Содержание

Аддитивные проблемы теории чисел в XVII - XX вв.

Ведение.

Аддитивная теория чисел - это раздел теории чисел, в котором изучаются задачи о разложении целых чисел на слагаемые заданного вида, а также алгебраические и геометрические аналоги таких задач, относящиеся к полям алгебраических чисел и к множествам точек решетки. Эти задачи называются аддитивными задачами. Обычно рассматриваются аддитивные задачи о разложении больших чисел.

1 Проблемы Аддитивной теории чисел.

К классическим проблемам Аддитивной теории чисел относятся:

1. Проблема Варинга (1770) о представлении всякого натурального числа в виде суммы $s = s(k)$ неотрицательных $k-$ х степеней с фиксированным $k \geqslant l$;

2. Проблема Гольдбаха о представлении нечетных натуральных чисел, больших 5, суммой трех простых и проблема Эйлера - Гольдбаха о представлении четных чисел, больших 2, суммой двух простых (поставлены в 1742);

Ослабленная проблема Гольдбаха. Проблема представления натуральных чисел суммой ограниченного числа простых;

3. Проблема Харди - Литлвуда о представлении всякого целого числа, большего 1, в виде суммы простого и двух квадратов (сформулирована в 20-х гг. 20 в.);

4. Аддитивная проблема делителей;

5. Проблема делителей Тичмарша;

6. Задачи о представлении всех достаточно больших четных чисел суммами двух чисел с ограниченным числом простых сомножителей;

7. Задачи о представлении целых чисел квадратичными формами с тремя и четырьмя переменными и аналогичные задачи; а также другие задачи.

Для решения задач Аддитивной теории чисел применяются аналитические, алгебраические, элементарные и смешанные методы, а также методы, основанные на вероятностных соображениях. В зависимости от методов решения, аддитивные задачи входят составной частью в другие разделы теории чисел - аналитическую теорию чисел, алгебраическую теорию чисел, вероятностную теорию чисел.

Теперь рассмотрим самые важные задачи Аддитивной теории чисел в отдельности.

1.1 Проблема Варинга.

Проблема теории чисел, сформулированная Э. Варингом (E. Waring) в 1770 г. в следующем виде: всякое натуральное число есть сумма четырех квадратов, девяти кубов, девятнадцати четвертых степеней. Другими словами: для любого $n \geqslant 2$ существует такое $k = k(n)$, зависящее только от n, что любое натуральное число есть сумма A: $n-$ степеней неотрицательных целых чисел. Первое общее решение проблемы Варинга с очень грубой оценкой величины k в зависимости от n дано в 1909 г. Д. Гильбертом (D. Hilbert), в связи с чем проблема Варинга иногда называется проблемой Гильберта - Варинга. Если через $J_{k,n}(N)$ обозначить число решений в целых неотрицательных числах уравнения

$$x_1^n + ... + x_k^n = N,$$

то теорема Гильберта утверждает, что существует $K = k(n)$, для которого $J_{k,n}(N) \geqslant 1$ при любом $N \geqslant 1$.

В 1928 г. Г. Х. Харди и Дж. И. Литлвуд (G. H. Hardy, J . E. Littlewood), применив к проблеме Варинга круговой метод, доказали, что при $k \geqslant (n-2)2^{n-1} + 5$ для $J_{k,n}(N)$ имеет место асимптотическая формула вида

$$J_{k,n}(N) = AN^{k/n-1} + O(N^{k/n-1-\gamma})$$

где $A = A(N) \geqslant c_0 > 0$, а c_0 и $\gamma > 0$ - некоторые постоянные. Следовательно, при $N \geqslant N_0(n)$ исходное уравнение имеет решение. В связи с этим результатом возникли три проблемы: установить порядок трех величин $G(n), g(n), k_0-$ наименьших целых чисел, для которых:

а) исходное уравнение разрешимо при $k \geqslant G(n)$ и $N \geqslant N_0(n)$;

б) исходное уравнение разрешимо при $k \geqslant g(n)$ и $N \geqslant 1$;

в) для величины $J_{k,n}(N)$ при $k \geqslant k_0(n)$ имеет место приведённая выше асимптотическая формула.

а) Известно, что $G(n) \geqslant n+1$

В 1934 г. И. М. Виноградов при помощи созданного им метода доказал, что $G(n) \leqslant 3n(\ln n + 9)$

Кроме того, имеется много результатов относительно $G(n)$ для небольших значений n: $G(4) = 16$ (Х. Давенпорт, H. Davenport, 1939), $G(3) = 7$ (Ю. В. Линннк, 1942).

б) В 1936 г. Л. Диксон н С. Пиллан (L. Dickson, S. Pillai), применив метод Виноградова, доказали, что

$$g(n) = 2^n + [(\frac{3}{2})^2] - 2$$

для всех $n > 6$, для которых

$$(\frac{3}{2})^{12} - [(\frac{3}{2})^n] = 1 - (\frac{1}{2})^n\{[(\frac{3}{2})^n] + 3\}$$

Последнее же условие доказано К. Малером (K. Mahler) в 1957 г. для всех достаточно больших n.

в) Наилучший результат принадлежит И. М. Виноградову, который доказал, что

$$k_0 \leqslant 4n^2 \ln n.$$

Элементарное доказательство проблемы Варинга дано Ю. В. Линником в 1942 г. Существует много различных обобщений проблемы Варинга (переменные пробегают некоторое подмножество множества натуральных чисел; вместо одночленов $x_1^n, x_2^n, ..., x_k^n$ в представлении числа n рассматриваются многочлены $f_1(x_1), f_2(x_2), ..., f_k(x_k)$; вместо исходного уравнения $x_1^n + ... + x_k^n = N$ рассматривается сравнение и т. д.).

Особое значение проблемы Варинга состоит в том, что при ее решении созданы мощные методы аналитической теории чисел.

1.2 Проблема Гольдбаха.

Одна из известных проблем теории чисел. Заключается в доказательстве того, что всякое целое число, большее или равное шести, может быть представлено в виде суммы трех простых чисел. Эту проблему выдвинул в 1742 г. Х. Гольдбах (Ch. Goldbach) в письме к Л. Эйлеру (L. Euler). В ответ Л. Эйлер заметил, что для решения проблемы достаточно доказать, что каждое четное число есть сумма двух простых. В течение долгого времени не удавалось найти никаких путей исследования проблемы Гольдбаха.

В 1923 г. Г. Харди и Дж. Литлвуду (G. Hardy, J. Littlewood) удалось показать, что если верны некоторые теоремы (не доказанные и поныне) относительно L-рядов Дирихле, то всякое достаточно большое нечетное число есть сумма трех простых чисел.

В 1937 г. И. М. Виноградов создал новый метод в аналптпческой теории чисел - метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами, с помощью которого доказал асимптотическую формулу для количества представлений нечетного числа суммой трех простых чисел. Из этой формулы следует, что каждое достаточно большое нечетное число есть сумма трех простых чисел. Это - одно из крупнейших достижений современной математики.

Метод И. М. Виноградова позволил решить и ряд существенно более общих задач. Задача о разбиении четного числа на сумму двух простых еще не решена.

1.2.1 (Метод оценок тригонометрических сумм. (Метод И. М. Виноградова)

Один из самых сильных и общих методов аналитической теории чисел — метод тригонометрических сумм был создан И. М. Виноградовым. Многие проблемы аналитической теории чисел довольно просто формулируются на языке конечных сумм слагаемых вида

$$\cos F(x_1, ..., x_n) + i \sin F(x_1, ...x_n),$$

где $F(x_1, ..., x_n)$ — действительная целочисленная функция. Таким образом, центр тяжести этих проблем переносится на задачу изучения таких сумм и, в частности, на задачу получения возможно более точной оценки модуля таких сумм. И. М. Виноградов, используя глубокие арифметические свойства рассматриваемых сумм, получил исключительно сильные оценки модуля широкого класса таких сумм. Этот метод позволил Виноградову получить фундаментальные, близкие к предельно возможным результаты в целом ряде вопросов теории чисел в таких классических задачах, как проблема Варинга, проблема Гильберта — Камке, проблема оценок сумм Вейля. Другим следствием метода оценок тригонометрических сумм было решение ряда аддитивных проблем с простыми числами и, в частности, решение проблемы Гольдбаха.

1.3 Проблема Харди - Литлвуда.

Задача нахождения асимптотической формулы для числа $Q(n)$ решеий уравнения

$$p + x^2 + y^2 = n,$$

где p - простое, x и - целые, n - натуральное число. Аналогом этой задачи является проблема нахождения асимптотики для числа решений уравнения

$$p - x^2 - y^2 = l,$$

где l - фиксированное целое число, $p \leqslant n (n \to \infty)$. Х. -Л. п. была поставлена Г. Харди (G. Hardy) и Дж. Литлвудом (J. Littlewood) в 1923 и рассмотрена ими на основе эвристических и гипотетических соображений.

Дисперсионный метод, разработанный Ю. В. Линником, позволил ему найти асимптотику для первого уравнения:

$$Q(n) = \pi A_0 \frac{n}{\ln n} \prod_{p/n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2 - p + \chi_4(p)} + R(n),$$

где

$$A_0 = \prod_{p/n} (1 + \frac{\chi_4(p)}{p(p-1)}), \quad R(n) = O(\frac{n}{(\ln n)^{1,042}}).$$

Из аналогичной формулы для второго уравнения следует бесконечность множества простых чисел вида $= x^2 + y^2 + l$. С помощью дисперсионного метода найдена асимптотика для числа решений обобщенного уравнения Харди - Литлвуда $p + \varphi(x, y)$ где p - простое, $\varphi(x, y)$ - заданная примитивная положительно определенная квадратичная форма.

Рассмотрение аналогичного уравнения $p - \varphi(x, y) = l$ приводит к доказательству бесконечности множества простых чисел вида $p = \varphi(x, y) + l$

Теорема Виноградова - Бомбьери о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях в среднем также доставляет решение проблема Харди - Литлвуда, заменяя фактически расширенную гипотезу Римана теоремами типа большого решета.

1.3.1 Теорема Виноградова - Бомбьери.

Пусть нами используется оценка вида:

$$\Delta(Q, x) = \sum_{k \leqslant Q} \max_{(l,k)=1} \max_{y \leqslant x} |\psi(y, k, l) - \frac{y}{\varphi(k)}|,$$

где

$$\psi(y, k, l) = \sum_{n \leqslant yn \equiv l mod k} = \sum \lambda(n).$$

Теорема утверждает, что существуют постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что

$$\Delta(Q, x) \leqslant c_1 (Q \log^{\frac{11}{18}} \cdot x\sqrt{x} + \frac{x^{\beta_{k_0}}}{\varphi(k_0)} \log^{5/4} x + x exp(-c_2 \sqrt[4]{\log x})),$$

где $k_0 < e^{\sqrt[4]{\log x}} = z_1 -$ модуль, для которого существует единственный примитивный действительный примитивный характер χ_{k_0} такой, что $L(s, \chi_{k_0})$ имеет нуль при $s =$

$\beta_{k_0} \geqslant 1 - \frac{c_3}{\log z_1}$. Отсюда и из теоремы Зигеля вытекает, что

$$\Delta(Q,x) \leqslant c(A)(\sqrt{x}Q\log x^{11/18} + x\log x^{-A})$$

при любом A.

1.4 Аддитивная проблема делителей.

Аддитивная проблема делителей - проблема, заключающаяся в поиске асимптотического значения сумм вида:

$$\sum_{m\leqslant n} \tau_{k_1}\tau_{k_2}(m+a)$$

,

$$\sum_{m<n} \tau_{k_1}\tau_{k_2}(n-m),$$

где $\tau_k(m)-$ количество различных разложений целого числа k множителей, считая и порядок k_1, и $k_2 \geqslant 2-$ - натуральные числа, a - фиксированное целое число, отличное от нуля, n - достаточно большое натуральное число. В частности, $\tau_2(m) = \tau(m)$ - число делителей для числа m. Суммы выражают, соответственно, количество решений уравнений

$$x_1x_2...x_{k_2} - y_1y_2...y_{k_1} = a,$$

$$x_1x_2...x_{k_1} - y_1y_2...y_{k_2} = n.$$

Аддитивная проблема делителей при $k_1 = 2$ и любом натуральном k_2 была решена с помощью дисперсионного метода Ю. В. Линником. Этот метод будет рассмотрен далее.

1.5 Проблема делителей Титчмарша.

Проблема делителей Титчмарша: ?=p - простое, ? = xy, x, y – натуральные;

Проблема отыскания асимптотической формулы для числа решений неопределённых уравнений вида:

$$p - xy = a, p < N,$$

$$p + xy = N, p < N, x, y \in \mathbf{N}$$

где $p-$ простое число $a-$ фиксированное целое.

А общая радача - поиск асимптотики для сумм вида:

$$\sum_{p<N} \tau(p-1),$$

где $\tau(p)-$ число делителей n.

Проблема делителей Титчмарша была поставлена Э. Титчмаршем (E. Titchmarsh, 1930) и решена им условно в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана (её рассмотрим ниже) . Дисперсионный метод, разработанный Ю. В. Линником, позволяет найти асимптотику числа решений для неопределённого уравнения: $p-xy=a, p<N$, при $a=1$, Б. М. Бредихин решил эту задачу для любого фиксированного $a\neq 0$. Бредихин доказал асимптотическую формулу с остатком $O(N/(\ln^{1+\varepsilon}N))$, где $\varepsilon>0$.

Теорема Виноградова - Бомбьери о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях в среднем также приводит к решению проблемы делителей Титчмарша. При этом предположение о справедливости расширенной гипотезы Римана заменяется фактически теоремами типа большого решета (эти теоремы будут рассмотрены ниже).

1.5.1 Гипотеза Римана.

Для начала надо ввести определение дзета-функции. Дзета-функция $\zeta(s)-$ это аналитическая функция комплексного переменного $s=\sigma+it$, при $\sigma>1$ определяется абсолютно и равномерно сходящимся рядом Дирихле:

$$\zeta(s)=\sum\frac{1}{n^s}$$

Значение дзета-функции в том, что она разделяет числа на два отличных друг от друга множества: одно включает все простые числа, а другое не включает ни одного простого числа.

Риман в 1859 г. высказал предположение о связи простых чисел с $Re=1/2$ дзета-функции, а также предположил, что все действительные нули дзета-функции расположены на прямой $Re=1/2$.

Итак, функция $\zeta(s)$ определена для всех комплексных $s\neq 1$, и имеет нули для отрицательных целых $s=-2,-4,-6...$ Из функционального уравнения $\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$, и явного выражения $\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}$ при $s>1$ следует, что все остальные нули, называемые «нетривиальными», расположены в полосе $0\leqslant\quad s\leqslant 1$ симметрично относительно так называемой "критической линии"$\frac{1}{2}+it, t\in\mathbf{R}$. Гипотеза Римана утверждает, что:

Все нетривиальные нули дзета-функции имеют действительную часть, равную $\frac{1}{2}$.

Обобщённая гипотеза Римана состоит и з того же самого утверждения для обобщений дзета-функций, называемых L-функциями Дирихле.

2 Методы решения проблем Аддитивной теории чисел.

Первые систематические результаты в Аддитивной теории чисел были получены Леонардом Эйлером (1748), который исследовал с помощью степенных рядов разложения целых чисел на положительные слагаемые, в частности, им была рассмотрена задача о разложении числа на заданное количество слагаемых.

2.1 Метод редукции к производящим функциям.

Многие классические задачи Аддитивной теории чисел решаются методом редукции к производящим функциям. Этот метод восходит к Л. Эйлеру и лежит в основе аналитических методов, развитых Г. Х. Харди (G. H. Hardy), Дж. И. Литлвудом (J. E. Littlewood) и И. М. Виноградовым. Исходной является идея сопоставления заданным последовательностям:

$$A_i = \{a_i\}, a_i \geqslant 0, a \in Z, i = 1, 2, 3, ...$$

степенных рядов:

$$f_i(z) = \sum_{a_j=0}^{\infty} z^{a_j}$$

с производящей функцией

$$F(z) = \prod_{i=1}^{k} f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n) z^n,$$

где $r(n) = r_k, A^{(n)}-$ количество представлений числа в виде:

$$n = a_1 + a_2 + ... + a_k, a_i \in A_i, A = \{A_1 A_2, ...\}.$$

При этом $r(n)$ вычисляется при помощи интеграла Коши. В методе Виноградова степенные ряды заменяются тригонометрическими суммами:

$$f_i(\alpha) = \sum_{a_i=0}^{\infty} e^{2\pi i \alpha a_i},$$

$$r(n) = \int_0^1 F(\alpha) e^{(-2\pi i \alpha a_i)} d\alpha$$

Из $r(n)$ выделяется главная часть, состоящая из интервалов, распространенных на окрестности некоторых рациональных точек. Вместо аналитических свойств $F(z)$, требующих в ряде задач Аддитивной теории чисел привлечения гипотез, аналогичных гипотезе Римана, центральную роль при вычислении r(n) играют чисто арифметические оценки тригонометрич. сумм по методу Виноградова и законы распределения простых чисел в арифметических прогрессиях, получаемые трансцендентными методами теории L- функций Дирихле. Устанавливается, что в зависимости от k либо $r(n) \neq 0$ для всех $n \geqslant 1$, либо $r(n) \neq 0$ для достаточно больших n $n \geqslant n_0(A)$, либо почти для всех выполняется соотношение $r(n) \neq 0$, т. е.

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(\sum_{n \leqslant x, r(n) \neq 0}^{1} 1)}{x} = 1,$$

или, наконец, для $r(n)$ имеется асимптотическая формула. Наименьшее число k, удовлетворяющее одному из перечисленных условий, обозначается соответственно $g(A)$, $G(A)$, $G_0(A)$, $k_0(A)$. В случае $\{a_i\} = \{p\}$, где $\{p\}-$ последовательность простых чисел, при $k = 3$ получается теорема Виноградова: всякое достаточно большое нечетное число может быть представлено в виде суммы трех простых чисел; при $k = 2$ - теорема Чудакова: почти все четные числа могут быть представлены в виде суммы двух простых чисел.

2.2 Методы решета. Исследование структуры множеств.

Некоторые задачи Аддитивной теории чисел решаются при помощи исследования структуры множеств, получающихся в результате суммирования последовательностей $A_i a_i$, заданных лишь их плотностями $d(A_i) = \inf \frac{A_i(n)}{n}$, где $A_i(n) = \sum_{1 \leqslant a_i \leqslant n} 1$. Из положительности $d^n(A_i)$ при $A_1 = A_2 = ... = A_k = A$ уже следует, что $g(A) < \infty$. Применение этого факта к задачам Аддитивной теории чисел, в которых суммируются последовательности нулевой плотности, осуществляется путем конструирования из данных последовательностей новых последовательностей с положительной плотностью. Ведущую роль при этом играют методы решета, с помощью которых доказывается положительность $d(A_i)$. Таким способом Л. Г. Шнирельманом доказана теорема о представимости натуральных чисел в виде суммы ограниченного числа простых слагаемых, Ю. В. Линником найдено элементарное решение проблемы Варинга.

Элементарные методы решета, принадлежащие В. Вруну и А. Сельбергу, приводят в ряде задач Аддитивной теории чисел к результатам, недоступным пока современным аналитическим средствам. Однако наиболее законченные решения некоторых задач Аддитивной теории чисел получаются путем комбинирования аналитических и элементарных методов. В методах решета принцип высеивания простых чисел из натурального ряда (решето Эратосфена) распространяется на совокупности последовательностей. Так, одновременное высеивание с должной точностью из последовательностей {m} и {2n - m} простых чисел, $\leqslant n^{\theta_1}$ и, соответственно $\leqslant n^{\theta_2}$ где ($\theta_1 < 1$ и $\theta_2 < 1$ надлежащим образом выбранные положительные константы), приводит к решению так называемой квазипроблемы Гольдбаха-Эйлера о представлении четного числа суммой двух чисел, одно из которых имеет не более k_1, а другое - не более k_2 простых множителей.

2.2.1 Метод Сельберга.

Метод Сельберга - специальный и в то же время достаточно универсальный метод решета, созданный Атле Сельбергом. Решето Сельберга позволяет хорошо оценивать сверху просеивающую функцию $S(;,z)$, обозначающую количество элементов конечного множества A целых чисел, которые не делятся на простые числа $p < z$ и принадлежат некоторому множеству P простых чисел.

Пусть $P(z) = \prod_{p<z,p\in P} p$. Метод Сельберга основан на очевидном неравенстве

$$S(A;P,z) \leqslant \sum_{a\in A}(\sum_{d|a;d|P(z)} \lambda_d)^2,$$

которое верно при $l_1 = 1$ для произвольных действительных чисел. Идея Сельберга состоит в том, чтобы, положив $l_d = 0$ для $d \geqslant z$, минимизировать правую часть неравенства путем надлежащего выбора оставшихся чисел $\lambda_d(2 \leqslant d < z)$.

В комбинации с другими методами решета решета Сельберга позволяет получать оценки снизу, особенно сильные при использовании весовых функций.

2.2.2 Решето Эратосфена.

Решето Эратосфена - метод, разработанный Эратосфеном (3 в. до н. э.) и позволяющий отсеивать составные числа из натурального ряда. Сущность метода Эратосфена заключается в следующем. Зачеркивается единица. Число 2 - простое. Зачеркиваются все натуральные числа, делящиеся на 2. Число 3 - первое незачеркнутое число - будет простым. Далее зачеркиваются все натуральные числа, к-рые делятся одновременно и на 2 и на 3. Число 5 - первое незачеркнутое число - будет простым. Продолжая аналогичные вычисления, можно найти сколь угодно большой отрезок последовательности простых чисел. Решето Эратосфена нашло развитие в других более сильных методах решета (например решето Вруна).

2.3 Дисперсионный метод.

В 1959 Ю. В. Линником был разработан Дисперсионный метод. Он применим в теории чисел для решения некоторых бинарных уравнений (бинарных аддитивных проблем)вида

$$\alpha + \beta = n,$$

где α и β принадлежат к достаточно густым и хорошо распределенным в арифметических прогрессиях последовательностям натуральных чисел. Дисперсионный методом, соединяет в себе элементарные теоретико - вероятностные понятия (в частности, понятие дисперсии и неравенства типа Чебышева) с аналитическими и алгебраическими идеями И. М. Виноградова и А. Вейля (A. Weil). Сущность метода состоит в следующем. Исходное бинарное уравнение сводится к уравнению вида:

$$\upsilon D' + \beta = n;$$

здесь υ, D независимо пробегают некоторые значения из прямоугольной области где υ и D- некоторые интервалы; при этом числа υ - простые, а на D могут быть наложены различные дополнительные условия. Пусть через F обозначено число решений этого уравнения. Тогда получим уравнение:

$$\upsilon D + \beta = n$$

при произвольном $D \in (D)$, и через (n, D) обозначено число его решений, найденных из каких-либо эвристических соображений. Тогда гипотетически число ожидаемых решений уравнения записывается в виде:

$$S = \sum_{D' \in (D)} A(n, D').$$

Оценка разности $F - S = V$ имеет вид:

$$V = \sum_{D' \in (D)} (\sum_{\upsilon D' + \beta = n} 1 - A(n, D')).$$

Применение неравенства Коши приводит к неравенству:

$$V^2 \leqslant D_0 V',$$

где D_0 - длина интервала (D), а

$$V' = \sum_{D' \in (D)} (\sum_{\upsilon D' + \beta = n} 1 - A(n, D'))^2 -$$

есть дисперсия числа решений уравнения $\upsilon D' + \beta = n$

Если распространить суммирование в последнем уравнении на всех $D \in (D)$, то будут сняты все дополнительные условия, наложенные на D'. В то же время величина дисперсии может только возрасти. Поэтому

$$V' = \sum_{D \in (D)} (\sum_{\upsilon D' + \beta = n} 1 - A(n, D))^2 = \Sigma_1 - 2\Sigma_2 + \Sigma_3$$

Суммы Σ_1, Σ_2 и Σ_3 в некоторых случаях удается вычислить асимптотически. Главную трудность представляет вычисление Σ_1 - основной суммы Дисперсионного метода. Асимптотический расчет суммы Σ_1 осуществляется при помощи метода Виноградова по подсчету для некоторых функций количества их дробных частей, попадающих в заданный сегмент, а также с использованием новейших оценок тригонометрических сумм, полученных средствами алгебраической геометрии. Асимптотика для сумм Σ_2 и Σ_3 находится путем элементарного суммирования. Если, в результате, дисперсия оказывается не слишком большой, то получается асимптотика для числа решений уравнения $\upsilon D' + \beta = n$. Объединение числа решений всех уравнений вида $\upsilon D' + \beta = n$ приводит к асимптотической формуле для числа решений уравнения $\alpha + \beta = n$.

Рассмотренный метод применим и для решения уравнений вида $\alpha - \beta = l$, где l - заданное целое число, отличное от нуля.

При помощи дисперсионного метода был решен ряд классических бинарных аддитивных проблем, которые до создания дисперсионного метода могли быть решены только на основе эвристических или гипотетических соображений. К числу проблем, решённых с помощью данного метода, относятся: аддитивная проблема делителей, проблема делителей Титчмарша, проблема Харди-Литлвуда.

Область применения дисперсионного метода пересекается с областью применения метода большого решета Ю. В. Линника.

3 Основные выводы.

Для решения Аддитивных проблем применяются аналитические, алгебраические, элементарные и смешанные методы. Значительная часть Аддитивных проблем может быть сведена к двум классам:

а) Тернарные аддитивные проблемы типа

$$n = \alpha + \beta + \gamma$$

принадлежат к достаточно густым и хорошо распределенным в арифметических прогрессиях последовательностям целых чисел, γ принадлежит последовательности, может быть и редкой, но с хорошим поведением некоторых, соответствующих ей, тригонометрических сумм.

б) Бинарные аддитивные проблемы типа

$$n = \alpha + \beta$$

с теми же условиями для α и β что и в пункте а).

Универсальным средством решения тернарных аддитивных проблем для достаточно больших n является общий аналитический метод Харди - Литлвуда - Виноградова в форме метода тригонометрических сумм (пункт 1.2.1 - метод оценок тригонометрических сумм).

Бинарные аддитивные проблемы обычно не могут быть решены этими методами. Для решения таких аддитивных проблем применяются различные варианты элементарного решета (пункт 2.2 Методы решета. Исследование структуры множеств). Особенно сильные результаты получаются при помощи большого решета и дисперсионного метода Ю. В. Линника.

Аддитивные проблемы типа представления целых чисел квадратичными формами с тремя и четырьмя переменными также являются бинарными. Они исследуются своеобразными арифметико - геометрическими методами теории квадратичных форм.

Литература

1. http://dic.academic.ru - Математическая энциклопедия.

2. www.mathnet.ru/rus - сайт "Математические заметки".

3. Н. М. Тимофеев, "О теореме Виноградова–Бомбьери", Математические заметки, т.38, № 6 (1985).

4. А. А. Зенкин, "Проблема Варинга для сумм квадратов положительных чисел", Математические заметки, т.54, № 5 (1993).

5. А. К. Каршиев, А. В. Соколовский "Обобщённая проблема делителей Титчмарша", Математические заметки, т.3, № 2 (1968).

6. http://mirslovarei.com - сайт "Мир словарей".

7. Н. М. Тимофеев, М. Б. Хрипунова "Проблема Титчмарша с числами, имеющими заданное число делителей", Математические заметки, т.59, № 4 (1996).