***Пошукова робота на тему:***

*Неперервність функції в точці і в області.Дії над неперервними функціями. Формулювання основних властивостей функцій, неперервних в замкнутій області. Точки розриву функції та їх класифікація. Павутинні моделі ринку.*

**План**

* Неперервність функції в точці та в області.
* Дії над неперервними функціями.
* Основні властивості функцій, неперервних на відрізу, в обмеженій замкнутій області.
* Точки розриву та їх класифікація.
* Павутинні моделі ринку.

**1. Неперервність функцій.**

**Розриви функції та їх класифікація**

            Означення 1.  Функція  називається неперервною в точці :

            1)  якщо функція , визначена в точці ;

            2) якщо існує границя  в точці ;

            3) якщо границя функції дорівнює значенню функції в цій точці, тобто         .

            Разом всі ці умови є необхідними і достатніми для того, щоб функція була неперервною в точці . В дальшому будемо користуватися і таким означенням неперервності функції.

            Означення 2.  Функція  називається неперервною в точці , якщо для будь-якого як завгодно малого числа  існує таке число , що для всіх точок , які задовольняють нерівності , виконується нерівність .

            На практиці при дослідженні функції на неперервність часто користуються означенням неперервності функції, яке базується на понятті приросту функції в точці.

            Нехай функція  визначена в усіх точках деякого проміжку . Візьмемо дві довільні точки з цього проміжку

і ,  де .

            Тоді число  називається приростом аргументу, а число - приростом функції  в точці .

            Нехай в деякій (відкритій) області задана функція двох змінних . Візьмемо довільну точку  цієї області і надамо  приросту , залишаючи значення незмінним.

            При цьому функція  одержить приріст

, який називається частковим приростом цієї функції за .

            Аналогічно, вважаючи  постійною і надаючи  приросту, одержимо частинний приріст от функції  за :        .

            Приріст

називається *повним приростом* функції  в точці , відповідним приростfм  і  незалежних змінних.

            Означення 3.   Функція  називається неперервною в точці , якщо

.

            Легко бачити, що наведені означення неперервності функції в точці є еквівалентні між собою в тому розумінні, що коли функція  неперервна в точці за яким-небудь одним означенням, то вона неперервна і за рештою означень та навпаки.

            Будемо називати функцію  неперервною в області (замкнутій чи незамкнутій), якщо вона неперервна в кожній її точці. При цьому неперервність в будь-якій граничній точці області визначається так: функція  неперервна в граничній точці , якщо для будь-якого додатного числа  існує число  таке, що для всіх точок області , які задовольняють умові , виконується нерівність .

            Спираючись на теореми про границі і на означення неперервності легко переконатися в такому.

            Теорема.  Сума, різниця, добуток і частка від ділення двох неперервних функцій також неперервна (для частки – за винятком тих значень аргументів, що перетворюють на нуль знаменник), тобто, якщо  і  неперервні в точці , то в цій точці будуть  неперервними і функції



**Неперервність складної функції, неперервність оберненої функції.**  Сформулюємо відповідні теореми для функції однієї  змінної.

            Нехай  - деяка функція аргументу , а - деяка функція аргументу , при цьому область означення  першої функції має спільну частину  з областю значень  другої функції. За цих умов на тій частині  області значення  функції , яка відповідає , буде означена складна функція .

            Нехай в деякій точці  функція  неперервна  функція аргументу , а у відповідній точці  функція  неперервна як функція аргументу . Інакше,

,

.

Тоді

,

що доводить теорему.

            Теорема.   Якщо функція  неперервна в точці , а функція  неперервна в точці , то й функція  неперервна в точці .

            Враховуючи можливість поширення доведеного твердження на будь-яке (означене) число накладання функціональних залежностей, можна сформулювати теорему.

            Теорема.   Якщо накладання будь-якого (означеного) числа неперервних функціональних залежностей приводить до складної функції, то вона буде неперервною функцією основного аргументу.

            Сформулюємо теорему, яка дає достатні умови існування та неперервності оберненої функції.

Теорема.   Якщо функція  визначена на відрізку  і є на цьому відрізку неперервною і зростаючою (спадною), то для  цієї функції на відрізку   існує обернена функція , яка на відрізку  є також неперервною і зростаючою (спадною).

**Неперервність основних елементарних функцій.**

            Користуючись означенням неперервності функцій, покажемо, наприклад, що функція  неперервна в кожній точці числової осі.

            Візьмемо довільну точку . Тоді для будь-якого числа  повинно існувати таке число , що нерівність

виконується для всіх , що задовольнять нерівності .

            Покажемо, що таке число існує. Для цього ліву частину нерівності запишемо у вигляді

Таким чином, для того щоб виконувалася нерівність

,

достатньо, щоб .

            Поклавши , впевнюємося, що з нерівності  випливає нерівність . Це й доводить неперервність функції  у довільній точці числової осі.

            Аналогічно розглядаючи кожну елементарну функцію, можна було б довести теорему .

            Теорема. Кожна елементарна функція неперервна в кожній точці, в якій вона означена.

**Класифікація розривів неперервності функції.**

            Означення.   Точка  називається точкою згущення множини , якщо в кожному її колі знаходиться хоча б одна точка, відмінна від .

            Точка згущення  може і належати області , але може і не належати їй. Очевидно, що всі внутрішні точки множини  є точками згущення і при цьому належать . Граничні  точки можуть бути точками згущення , а можуть і не бути (їх тоді називають ізольованими).

            Означення.  Кожна точка згущення області означення  функції , що не є точкою неперервності, називається точкою розриву цієї функції.

            Означення.  Лінія площини аргументів , всі точки якої є точками розриву функції , називається лінією розриву цієї функції.

            Приклади.

            1. Початок координат  є точкою розриву функції

.

            Справді, областю існування  є вся площина , крім точки . Точка  є точкою згущення цієї області, але не є точкою неперервності , оскільки  не має числового значення в точці ; крім того, функція  не має границі при  (довести).

            2. Функція задана формулою

.

            Областю  існування  є вся площина , крім параболи . Всі точки цієї параболи є точками розриву , оскільки кожна з них є точкою згущення , але не належить , тому не має числового значення в кожній такій точці; крім того,  має нескінченну границю при прямуванні точки  до будь-якої точки цієї параболи. Тому парабола  є лінія розриву функції .

            Зупинимось на функції , яка визначена на відрізку . В точках  і  можна ставити питання про односторонню неперервність, а саме, в точці  можна ставити питання про неперервність справа, а в точці  - зліва. Тому природно постає питання про введення таких понять, як неперервність функції зліва і справа.

            Означення.  Функція  називається неперервною в точці  зліва (справа), якщо виконуються умови:

1)  визначена в точці  (існує число );

2) в точці  існує лівостороння (правостороння) границя функції;

3) лівостороння (правостороння) границя функції дорівнює значенню функції в точці , або

,

.

            Очевидно, коли функція неперервна в точці, то вона в цій точці є неперервна і зліва, і справа. Має місце така теорема.

            Теорема.   Для того, щоб функція  була неперервна в даній точці, необхідно і достатньо, щоб вона була в цій точці неперервна справа і зліва.

            Нехай функція  визначена в усіх точках деякого проміжку , крім, можливо, внутрішньої точки .

            Означення.  Якщо функція  в точці  не є неперервною, то точка  називається точкою розриву функції , а саме функція при цьому називається розривною в точці .

            Отже, за означенням, будь-яка внутрішня точка проміжку, де визначена функція , є точкою розриву функції, якщо в цій точці порушується хоча б одна з трьох умов неперервності. Тому залежно від того, яка з цих умов не виконується, точки розриву поділяють на два роди.

            Означення.   Точка розриву  функції  називається точкою розриву *першого роду*, якщо в цій точці існують скінченні лівостороння і правостороння границі.

Якщо границі рівні між собою, то точка називається  точкою *усувного розриву*.

Якщо границі скінченні, але не рівні, то точка називається точкою розриву типу “ стрибка “.

            Означення.  Точка розриву  функції  називається точкою розриву другого роду, якщо в цій точці не існує хоча б одна  з односторонніх границь або дорівнює безмежності.

            Приклади.

1. .

            Функція визначена на всій числовій осі, за винятком точки . Знайдемо лівосторонню і правосторонню границі в цій точці:





            Отже, одна функція в точці  має розрив першого роду.

            2.

            Функція означена при всіх значеннях , крім . Односторонні границі:

            Отже, точка  є точкою розриву другого роду.

            3.

В точці  функція  не визначена, але вона має

скінчену границю в цій точці: . Це є усувний розрив, тому що функція

неперервна в точці .

**2. Властивості функцій,**

**неперервних у замкнених областях**

            Ці властивості сформулюємо як теореми і дамо деякі пояснення, ілюструючи їх для функції , неперервної на відрізку .

            Теорема.    Якщо функція  означена і неперервна в обмеженій замкнутій області , то функція обмежена, тобто існує число  таке, що для всіх точок області .

            Теорема.    Функція , неперервна в обмеженій замкнутій області , приймає в цій області своє найбільше і найменше значення, тобто

.

            Смисл цієї теореми для функції ,  неперервної на відрізку , наочно ілюструється на рис. 5.2.

            Теорема.   Функція , неперервна в обмеженій замкнутій області , між будь-якими двома своїми значеннями приймає всі проміжні значення, тобто, якщо , де  і  - якість значення функції  в області , то в цій області є точка , в якій .

            Смисл цієї теореми для функції  чітко ілюструється на рис. 5.3.

            Наслідок.    Якщо функція  неперервна в обмеженій замкнутій області  і в точках  цієї області , то в  існує точка така, що .Смисл цього твердження для функції  (рис.5.4).

            Доведення  перелічених теорем в нашому курсі ми не розглядаємо. Лише зауважимо, що для функцій, неперервних в незамкнутих або необмежених областях, наведені в цих теоремах властивості можуть не мати місця.

            Поняття неперервності функції в точці, в області та перелічені властивості неперервних функцій двох змінних узагальнюються на функції трьох і більшого числа змінних.

Рис.5.2                  Рис.5.3              Рис.5.4

**3. Павутинні моделі ринку**

Властивість неперервної функції на замкнутому проміжку (теорема про існування кореня функції) знаходить застосування в моделях ринку. Як відомо, дві основні категорії ринкових відношень – це попит і пропозиція. Обидві ці категорії залежать від багатьох факторів, серед яких головний – це ціна товару. Нехай ціна товару, об’єм попиту, величина пропозиції (від перших букв англійських слів *price* – ціна, *demand* – попит, *supply* – пропозиція ). При малих  маємо  (попит перевищує пропозицію), при великих навпаки, Вважаючи  і  неперервними функціями, приходимо до висновку, що існує така ціна для якої тобто попит дорівнює пропозиції. Ціна рівноважною, попит і пропозиція при цій ціні також називаються рівноважними.

            Встановлення рівноважної ціни – одна з головних задач ринку. Розглянемо просту модель пошуку рівноважної ціни – так звану *павутинну модель*. Вона пояснює феномен циклів зміни об’ємів продажі і цін, що регулярно повторюються, наприклад, сільськогосподарських товарів.

            Припустимо, що рішення про величину об’єму виробництва приймається в залежності від ціни товару в попередній період часу. Так, площу, що відводиться під сільськогосподарську культуру, вибирають в залежності від її ціни, що склалася в попередній рік.

            Розглянемо ситуацію, що зображена на рис.5.5.

            Нехай в початковій точці пропозиція товару має значення  і вибране так в залежності від ціни товару в попередній період. Оскільки ця ціна більша за рівноважну, то на кривій попиту їй відповідає об’єм покупок Виробнику, виходячи із такої інформації про стан ринку, доводиться опустити ціну товару до величини  Ціна  нижче рівноважної, тому на ринку збільшується попит до величини  На кривій пропозиції цій величині відповідає ціна пропозиції  і т. д. В цьому випадку спіраль збігається до точки ринкової рівноваги

Між іншим, описана “ спіраль” не завжди “ закручується“. В деяких випадках вона може і “ розкручуватися “, як показано, наприклад, на рис.5.6.



 Рис.5.5                                   Рис.5.6