервна, а *х = (t)* має неперервну похідну, то:

 (7.6)

Наслідок,

 (7.7)

*Зауваження*. Специфіка інтегрування невизначеного інтеграла не зале­жить від того чи змінна інтегрування є незалежною змінною, чи сама є функцією (на підставі інваріантності форми запису першого диференціа­лу), тому, наприклад:



В такому розумінні слід розглядати і всю таблицю інтегралів.

**Приклад**. 

Варіант заміни змінної інтегрування *(x) = t* (7.7) зручний тоді, коли підінтегральний вираз можна розкласти на два множники: *f ((x))* та *’(x)dx*.

**Приклад**. 

Для деяких класів підінтегральних функцій розроблені стандартні замі­ни. Вибір зручної підстановки визначається знанням стандартних підстано­вок та досвідом.

При безпосередньому інтегруванні використовується формула (7.7) варіанту заміни змінної, але саму заміну не записують (її роблять усно) при цьому використовують операцію внесення функції під знак диференціала. Отже, якщо , то:



Зокрема, коли *(х)* є лінійною функцією, тобто *(x)=ax+b* , будемо мати: 

*Зауваження*. Під знак диференціала можна вносити будь-який сталий доданок (значення диференціала при цьому не зміниться):



**Приклад**. 